

Kombinatorinis optimizavimas ir metaeuristiniai metodai: teoriniai aspektai

Alfonsas Misevičius

Kauno technologijos universiteto
Multimedijos inžinerijos katedros techn. m. dr.,
docentas
Kaunas University of Technology,
Department of Multimedia Engineering,
Assoc. Prof., PhD
Studentų g. 50–400a/416a, LT-51368 Kaunas
Tel. (+370 37) 300 372
El. paštas: alfonsas.misevicius@ktu.lt

Jonas Blonskis

Kauno technologijos universiteto
Multimedijos inžinerijos katedros
techn. m. dr., docentas
Kaunas University of Technology,
Department of Multimedia Engineering,
PhD, Assoc. Prof.
Studentų g. 50–400, LT-51368 Kaunas
Tel. (+370 37) 300 370
El. paštas: jonas.blonskis@ktu.lt

Vytautas Bukšnaitis

Kauno technologijos universiteto
Multimedijos inžinerijos katedros lektorius
Kaunas University of Technology,
Department of Multimedia Engineering, Lecturer
Studentų g. 50–400, LT-51368 Kaunas
Tel. (+370 37) 300 370
El. paštas: vytautas.buksnaitis@ktu.lt

Straipsnyje aptariami kombinatorinio optimizavimo ir intelektualių optimizavimo priemonių, t. y. metaeuristinių metodų (metaeuristikų), teoriniai aspektai. Apibūdinami kombinatorinio optimizavimo uždaviniai, jų savybės, specifika. Pagrindinis dėmesys skiriamas metaeuristinių optimizavimo metodų charakterizavimui būtent kombinatorinio optimizavimo kontekste. Trumpai formuluojami metaeuristinių metodų tikslai, bendrosios nuostatos, taip pat akcentuojamas šių metodų savitumas, modernumas. Išsamiau apžvelgiami skiriamieji metaeuristikų bruožai, aprašomos svarbesnės teorinės metaeuristinių metodų aiškinimo kryptys. Pabaigoje pateikiamos apibendrinamosios pastabos.

Viena iš aktualių informatikos mokslo sričių yra optimizavimo metodai ir algoritmai, jų sudarymas ir tyrimas. Reikšmingą optimizavimo metodų grupę sudaro modernieji euristiniai algoritmai (toliau vartosime terminą „metaeuristiniai metodai“ arba „metaeuristikos“) (angl. *metaheuristics*). Metaeuristiniai metodai apima labai platų optimizavimo uždavinių sprendimo būdų spektrą, pradedant paprastais klasikiniais

algoritmais ir baigiant sudėtingais adaptyvių, apsimokančių (iš jų biologinių) sistemų modeliavimo metodais. Labai intensyviai metaeuristiniai metodai taikomi sprendžiant kombinatorinio optimizavimo (KO) uždavinius (angl. *combinatorial optimization problems*) (Papadimitriou, Steiglitz, 1982; Du, Pardalos, 1998). Kuriant ir tiriant šiuos metodus, svarų indėlį įnešė daug žymių pasaulio kompiuterijos, programavimo,

matematikos specialistų. Ypatingą stimulą optimizavimo metodų plėtrai suteikė skaičiavimo (kompiuterinės) technikos revoliucija. Čia turimas omenyje XX amžiaus laikotarpis maždaug tarp 1985 ir 2000 metų. Būtent šiuo laikotarpiu sukurti tokie efektyvūs metaeuristiniai metodai, kaip atkaitinimo modeliavimas (angl. *simulated annealing*), genetiniai algoritmai (angl. *genetic algorithms*), godžiosios randomizuotos adaptyvios paieškos procedūros (angl. *greedy randomized adaptive search procedures* – *GRASP*), „išsklaidytoji paieška“ (angl. *scatter search*), iteratyvioji lokalioji paieška (angl. *iterated local search*), paieška kintamose aplinkose (angl. *variable neighbourhood search*), skruzdėlių kolonijų elgsenos imitavimo algoritmai (angl. *ant colony optimization*), tabu paieška (angl. *tabu search*) ir kt. (Rayward-Smith ir kt., 1996; Aarts, Lenstra, 1997; Voss ir kt., 1998; Michalewicz, Fogel, 2000; Pham, Karaboga, 2000; Ribeiro, Hansen, 2001; Glover, Kochenberger, 2002; Pardalos, Resende, 2002).

Kombinatorinio optimizavimo uždaviniai – metaeuristinių metodų taikymo sritis

Sprendami optimizavimo uždavinį, turime tikslą rasti geriausią nepriklausomų dydžių (kintamųjų) konfigūraciją, t. y. sprendinį. Kombinatorinio optimizavimo uždavinių atveju operuojama su diskretinio tipo kintamaisiais (pvz., sveikaisiais skaičiais, sveikųjų skaičių rinkiniais, perstatymais, poibiais, grafais ir pan.). Kintamųjų

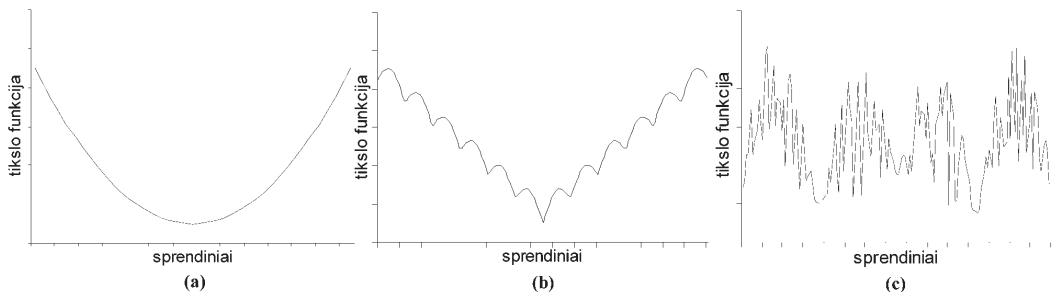
reikšmių aibė šiuo atveju yra baigtinė ar bent jau suskaičiuojama. Kombinatorinio optimizavimo uždavinių pavyzdžiai: garsusis komivojažieriaus uždavinys (angl. *traveling salesman problem*), kvadratinio paskirstymo uždavinys (angl. *quadratic assignment problem*), „kuprinės“ uždavinys (angl. *knapsack problem*), grafo dalijimo uždavinys (angl. *graph partitioning problem*).

Formaliai kombinatorinio optimizavimo uždavinį galima aprašyti pora (S, f) (Blum, Roli, 2003). S yra sprendinių aibė (angl. *set of feasible solutions*). Antrasis poros (S, f) narys yra funkcija, kurios apibrėžimo sritis – aibė S , o reikšmių aibė – realieji skaičiai. Ši funkcija vadinama tikslo funkcija (TF) (angl. *objective function*). TF pobūdis ir išraiška priklauso nuo konkretaus sprendžiamo uždavinio. Labai dažnai KO uždavinių tikslo funkcijos yra netiesinės, neiškilos, nediferencijuojamos, daugiaekstremės (žr. 1 pav.). Neprarasdami universalumo tarsime, kad tikslo funkcija f turi būti minimizuojama. Tokiu būdu, išspręsti uždavinį (S, f) reiškia surasti sprendinį $s^* \in S$ ir tokį, jog

$$s^* \in S^* = \left\{ s^\nabla \mid s^\nabla = \arg \min_{s \in S} f(s) \right\}.$$

Sprendinys s^* vadinamas uždavinio (S, f) (globaliai) optimaliu sprendiniu, o aibė $S^* \subseteq S$ – optimalių sprendinių aibė.

Svarbų vaidmenį sudarant metaeuristinius metodus KO uždaviniams atlieka aplinkos funkcija $\Theta: S \rightarrow 2^S$. Ja bet kuriam sprendiniui s iš S galima priskirti poaibį $\Theta(s) \subseteq S$ – sprendinio s aplinką („sprendinių-kaimynų“ aibė)

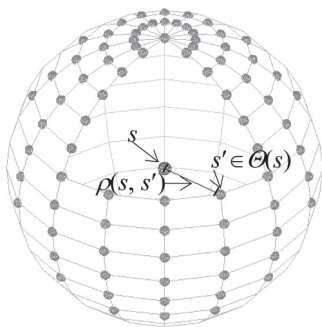


1 pav. Tikslo funkcijos tipai: a) įprastos tolydžios funkcijos atvejis, b) nesudėtingo optimizavimo uždavinio atvejis (tikslo funkcija multimodalinė, tačiau globalusis optimumas nėra izoliuotas), c) sudėtingo optimizavimo uždavinio atvejis (tikslo funkcija hiper-multimodalinė, optimumas izoliuotas)

(angl. *neighborhood*) (žr. 2 pav.). Aplinkos funkcijos pavyzdys yra vadinamoji „ k -aplinka“ Θ_k . Sakykime, paprastumo dėlei, kad sprendinių aibę S sudaro visi įmanomi natūrinių skaičių nuo 1 iki n perstatymai (nesikartojančių skaičių sekos), t. y. $S = \{s \mid s = (s(1), s(2), \dots, s(n)), s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}, i = 1, 2, \dots, n, s(i) \neq s(j), i \neq j\}$; čia s žymi sprendinį-perstatymą, o $s(i)$ — perstatymo s i -ąjį elementą. Tuomet „ k -aplinką“ sudaro visi tie sprendiniai, kurie „nutolę“ nuo duoto sprendinio s atstumu, ne didesniu kaip k , t. y. $Q_k(s) = \{s' \mid s' \in S, r(s, s') \leq k\}$; čia $s \in S, k \in \{2, 3, \dots, n\}, \rho$ yra Hammingo atstumas* tarp perstatymų.

Sprendinys s^* yra lokaliai optimalus (lokalusis optimumas) aplinkos Θ atžvilgiu, jeigu kiekvienam sprendiniui s' iš aplinkos $\Theta(s^*)$ galioja $f(s') - f(s^*) \geq 0$.

Sprendinių aplinkų nagrinėjimu, perėjimais iš vienos aplinkos į kitą, lokaliai optimalių sprendinių paieška grindžiamas metaeuristikų veikimas. Kaip tik šiame kontekste toliau charakterizuosime bendrais bruožais metaeuristinius metodus, pabrėžiant jų teorinius aspektus ir metodologinius principus.



Bendruoju atveju bet kuriam diskretiniam sprendiniui s visada galima rasti kiek norima mažą $\varepsilon > 0$ ir tokią, jog duotajam sprendiniui s egzistuos hipersfera, t. y. aplinka $\Theta_\varepsilon(s)$, kurios „radiusas“ lygus ε ir kurioje yra vienintelis narys s ($|\Theta_\varepsilon(s)| = 1$).

2 pav. Sprendinys s ir sprendinio s aplinka $\Theta(s)$

* Perstatymų atveju Hammingo atstumas yra tiesiog skaičių elementų, kurie yra skirtingose perstatymų, pvz., s ir s' , pozicijose, t. y. $\rho(s, s') = |\{i \mid s(i) \neq s'(i)\}|$.

Metaeuristiniai metodai: pagrindinės teorinės traktuotės

Metaeuristikos sąvoką 1986 m. pirmą kartą suformulavo žymus optimizavimo specialistas F. Gloveris (Glover, 1986). Tačiau net ir praėjus daugiau kaip dvidešimčiai metų, ši sąvoka vis dar traktuojama gana skirtingai. Toliau aptarsime svarbesnes teorines metaeuristinių metodų traktuotes.

I. Terminio „metaeuristinis“ genezė yra graikų kalbos žodžiai $\mu\epsilon\theta\alpha$ (*meta*) ir $\epsilon\upsilon\rho\iota\sigma\kappa\epsilon\upsilon\nu$ (*euriskein*). Pažodžiui išvertus į lietuvių kalbą tai reikštų „virš“ ir „rasti“, tiksliau — „esantis virš euristinio“. Priminsime, kad euristiniu algoritmu priimta laikyti tokį optimizavimo uždavinių sprendimo metodą, kuriuo siekiama surasti aukštos kokybės, bet nebūtinai optimalų sprendinį per priimtą skaičiavimų laiką (Silver ir kt., 1980). Euristiniai algoritmai (kaip ir metaeuristiniai metodai) negarantuoja gautų sprendinių optimalumo, o surasti sprendiniai paprastai yra tik lokaliai optimalūs duotos aplinkos atžvilgiu. Tuo euristiniai ir metaeuristiniai metodai skiriasi tiek nuo tikslųjų algoritmų (angl. *exact algorithms*), kurie garantuoja optimalaus sprendinio suradimą, tiek nuo apytikslųjų (aproksimacinių) algoritmų (angl. *approximate algorithms*), kurie užtikrina, kad gauto sprendinio kokybė skirsis nuo optimalaus sprendinio kokybės ne daugiau kaip iš anksto fiksuota paklaida $\varepsilon > 0$.

II. Prisimenant kai kurias istorines optimizavimo metodų vystymosi tendencijas, reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad ankstyvuoju laikotarpiu optimizavimo algoritmai, galima sakyti, būdavo salygojami konkrečių uždavinių, iš jų kildavo. Kitaip sakant, vadovautasi metodologiniu principu „iš pradžių uždavinys — po to algoritmas“. Tolesnės optimizavimo metodų vystymosi raidos metu vis labiau ryškėjo santykinis sudaromų metodų nepriklausomumas nuo sprendžiamų uždavinių, kol galiausiai metodus imta kurti beveik nesusiejant jų su atskirais uždaviniais. Šiam euristinių sprendimo metodų raidos etapui būdingas jau kardinaliai priešingas pirmiau minėtam principas „iš pradžių metodas — pasakui uždaviniai“. Esant tokiai nuostatai, svarbu ne tik konkrečių, specializuotų optimizavimo

procedūrų programavimas, bet ir pačių algoritmų kūrimo metodika („metodų metodai“), sisteminis-metodologinis požiūris, racionali mokslinė ideologija (Misevičius, 2006).

III. Natūralu metaeuristinius metodus apibrėžti kaip tam tikro aukšto abstrakcijos lygio taisyklių, nurodymų (pagaliau, koncepcijų) rinkinius, trumpai tariant, paradigmas (Vaessens ir kt., 1998; Misevičius, 2003). Tokių paradigmų paskirtis yra formaliai aprašyti kurios nors klasės uždavinių sprendimo idėją, principą. Šiuo požiūriu sąvoka „metaeuristinis metodas“ yra daug talpesnė negu sąvoka „euristinis algoritmas“. Kai sakome „metaeuristiniai metodai“, turime omenyje tai, kas yra virš euristicinių algoritmų (perkeltine prasme), t. y. tai, kas yra išvystyta, patobulinta, modernizuota tradicinių euristicinių algoritmų atžvilgiu. Metaeuristikos yra aukštesniojo lygio, bendro pobūdžio metodai, santykinai „atitraukti“ nuo atskirų uždavinių ir orientuoti tam tikroms uždavinių grupėms, probleminėms sritims. Tai yra kontrastas žemesniojo lygmens, specializuotoms grynosioms euristikoms, kurios susiejamos su konkrečiais sprendžiamais uždaviniais.

Metaeuristiniai metodai — tai nauja, aukštesnė kokybė, gimusi iš euristicinių algoritmų. Metaeuristikos yra tai, kam būdinga universalumas, konceptualūs, strateginiai dalykai, o ne ribotumas, specifiniai, procedūriniai aspektai. Metaeuristikos aprašo veikimo būdą — ne funkcionavimo detales.

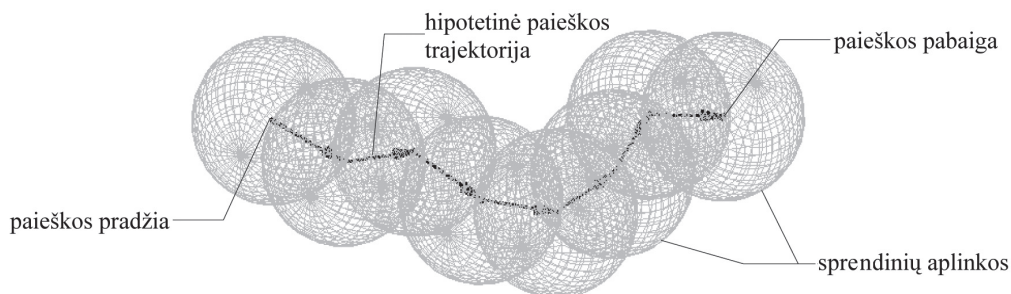
IV. Metaeuristikas galima traktuoti ir kaip tam tikrus kompleksinius, sudėtinius uždavinių sprendimo metodus, kurie, jei taip galima pasakyti, turi savyje vieną ar daugiau kitų metodų, algoritmų, procedūrų (Voss, 2001). Perfrazuojant kitaip, vienas universalesnis (aukštesniojo lygmens) metodas — tarkime, M_1 — pajungia* kitą, ne tokį universalų (žemesniojo lygmens) metodą — M_2 . Galimas pavyzdys: atkaitinimo modeliavimo metodas turi savyje „greičiausio nusileidimo“ (angl. *steepest descent*) metodą; kitaip tariant, „greičiausio nusileidimo“ metodas yra atskiras atkaitinimo modeliavimo metodo atvejais. Vadovaudamiesi pateiktu principu,

* Šis dalykas labai taikliai nusakomas anglišku žodžiu *guide*.

galėtume sukonstruoti ir daugiau nei dviejų lygių išvestinius, hibridinius darinius — savotiškas „meta-metaeuristikas“. Tokio darinio iliustracija — genetinis algoritmas, hibridizuotas su atkaitinimo modeliavimu.

V. Pagal kitą neretai sutinkamą nuostatą metaeuristikos yra optimizavimo uždavinių sprendimo metodai, orientuoti kelių (daugiau nei vieno) lokaliai optimalių sprendinių paieškai. (Šia prasme metaeuristiniai metodai yra priešingybė klasikiniams euristiniams algoritmams, kurie paprastai apsiriboja tik vieno lokaliai optimalaus sprendinio suradimu.) Metaeuristikų atveju atsiranda didesnės potencialios galimybės rasti aukštesnės kokybės sprendinius. Iš tiesų, daugėjant randamų lokaliųjų optimumų, didėja ir tikimybė, jog kuris nors surastas sprendinys bus geresnis negu pirmasis rastas lokalusis optimumas. Aišku, paieškos laikas atitinkamai pailgėja, tačiau „racionalusis grūdas“ yra tai, kad geriau gauti aukštos kokybės rezultatą per ilgesnį laiką, negu tenkintis blogu rezultatu, gautu per labai trumpą laiką. Esmė yra principas: „geresni rezultatai — per ilgesnį, bet priimtina laiką“. (Beje, nuolat tobulėjant kompiuterinei technikai, minėtą principą galėtume įdomiai perfrazuoti: „geresni rezultatai — per trumpesnį laiką (!)“. Net ir pakankamai ilgas, bet tenkinantis vartotoją ar tyrėją paieškos laikas yra pateisinamas, jeigu tik suteikia galimybių apčiuopiamai pagerinti sprendinių kokybę (Misevičius, 2006). Žinoma, nuolatos turi būti stengiamasi, kad ir aukštos kokybės, arti globaliojo optimumo esantys sprendiniai būtų pasiekiami per kuo trumpesnį laiką — tai išliks pagrindinis tikslas tiems, kurie kuria naujus efektyvesnius metaeuristinius metodus.

VI. Dar vienas metaeuristinių metodų traktavimas yra susijęs su jų nagrinėjimu atliekamų veiksmų požiūriu. Remiantis šiuo interpretavimu, metaeuristikos veikimas suprantamas kaip iteracinis efektyvus, kryptingo sprendinių erdvės nagrinėjimo procesas. Šiuo atveju tinka apibūdinimas „trajektorijų metodai“ — ir iš tikrųjų čia būtų galima išvelgti įdomią analogiją tarp išivaizduojamos perėjimų sprendinių erdvėje trajektorijos ir, pavyzdžiui, taško judėjimo euklidinėje erdvėje pėdsako (žr. 3 pav.).



3 pav. Grafinis paieškos (sprendinių nagrinėjimo) proceso interpretavimas

Metaeuristiniuose metoduose perėjimų tarp sprendinių (sprendinių nagrinėjimo) procesas valdomas atitinkamomis sprendimų priėmimo taisyklėmis. Klasikiniuose metoduose šios taisyklės paprastai yra determinuotos, tačiau daugelis šiuolaikinių metaeuristikų remiasi nedeterminuotais, tikimybiniais sprendimais. Ypač tai pasakytina apie mus supančio pasaulio procesų imitavimo metodus, tokius kaip evoliucijos modeliavimo, genetiniai algoritmai, skruzdėlių kolonijų elgsenos imitavimo algoritmai ir pan. Tai nereiškia, kad tokie metodai redukuojami į nevaldomą stochastinį paieškos procesą. Metaeuristinis procesas nėra „chaotiškas klaidžiojimas nežinioje“. Atvirkščiai, randomizavimas, atsitiktinumai (angl. *randomness*) metaeuristikose atlieka konstruktyvų vaidmenį, diversifikuojant paieškos procesą (Stützle, 1998; Hoos, Stützle, 2004). Neatsitiktinumai aklaivaldžiai valdo mūsų algoritmus, jų vykdymą, o mes, sudarydami algoritmus, apgalvotai išnaudojame atsitiktinumus, siekdami, kad paieška taptų lankstesnė, efektyvesnė, kad būtų surandami geresnės kokybės sprendiniai. Intelektualizuotas, išmintingas racionaliai kontroliuojamų atsitiktinumų panaudojimo būdas – štai kur glūdi stochastinių metaeuristinių metodų esmė.

VII. Reikia pabrėžti, kad modernieji metaeuristiniai metodai, nors ir besiremiantys stochastinėmis sprendimų priėmimo taisyklėmis, dažnai yra grindžiami atminties (aposteriorinės informacijos) panaudojimu. Tai būdinga tiek gamtos procesus imituojantiems metoduose, tiek dirbtiniams, sintezuotiems, „atitulusiems nuo

gamtos“ metoduose, tokiems kaip tabu paieška, godžioji randomizuota adaptyvioji paieška ir kt. Pripažįstama, kad disponavimas vieno ar kito tipo atmintimi – kaip svarbi tikslingesnės, kryptingesnės, efektyvesnės paieškos sąlyga – yra vienas iš fundamentalių modernių metaeuristikų atributų (Misevičius, 2006). Labai svarbi yra vadinamoji adaptyvioji atmintis (angl. *adaptive memory*), kurios paskirtis – atsižvelgti į anksčiau vykusius procesus, ištirtus sprendinius, sprendinių poerdvius ir akumuliuoti svarbius paieškos proceso požymius, kad pagal juos būtų galima tinkamai reguliuoti paieškos pobūdį, kryptis ir pan. Galimi skirtingi atminties realizavimo variantai. Paprastai išskiriama trumpalaikė atmintis (angl. *short-term memory*) ir ilgalaikė atmintis (angl. *long-term memory*). Pirmoji padeda įsiminti neseniai atliktus sprendinių perėjimus, nagrinėtus sprendinius. Antroji kaupia įvairius paieškos proceso parametrus, pavyzdžiui, duomenis apie tam tikrų įvykių kiekį, dažnumą ir t. t.

VIII. Baigiant pagrindinių metaeuristinių metodų traktuočių apžvalgą – trumpai apie formalų metaeuristikų pateikimą, aprašymą. Atvaizduojant metaeuristinius metodus, tikslinga pasinaudoti svarbiausių metodų atliekamų veiksmų aprašymo šablonais (struktūrogramomis). Tokie šablonai gali būti sudaromi pasitelkiant specialias formalizuotas konceptualiojo algoritmo aprašymo pseudo kalbas, savo forma ir sintakse primenančias daugeliui gerai žinomas, populiarias programavimo kalbas, tokias kaip *Pascal*. Metaeuristinio metodo aprašo šablono pavyzdys demonstruojamas 4 paveiksle.

```

procedure Lokaloji_paieška_aplinkoje_Θ;
// pradiniai duomenys:  $s^\circ$  – pradinis sprendinys; rezultatai:  $s^\bullet$  – lokaliai optimalus sprendinys
begin
   $s^\bullet := s^\circ$ ;
  while  $\exists s' : s' \in \Theta(s^\bullet) \wedge f(s') - f(s^\bullet) < 0$  do begin // lokalsios paieškos ciklas
    parinkti sprendinį  $s'$  iš sprendinio  $s^\bullet$  aplinkos  $\Theta(s^\bullet)$ 
    ir tokį, kad  $f(s') - f(s^\bullet) < 0$ ;
     $s^\bullet := s'$  // esamas sprendinys pakeičiamas nauju
  end // while
end.

```

4 pav. Lokalsios paieškos metodo aprašymas naudojant konceptualiojo algoritmų aprašymo pseudo kalbą

Baigiamosios pastabos

Kombinatorinis optimizavimas ir intelektualūs kombinatorinio optimizavimo uždavinių sprendimo būdai – metaeuristiniai metodai – yra svarbi informatikos mokslo kryptis. Būtent metaeuristiniai metodai KO uždavinių kontekste, pagrindinės teorinės šių metodų traktuotės trumpai aptartos šiame straipsnyje. Metaeuristikos suprantamos kaip abstrahuotų nurodymų, direktyvų rinkiniai, aprašantys tam tikros grupės uždavinių sprendimo idėją, – kas yra priešingybė siauros paskirties, specializuotiems tradiciniams euristiniams optimizavimo algoritmams, orientuotiems atskiriems konkretiems uždaviniams. Pagrindinis metaeuristinių metodų tikslas yra labai aiškus – surasti aukštos kokybės sprendinius, kiek galima artimesnius globaliajam optimumui. Tačiau

neaišku, kaip tai atlikti efektyviu būdu; tiesą sakant, neaišku netgi ir tai, ar iš viso egzistuoja universalūs ir efektyvūs visiems uždaviniams (ar bent didesnei jų daliai) metodai. Vis dėlto metaeuristiniai metodai, jų kūrimas, tobulinimas išlieka daugelio optimizavimo problemas nagrinėjančių mokslininkų kolektyvų intensyvių tyrinėjimų objektas. Gausiose publikacijose šia tematika nuolat pateikiamos naujos metaeuristinių metodų versijos, modifikacijos, variantai, plėtojimo kryptys. Tyrėjų siekis kurti vis tobulesnius metodus yra logiškas ir suprantamas, kaip natūralus noras prisidėti įveikiant naujus tiek informatikos, tiek matematikos, tiek kitoms susijusioms mokslo disciplinoms išskylančius iššūkius. Galima tvirtai prognozuoti, kad ir artimiausioje ateityje dėmesys metaeuristinių metodų tyrimui ne mažės, o tik didės.

LITERATŪRA

AARTS, E. H. L.; LENSTRA, J. K. (ed.) (1997). *Local Search in Combinatorial Optimization*. Chichester: Wiley.

BLUM, C.; ROLI, A. (2003). Metaheuristics in combinatorial optimization: overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys*, vol. 35, p. 268–308.

DU, D. Z.; PARDALOS, P. M. (1998). *Handbook of Combinatorial Optimization*, vol. 1–3. Dordrecht: Kluwer.

GLOVER, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research*, vol. 13, p. 533–549.

GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G. (ed.) (2002). *Handbook of Metaheuristics*. Norwell: Kluwer.

HOOS, H. H.; STÜTZLE, T. (2004). *Stochastic Local Search – Foundations and Applications*. San Francisco: Morgan Kaufmann.

MICHALEWICZ, Z.; FOGEL, D. B. (2000). *How to Solve It: Modern Heuristics*. Berlin-Heidelberg: Springer.

MISEVIČIUS, A. (2003). Intelektualieji optimizavimo metodai. *Informacijos mokslai (Information Sciences)*: mokslo darbai, t. 26, p. 160–166.

MISEVIČIUS, A. (2006). Naujų iteracinių euristinių algoritimų sudarymas ir tyrimas. Mokslinių tyrimų projekto (registr. Nr. T-06276) ataskaita, KTU, Kaunas.

PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. (1982). *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

PARDALOS, P. M.; RESENDE, M. G. C. (ed.) (2002). *Handbook of Applied Optimization*. New York: Oxford University Press.

PHAM, D. T.; KARABOGA, D. (ed.) (2000). *Intelligent Optimisation Techniques: Genetic Algorithms, Tabu Search, Simulated Annealing and Neural Networks*. London: Springer.

RAYWARD-SMITH, V. J.; OSMAN, I. H.; REEVES, C. R.; SMITH G. D. (ed.) (1996). *Modern Heuristic Search Methods*. Chichester: Wiley.

RIBEIRO, C. C.; HANSEN, P. (ed.) (2001). *Essays and Surveys in Metaheuristics*. Boston: Kluwer.

SILVER, E. A.; VIDAL, R. V. V.; DE WERRA, D. (1980). A tutorial on heuristic methods. *European Journal of Operational Research*, vol. 5, p. 153–162.

STÜTZLE, T. (1998). Local search algorithms for combinatorial problems – analysis, improvements, and new applications. PhD Thesis, FB Informatik, TU Darmstadt, Germany.

VAESSENS, R. J. M.; AARTS, E. H. L.; LENSTRA, J. K. (1998). A local search template. *Computers & Operations Research*, vol. 25, p. 969–979.

VOSS, S. (2001). Meta-heuristics: the state of the art. In: NAREYEK, A. (ed.) *Local Search for Planning and Scheduling, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 2148. Berlin-Heidelberg: Springer, p. 1–23.

VOSS, S.; MARTELLO, S.; OSMAN, I. H.; ROUCAIROL, C. (ed.) (1998). *Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization*. Boston: Kluwer.

COMBINATORIAL OPTIMIZATION AND METAHEURISTIC METHODS: THEORETICAL ASPECTS

Alfonsas Misevičius, Jonas Blonskis, Vytautas Bukšnaitis

Summary

In this paper, theoretical aspects of combinatorial optimization (CO) and intelligent optimization techniques, i. e. metaheuristic methods (metaheuristics) are discussed. The combinatorial optimization problems and their basic properties are shortly introduced. Much of our attention is paid to the characterization of the metaheuristic methods, in particular for solving

CO problems. We formulate the main goals of the metaheuristic methods, also focusing on the special theoretical issues and features of these methods. The most important interpretations of the metaheuristic methods are described in more details. The paper is completed with the concluding remarks.