I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

ЗОНЫ НОРМАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Л. ВИЛКАУСКАС

Целью настоящей работы является обобщение некоторых результатов Ю. В. Линника [1] на многомерный случай.

Введем следующие обозначения:

X, Y, U, T — s — мерные векторы-строки, компоненты которых будем обозначать малыми буквами с индексами: $X=(x_1, \ldots, x_s)$, X' — вектор-столбец, $|X|$ — длина вектора, $O=(0, \ldots, 0)$, $(XY)=\sum\limits_{j=1}^{s} x_j y_j$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$; $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — малые положительные константы, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$; $C_0, C_1, \ldots$ — положительные константы, B — ограниченная функция рассматриваемых параметров, не всегда одна и та же, $\rho(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных s — мерных векторов

$$\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_s^{(k)}), \qquad k=1, 2, \ldots \tag{1}$$

Пусть

$$\zeta^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)}.$$

Пусть, далее,

$$E\xi^{(k)}=O, \quad E\xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}=b_{ij}^k \doteq b_{ij},$$

где

$$i, j=1, 2, \ldots, s.$$

Условимся говорить, что для последовательности (1) имеет место равномерная локальная нормальная сходимость (р. л. н. с.) в s — мерном кубе с гранью $[-\psi(n), \psi(n)]$, если при $n \to \infty$ равномерно по $X=(x_1, \ldots, x_s)$, когда $x_i \in [-\psi(n), \psi(n)]$ $(i=1, \ldots, s)$,

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} \to 1,$$

где $p_n(x)$ — плотность распределения случайной величины $\zeta^{(n)}$ и

$$p(X)=(2\pi)^{-\frac{s}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q^{-1}(X)\right]$$

— плотность s-мерного нормального распределения; $Q^{-1}(X)$ — квадратичная форма, обратная форме

$$Q(T)=\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j,$$

Λ — определитель формы $Q(T)$. Условимся, что:

а) существует натуральное число n_0, такое, что $\zeta^{(n_0)}$ имеет ограниченную плотность $p_{n_0}(X)$,

б) квадратичная форма вторых моментов положительно определенная.

Теорема 1. *Если выполнены условия а) и б), и при* $\alpha<\frac{1}{6}$ *найдется* $\varepsilon_0>0$ *такое, что*

$$E\exp\left(\varepsilon_0\sum_{i=1}^{s}\left|\xi_i^{(k)}\right|^{\frac{4}{1+2\alpha}}\right)<\infty, \tag{2}$$

то для последовательности (1) *имеет место р.л.н.с. в s-мерном кубе с гранью* $[-n^{\alpha}\rho^{-1}(n),\ n^{\alpha}\rho^{-1}(n)]$.

Если же найдется C_0 такое, что при $\alpha<\frac{1}{6}$

$$E\exp\left(C_0\sum_{i=1}^{s}\left|\xi_i^{(k)}\right|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right)\ \textit{бесконечен}, \tag{3}$$

то

$$\frac{p_n(X)}{p(X)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,$$

когда

$$|X|=n^{\alpha}\rho(n).$$

Доказательство. Пусть $f_n(T)$ — характеристическая функция величины $\zeta^{(n)}$, т.е.

$$f_n(T)=\int_{R_s}\exp[i(TX)]\,p_n(X)\,dX,$$

где R_s — s-мерное евклидовое пространство. Неотрицательное преобразование Фурье $|f_{n_0}(T)|^2$ является характеристической функцией случайной величины $\zeta^{(n_0)}-\overset{*}{\zeta}{}^{(n_0)}$, где $\overset{*}{\zeta}{}^{(n_0)}$ так же распределена, как и $\zeta^{(n_0)}$. По теореме [2] и в силу условия а) для $n\geqslant 2n_0$ имеем

$$p_n(X)=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int_{R_s}\exp[-i\sqrt{n}\,(TX)]\,[\varphi(T)]^n\,dT, \tag{4}$$

где $\varphi(T)$ — характеристическая функция последовательности (1).

Но

$$p_n(X)=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int_{R_s}\exp[-i\sqrt{n}\,(TX)]\,[\varphi(T)]^n\,dT=I_1+I_2+I_3. \tag{5}$$

Здесь

$$I_1 = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{|T| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)\right] [\varphi(T)]^n\, dT,$$

$$I_2 = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{n^{\frac{2\alpha-1}{2}} \leqslant |T| < \varepsilon_1} \exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)\right] [\varphi(T)]^n\, dT,$$

$$I_3 = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{|T| \geqslant \varepsilon_1} \exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)\right] [\varphi(T)]^n\, dT;$$

положительное постоянное $\varepsilon_1 > 0$ подберем при оценке I_2 и I_3.

Оценим I_3 и I_2.

1) Из существования $\int\limits_{R_s} |f_{n_0}(T)|^2\, dT$ следует, что

$$\varphi(T) \to 0 \quad \text{ири} \quad |T| \to \infty.$$

Отсюда можно найти малое $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при $|T| \geqslant \varepsilon_1$

$$|\varphi(T)| < \exp(-\alpha_0).$$

Тогда при достаточно большом n

$$I_3 = Bn^{\frac{s}{2}} \exp\left[-\alpha_0 (n - 2n_0)\right] \cdot \int\limits_{R_s} |f_{n_0}(T)|^2\, dT = B \exp(-\alpha_1 n).$$

2) Постоянную $\varepsilon_1 > 0$ подберем так, чтобы

$$|\varphi(T)| \leqslant 1 - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j.$$

В силу условия б)

$$Q(T) = \sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j > \varepsilon\left(|t_1|^2 + \ldots + |t_s|^2\right). \tag{6}$$

Поэтому при $n^{\frac{2\alpha-1}{2}} \leqslant |T| < \varepsilon_1$

$$[\varphi(T)]^n = B \exp\left(-\frac{\varepsilon s}{4} n^{2\alpha}\right) = B \exp\left(-\eta_0 n^{2\alpha}\right)$$

и

$$I_2 = B \exp\left(-\eta_1 n^{2\alpha}\right).$$

Таким образом, (5) примет вид

$$p_n(X) = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{|T| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)\right] [\varphi(T)]^n\, dT + B \exp\left(-\eta_1 n^{2\alpha}\right). \tag{7}$$

Положим

$$[\varphi(T)]^n = [f_{n_0}(T)]^{\frac{n}{n_0}}.$$

Пусть еще $\varepsilon_1 > 0$ подобрано так, что при $|T| < \varepsilon_1$ $f_{n_0}(T)$ не имеет нулей. Обозначая

$$\ln f_{n_0}(T) = K(T),$$

из (7) находим

$$p_n(X) = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{|T| < n^{\frac{2\alpha - 1}{2}}} \exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX) + \frac{n}{n_0} K(T)\right] dT + B\exp(-\eta_1 n^{2\alpha}). \tag{8}$$

Теперь заменим $K(T)$ достаточным для нашей цели приближением, т. е.

$$K(T) = \sum_{r=2}^{m} \sum_{l_1 + \ldots + l_s = r} \frac{\psi^r_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}}{l_1! \ldots l_s!} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s} + R,$$

где

$$\psi^r_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}} = \left.\frac{\partial^r K(T)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_s^{l_s}}\right|_{T=O}, \tag{9}$$

$$R \leqslant \sup_{|T| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \left| \sum_{l_1 + \ldots + l_s = m} \frac{\partial^r K(T)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_s^{l_s}} \frac{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}{l_1! \ldots l_s!} \right|$$

и

$$m = \left[\frac{n^{2\alpha}}{\rho(n)}\right].$$

Для оценки остаточного члена в формуле (6) нам понадобятся оценки

$$\frac{\partial^r f_{n_0}(T)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_s^{l_s}} = i^r \int\limits_{R_s} x_1^{l_1} \ldots x_s^{l_s} \exp[i(TX)]\, p_{n_0}(X)\, dX,$$

где $r = l_1 + \ldots + l_s$.

В силу условия (2)

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{x_s}^{\infty} p_{n_0}(U)\, dU =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{x_s}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{s} |u_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right] \exp\left[\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{s} |u_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right] p_{n_0}(U)\, dU =$$

$$= B\exp\left[-\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{s} |x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right].$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^s}{\partial x_1 \ldots \partial x_s} \int\limits_{x_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{x_s}^{\infty} p_{n_0}(U)\, dU = (-1)^s p_{n_0}(x_1, \ldots, x_s),$$

так как ф-я $p_{n_0}(U)$ непрерывная. Поэтому

$$\int\limits_0^{\infty} \ldots \int\limits_0^{\infty} x_1^{l_1} \ldots x_s^{l_s} p_{n_0}(X)\, dX =$$

$$= (-1)^s \int\limits_0^{\infty} \ldots \int\limits_0^{\infty} x_1^{l_1} \ldots x_s^{l_s} \frac{\partial^s}{\partial x_1 \ldots \partial x_s} \int\limits_{x_1}^{\infty} \ldots \int\limits_{x_s}^{\infty} p_{n_0}(U)\, dU\, dX.$$

Для сокращения записи обозначим

$$v_X = x_1^{l_1} \dots x_s^{l_s}$$

и

$$w_X = \int_{x_1}^{\infty} \dots \int_{x_s}^{\infty} p_{n_0}(U)\, dU.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} v_X \frac{\partial^s w_X}{\partial x_1 \dots \partial x_s}\, dx_1 \dots dx_s =$$

$$= (-1)^s \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\partial^s v_X w_X}{\partial x_1 \dots \partial x_s}\, dx_1 \dots dx_s +$$

$$(-1)^{s+1} \sum_{i=1}^{s} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\partial v_X}{\partial x_i} \frac{\partial^{s-1} w_X}{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{s} \partial x_l}\, dx_1 \dots dx_s +$$

$$(-1)^{s+1} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i<j}}^{s} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v_X}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^{s-2} w_X}{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i, j}}^{s} \partial x_l}\, dx_1 \dots dx_s + \dots +$$

$$(-1)^{s+1} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_X \frac{\partial^s v_X}{\partial x_1 \dots \partial x_s}\, dx_1 \dots dx_s.$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\partial^s v_X w_X}{\partial x_1 \dots \partial x_s}\, dx_1 \dots dx_s = 0,$$

и для любого $k \leqslant s$

$$\frac{\partial^k w_X}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_l} \leqslant w_X.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} x_1^{l_1} \dots x_s^{l_s} p_{n_0}(X)\, dX =$$

$$= B l_1 \dots l_s \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} x_1^{l_1 - 1} \dots x_s^{l_s - 1} \int_{x_1}^{\infty} \dots \int_{x_s}^{\infty} p_{n_0}(u_1, \dots, u_s)\, dU\, dX.$$

Подставляя в последний интеграл оценку (7), после простых вычислений получим

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} x_1^{l_1} \dots x_s^{l_s} p_{n_0}(X)\, dX = B^r \prod_{i=1}^{s} l_i \Gamma\left(\frac{1+2\alpha}{4\alpha} l_i\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^r f_{n_0}(T)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}=B^r\prod_{i=1}^{s} l_i\Gamma\left(\frac{1+2\alpha}{4\alpha}\,l_i\right), \tag{11}$$

где в B входит множитель 2^s.

Положим

$$\tilde{\varphi}_r(T+T_0)=f_{n_0}(T_0)+\sum_{k=1}^{r}\sum_{l_1+\dots+l_s=k}\frac{\partial^k f_{n_0}(T)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}\Bigg|_{T=T_0}\frac{t_1^{l_1}\dots t_s^{l_s}}{l_1!\dots l_s!}$$

для всех $r\leqslant m$.

Нетрудно заметить, что при $r\leqslant m$

$$\frac{\partial^r K(T)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}\Bigg|_{T=T_0}=\frac{\partial^r\ln\tilde{\varphi}_r(T+T_0)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}\Bigg|_{T=O},$$

где $\tilde{\varphi}_r(T+T_0)$ уже аналитическая ф-я.

Функция $f_{n_0}(T)$ при $|T|<n^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ не имеет нулей. Поэтому можно найти такой круговой полицилиндр

$$K\{|t_1|\leqslant\rho,\ \dots,\ |t_s|\leqslant\rho\},$$

где ρ — радиус полицилиндра, чтобы в нем при $r\leqslant m$

$$\left|\sum_{k=1}^{r}\sum_{l_1+\dots+l_s=k}\frac{\partial^k f_{n_0}(T)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}\Bigg|_{T=T_0}\frac{t_1^{l_1}\dots t_s^{l_s}}{l_1!\dots l_s!}\right|\leqslant|f_{n_0}(T_0)|. \tag{12}$$

Для этого положим

$$\rho=\exp\left(-C_1-\frac{1-2\alpha}{4\alpha}\ln r\right);$$

тогда при достаточно большом C_1

$$\left|\sum_{k=1}^{r}\sum_{l_1+\dots+l_s=k}\frac{\partial^k f_{n_0}(T)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}\Bigg|_{T=T_0}\frac{t_1^{l_1}\dots t_s^{l_s}}{l_1!\dots l_s!}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{r}B\exp\left[Bk+\frac{1-2\alpha}{4\alpha}\sum_{i=1}^{s}l_i\ln l_i-C_1k-\frac{1-2\alpha}{4\alpha}k\ln k\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}B\exp(-C_2k).$$

Отсюда следует неравенство (12).

Больше того, в силу (12) следует, что функция $\varphi_r(T+T_0)$ не имеет нулей в круговом полицилиндре $K\{|t_1|\leqslant\rho,\ \dots,\ |t_s|\leqslant\rho\}$ и $\ln\tilde{\varphi}_r(T+T_0)$ является аналитической функцией в нем. По формуле Коши имеем

$$\frac{\partial^r K(T)}{\partial t_1^{l_1}\dots\partial t_s^{l_s}}\Bigg|_{T=T_0}=\frac{l_1!\dots l_s!}{(2\pi i)^s}\int\limits_{L_1}\dots\int\limits_{L_s}\frac{\ln\tilde{\varphi}_r(T+T_0)}{t_1^{l_1+1}\dots t_s^{l_s+1}}\,dT,$$

где $L_1,\ \dots,\ L_s$ — окружности с центром в начале координат радиуса ρ в соответствующих плоскостях переменных $t_1,\ \dots,\ t_s$ в $2s$-мерном пространстве и $|T_0|<n^{\frac{2\alpha-1}{2}}$.

Из (12) также следует, что в $K\{|t_1| \leqslant \rho, \ldots, |t_s| \leqslant \rho\}$

$$C_3 < |\ln \tilde{\varphi}_r(T+T_0)| < C_4.$$

Следовательно, при $|T_0| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}$

$$\left| \frac{\partial^r K(T)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_s^{l_s}} \right|_{T=T_0} \Bigg| = Bl_1! \ldots l_s! \prod_{i=1}^{s} \oint_{|t_i|=\rho} \frac{|dt_i|}{|t_i|^{l_i+1}} =$$

$$= Bl_1! \ldots l_s! \exp\left(C_1 r + \frac{1-2\alpha}{4\alpha} r \ln r\right). \tag{13}$$

Тогда остаточный член в формуле (9) будет

$$R \leqslant \sup_{|T| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \left| \sum_{l_1+\ldots+l_s=m} \frac{\partial^m K(T)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_s^{l_s}} \frac{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}{l_1! \ldots l_s!} \right| =$$

$$B \sup_{|T| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \left| \sum_{l_1+\ldots+l_s=m} l_1! \ldots l_s! \exp\left(C_1 m + \frac{1-2\alpha}{4\alpha} m \ln m\right) \frac{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}{l_1! \ldots l_s!} \right| =$$

$$= B \exp\left(-\eta_2 \frac{n^{2\alpha}}{\rho(n)} \ln \rho(n)\right). \tag{14}$$

Обозначим

$$K_3(T) = \sum_{r=3}^{m} \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \frac{\overset{r}{\psi}_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}}{l_1! \ldots l_s!} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}.$$

Тогда из (8) в силу (13) получим

$$p_n(X) = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{|T| < n^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX) - \frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j + \frac{n}{n_0} K_3(T)\right] dT +$$

$$+ B \exp\left(-\eta_2 \frac{n^{2\alpha}}{\rho(n)} \ln \rho(n)\right). \tag{15}$$

Функция $\exp \frac{n}{n_0} K_3(T)$ — аналитическая в окрестности нуля. Поэтому ее можно разложить в сходящийся ряд Тейлора, т.е.

$$\exp\left[\frac{n}{n_0} K_3(T)\right] = 1 + \sum_{r=3}^{m} \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \frac{\overset{r}{\chi}_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}}{l_1! \ldots l_s!} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s} +$$

$$+ \sum_{r=m}^{\infty} \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \frac{\overset{r}{\chi}_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}}{l_1! \ldots l_s!} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}, \tag{16}$$

где

$$\overset{r}{\chi}_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}} = \frac{\partial^r \exp \frac{n}{n_0} K_3(T)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_s^{l_s}} \Bigg|_{T=0}$$

Применяя формулу Коши для оценки коэффициентов, получим

$$\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}=\frac{l_1!\ldots l_s!}{(2\pi i)^s}\int\limits_{L_1^*}\ldots\int\limits_{L_s^*}\frac{\exp\left[\frac{n}{n_0}K_s(T)\right]}{t_1^{l_1+1}\ldots t_s^{l_s+1}}dt_1\ldots dt_s, \qquad (17)$$

где $L_1^*, \ldots, L_s^*$ — окружности с центром в нуле радиуса $\rho_1=\lambda(n)n^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ в соответствующих плоскостях переменных $t_1, \ldots, t_s$ в $2s$-мерном пространстве. Здесь функция $\lambda(n)$ должна удовлетворить следующим условиям:

1) $\lambda(n)\to\infty$ при $n\to\infty$,
2) $\lambda(n)=o(\ln n)$,
3) $\lambda(n)=o\Big(\rho(n)\Big)$.

В силу оценки (13) после простых вычислений получим

$$\exp\frac{n}{n_0}K_3(T)=B,$$

когда переменные $t_1, \ldots, t_s$ принадлежат контурам $L_1^*, \ldots, L_s^*$.

Из (17) имеем

$$\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}=l_1!\ldots l_s!\,B\prod_{i=1}^{s}\oint\limits_{|t_i|=\rho_1}\frac{|dt_i|}{|t_i|^{l_i+1}}=Bl_1!\ldots l_s!\,n^{r\frac{1-2\alpha}{2}}[\lambda(n)]^{-r}. \qquad (18)$$

Используя (18), оценим остаток в формуле (16).

Имеем при $|T|<n^{\frac{2\alpha-1}{2}}$

$$\sum_{r=m}^{\infty}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}}{l_1!\ldots l_s!}t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}=B\sum_{r=m}^{\infty}\exp\Big(Br-r\ln\lambda(n)\Big)=$$

$$=B\exp\left(-\eta_3\frac{n^{2\alpha}}{\rho(n)}\ln\lambda(n)\right). \qquad (19)$$

Из (15), (16) и (19) следует

$$p_n(X)=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{|T|<n^{\frac{2\alpha-1}{2}}}\exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)-\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}t_it_j\right]\Bigg(1+$$

$$+\sum_{r=3}^{m}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}}{l_1!\ldots l_s!}t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}\Bigg)dT+B\exp\left(-\eta_4\frac{n^{2\alpha}}{\rho(n)}\ln\lambda(n)\right). \qquad (20)$$

В дальнейшем интеграл в формуле (20) заменим интегралом, распространенным на все пространство R_s. Для этого необходимо оценить интеграл

$$I=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{|T|\geq n^{\frac{2\alpha-1}{2}}}\exp\left(-\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}t_it_j\right)\left(1+\sum_{r=3}^{m}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}}{l_1!\ldots l_s!}t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}\right)dT.$$

Но из условия б) имеем

$$\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j \geqslant \varepsilon \left(|t_1|^2 + \ldots + |t_s|^2 \right)$$

и тогда

$$\exp\left(-\frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j \right) < \exp\left(-\frac{n}{2} \varepsilon \sum_{i=1}^{s} |t_i|^2 \right). \tag{21}$$

Рассмотрим интеграл

$$I' = \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\substack{t_1 > 0, \ldots, t_s > 0 \\ |T| \geqslant n^{\frac{2\alpha-1}{2}}}} \exp\left(-\frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j \right) \left(1 + \sum_{r=3}^{m} \sum_{l_1 + \ldots + l_s = r} \frac{\chi^r_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}}{l_1! \ldots l_s!} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s} \right) dT.$$

В силу неравенства (21) имеем

$$I' < \frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\substack{t_1 > 0, \ldots, t_s > 0 \\ |T| \geqslant n^{\frac{2\alpha-1}{2}}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon n}{2} \sum_{i=1}^{s} t_i^2 \right) \left(1 + \sum_{r=3}^{m} \sum_{l_1 + \ldots + l_s = r} \frac{\chi^r_{t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s}}}{l_1! \ldots l_s!} t_1^{l_1} \ldots t_s^{l_s} \right) dT.$$

После замены переменных

$$t_i = \frac{u_i}{n^{\frac{1-2\alpha}{2}}} \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

последний интеграл принимает вид

$$\frac{n^{s\alpha}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\substack{u_1 > 0, \ldots u_s > 0 \\ |U| \geqslant 1}} \exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2} \sum_{i=1}^{s} u_i^2 \right) dU +$$

$$+ \frac{n^{s\alpha}}{(2\pi)^s} \int\limits_{\substack{u_1 > 0, \ldots, u_s > 0 \\ |U| \geqslant 1}} \exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2} \sum_{i=1}^{s} u_i^2 \right) u_1^{l_1} \ldots u_s^{l_s} \, du. \tag{22}$$

Из [3] следует, что

$$\int\limits_{\substack{u_1 > 0, \ldots, u_s > 0 \\ |U| \geqslant 1}} \exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2} \sum_{i=1}^{s} u_i^2 \right) du = \frac{1}{2^s} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2} \right) \right]^s}{\Gamma\left(\frac{s}{2} \right)} \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2} u \right) u^{\frac{s}{2} - 1} dU.$$

Но

$$\int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2} u \right) u^{\frac{s}{2} - 1} du = B \exp\left(-\eta_5 n^{2\alpha} \right),$$

и

$$\frac{n^{s\alpha}}{(2\pi)^s}\int\limits_{\substack{u_1>0,\ldots,u_s>0\\|U|\geqslant 1}}\exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2}\sum_{i=1}^{s}u_i^2\right)dU=B\exp\left(-\eta_6 n^{2\alpha}\right).$$

Второй интеграл в формуле (22) оценивается аналогично первому, т. е.

$$\frac{n^{s\alpha}}{(2\pi)^s}\int\limits_{\substack{u_1>0,\ldots,u_s>0\\|U|\geqslant 1}}\exp\left(-\frac{\varepsilon n^{2\alpha}}{2}\sum_{i=1}^{s}u_i^2\right)u_1^{l_1}\ldots u_s^{l_s}\,dU=B\exp\left(-\eta_7 n^{2\alpha}\right).$$

Поэтому

$$I=B\exp\left(-\eta_8 n^{2\alpha}\right),\tag{23}$$

где в B входит множитель 2^s.

Следовательно,

$$p_n(X)=\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{R_s}\exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)-\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}t_it_j\right]\Bigg(1+$$

$$+\sum_{r=3}^{m}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}}{l_1!\ldots l_s!}t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}\Bigg)dT+B\exp\left(-\eta_4\frac{n^{2\alpha}}{\rho(n)}\ln\lambda(n)\right).\tag{24}$$

Из [4] следует, что

$$\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{R_s}\exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)-\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}t_it_j\right]dT=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{s}{2}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}Q^{-1}(x_1,\ \ldots,\ x_s)\right]=p(X).\tag{25}$$

Исследуем

$$\sum_{r=3}^{m}\sum_{l_1+\ldots+l_s=r}\frac{\chi^{r}_{t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}}}{l_1!\ldots l_s!}\frac{n^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\int\limits_{R_s}\exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)-\right.$$

$$\left.-\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}t_it_j\right]t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}\,dT.\tag{26}$$

Интеграл

$$\int\limits_{R_s}\exp\left[-i\sqrt{n}\,(TX)-\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}t_it_j\right]t_1^{l_1}\ldots t_s^{l_s}\,dT$$

после замены переменных

$$t_i=\frac{u_i}{\sqrt{n}}\qquad(i=1,\ \ldots,\ s)$$

примет вид

$$n^{-\frac{s}{2}-\frac{r}{2}}\int\limits_{R_s}\exp\left[-i\,(UX)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}b_{ij}u_iu_j\right]u_1^{l_1}\ldots u_s^{l_s}\,dU.$$

В силу того, что квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j$ положительно определенная, и матрица, порождающая ее, симметрична, можно с помощью ортогональной трансформации $U' = KY'$ привести квадратичную форму в канонический вид. Совместно делая контраградиентную трансформацию $X' = (K)^{-1} Y'$, после несложных расчетов получим, что

$$n^{-\frac{s}{2}-\frac{r}{2}} \int\limits_{R_s} \exp\left[-i(UX) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} u_i u_j\right] u_1^{l_1} \dots u_s^{l_s}\, dU =$$

$$= n^{-\frac{s}{2}-\frac{r}{2}} \exp Brp(X) \prod_{i=1}^{s} H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right), \tag{27}$$

где χ_i $(i = 1, \dots, s)$ — характеристические числа матрицы вторых моментов. Подставляя (27) в (26) и используя оценку (18), получим

$$\sum_{r=3}^{m} n^{-r\alpha} [\lambda(n)]^{-r} \exp Br \prod_{i=1}^{s} H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right) p(X). \tag{28}$$

Из [5] имеем

$$H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right) = l_i! \sum_{k=0}^{\left[\frac{l_i}{2}\right]} \frac{(-1)^k \left(2\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right)^{l_i-2k}}{k!\,(l_i-2k)!} \qquad (i = 1, \dots, s),$$

так что

$$H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right) < l_i \max_{0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{l_i}{2}\right]} \frac{\left(2\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right)^{l_i-2k}}{k!\,(l_i-2k)!}.$$

Пусть $k = \rho_i l_i$, где

$$0 \leqslant \rho_i \leqslant \frac{1}{2} \qquad (i = 1, \dots, s).$$

Тогда

$$H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right) < l_i! \max_{\rho_i} \exp[Bl_i - (1-\rho_i) l_i \ln l_i + l_i (1-2\rho_i) \ln x_i]$$

и

$$\prod_{i=1}^{s} H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right) < l_i! \max_{\rho_1,\dots,\rho_s} \exp\left[Br + \sum_{i=1}^{s} (1-\rho_i) l_i \ln l_i + \sum_{i=1}^{s} l_i (1-2\rho_i) \ln x_i\right].$$

Но $x_i \in \left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right]$, и тогда

$$\prod_{i=1}^{s} H_{l_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\chi_i}}\right) < \max_{\rho_1,\dots,\rho_s} \exp\left[\sum_{i=1}^{s} \rho_i l_i \ln l_i + \alpha \sum_{i=1}^{s} l_i (1-2\rho_i) \ln n - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{s} l_i (1-2\rho_i) \ln \rho(n)\right].$$

Подставляя правую часть полученного неравенства в (28), получим

$$\sum_{r=3}^{m} \max_{\rho_1,\dots,\rho_s} \exp\left[Br + \sum_{i=1} \rho_i l_i \ln l_i + \alpha \sum_{i=1} l_i (1-2\rho_i) \ln n\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{i=1}^{s} l_i(1-2\rho_i)\ln\rho(n) - r\alpha\ln n - r\ln\lambda(n)\right] =$$

$$= \sum_{r=3}^{m} \max_{\rho_1,\ldots,\rho_s} \exp\left[Br + \sum_{i=1}^{s}\rho_i l_i(\ln l_i - 2\alpha\ln n) - \sum_{i=1}^{s} l_i(1-2\rho_i)\ln\rho(n) - r\ln\lambda(n)\right].$$

Но

$$\sum_{r=3}^{C_s} \max_{\rho_1,\ldots,\rho_s} \exp\left[Br + \sum_{i=1}^{s}\rho_i l_i(\ln l_i - 2\alpha\ln n) - r\ln\rho(n) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i=1}^{s} l_i\rho_i\ln\rho(n) - r\ln\lambda(n)\right] = B\rho^{-3}(n),$$

и

$$\sum_{r=C_s}^{m} \max_{\rho_1,\ldots,\rho_s} \exp\left[Br + \sum_{i=1}^{s}\rho_i l_i(\ln l_i - 2\alpha\ln n) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{s} l_i(1-2\rho_i)\ln\rho(n) - r\ln\lambda(n)\right] = B\rho^{-e_s C_s}(n).$$

Из (24), (25), (27), (28) и последнего равенства следует первое утверждение теоремы 1.

Покажем, что при соблюдении условий а) и б), если найдется $C_0 > 0$ такое, что при $\alpha < \frac{1}{6}$

$$E\exp\left[C_0\sum_{i=1}^{s}\left|\xi_i^{(k)}\right|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right] \text{ бесконечен,}$$

то

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} \to \infty \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

когда

$$|X| = n^{\alpha}\rho(n).$$

Рассмотрим суммы

$$\zeta^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n_0}\xi^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=n_0+1}^{n}\xi^{(i)} = \zeta^{(n_0)} + \hat{\zeta}^{(n)}.$$

Тогда

$$p_n(X) = \int_{R_s} p_{n_0}(X-Y)\hat{p}_n(Y)\,dY =$$

$$= \int_{|Y|\leqslant L} p_{n_0}(X-Y)\hat{p}_n(Y)\,dY + \int_{|Y|>L} p_{n_0}(X-Y)\hat{p}_n(Y)\,dY, \tag{29}$$

где L константа и $\hat{p}_n(X)$ — плотность распределения случайной величины $\hat{\zeta}^{(n)}$.

Обозначим

$$\overset{*}{\zeta}{}^{(n_0)} = \sum_{i=1}^{n_0}\xi^{(i)},$$

тогда

$$p_{n_0}(X) = \overset{*}{p}_{n_0}(X\sqrt{n})\cdot n^{\frac{s}{2}},$$

где $\overset{*}{p}_{n_0}(X)$ — плотность распределения случайной величины $\overset{*}{\zeta}^{(n_0)}$. Подставляя это в (29), получим

$$p_n(X) = n^{\frac{s}{2}} \int\limits_{|Y| \leqslant L} \overset{*}{p}_{n_0}[(X-Y)] \sqrt{n}]\, \hat{p}_n(Y)\, dY +$$

$$+ \int\limits_{|Y|>L} p_{n_0}(X-Y) \cdot \hat{p}_n(Y)\, dY.$$

Имеем

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} > \frac{\min\limits_{|Y| \leqslant L} \overset{*}{p}_{n_0}[(X-Y)\sqrt{n}] \cdot n^{\frac{s}{2}} \int\limits_{|Y| \leqslant L} \hat{p}_n(Y)\, dY}{p(X)}.$$

Но из (3) следует, что при достаточно большом $|X|$

$$\overset{*}{p}_{n_0}(X) > \frac{\exp\left[-C_0 \sum\limits_{i=1}^{s} |x_i|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right]}{x_1^{\lambda_1} \ldots x_s^{\lambda_s}}, \tag{30}$$

где

$$\lambda_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

В силу (30) имеем

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} > \frac{n^{\frac{s}{2}} \exp\left[-C_0 \sum\limits_{i=1}^{s} (x_i - \theta L)\sqrt{n}\right]^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}}{(x_1^{\lambda_1} \ldots x_s^{\lambda_s})^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}} \cdot (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\Delta} \sum\limits_{i,j=1}^{s} \Lambda_{ij} x_i x_j\right]}. \tag{31}$$

Воспользовавшись (21), при $|X| = n^{\alpha} \rho(n)$ получаем, что (31) больше

$$\frac{n^{\frac{s}{2}} \exp\left[-C_0 n^{\alpha+\frac{1}{2}} \rho(n)\right]^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}}{[n^{\alpha} \rho(n)]^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}\lambda} \exp\left[-\frac{1}{2\Delta} \varepsilon n^{2\alpha} \rho^2(n)\right]} =$$

$$= \frac{n^{\frac{s}{2}}}{[n^{\alpha} \rho(n)]^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}\lambda}} \exp\left(\frac{1}{2\Delta} \varepsilon n^{2\alpha} \rho^2(n)\right) \left[1 - \frac{C_0 [\rho(n)]^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}}{(2\Delta)^{-1} \varepsilon \rho^2(n)}\right],$$

где

$$\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_s.$$

А последнее выражение стремится к бесконечности, когда $n \to \infty$, и [3] доказано.

Исследуем случай, когда $\frac{1}{6} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. Для этого рассмотрим ряд чисел

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{1}{2} \frac{k+1}{k+3}, \ldots$$

Ясно что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} \frac{k+1}{k+3} = \frac{1}{2}.$$

Если $\frac{1}{6} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, то конечно найдется такое k, что

$$\frac{1}{2} \frac{k+1}{k+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \frac{k+2}{k+4}. \tag{32}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия а), б) и найдется* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что*

$$E \exp\left[\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{s} \left|\xi_i^{(k)}\right|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right] < \infty,$$

где α *удовлетворяет* (32), *и, кроме того, все моменты* $\xi^{(k)}$ *вплоть до* $(k+3)$*-его совпадают с нормальными, то для последовательности* (1) *имеет место р.л.н.с. в* s*-мерном кубе с гранью*

$$[-n^{\alpha}\rho^{-1}(n), \; n^{\alpha}\rho^{-1}(n)].$$

Если же найдется $C_0 > 0$ *такое, что при выполнении* (32)

$$E \exp\left[C_0 \sum_{i=1}^{s} \left|\xi_i^{(k)}\right|^{\frac{4\alpha}{1+2\alpha}}\right]$$

бесконечен, то

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

когда

$$|X| = n^{\alpha}\rho(n).$$

Доказательство. Основная схема рассуждения остается такой, как и при доказательстве теоремы первой в случае $\alpha < \frac{1}{6}$. Поэтому укажем только некоторые места, где она существенно отличается от предыдущей.

1. Если первые $k+3$ моменты последовательности (1) совпадают с нормальными, то следует, что семи-инварианты последовательности (1) от 3-его вплоть до $k+3$-его равны нулю. Но из (9) видим, что $\psi^{r}_{t_1^{l_1} \dots t_s^{l_s}}$ $(r \leqslant m)$, умноженные на соответствующие степени $i = \sqrt{-1}$ становятся семи-инвариантами случайной величины $\zeta^{(n_0)}$, а так как семи-инварианты суммы случайных величин равняются сумме семи-инвариантов слагаемых, то и $\psi^{r}_{t_1^{l_1} \dots t_s^{l_s}} = 0$, когда $3 \leqslant r \leqslant k+3$.

2. Из вышесказанного следует, что (9) примет вид

$$K(T) = -\frac{n_0}{2} \sum_{i,j=1}^{s} b_{ij} t_i t_j + \sum_{r=k+4}^{m} \sum_{l_1+\dots+l_s=r} \frac{\psi^{r}_{t_1^{l_1} \dots t_s^{l_s}}}{l_1! \dots l_s!} t_1^{l_1} \dots t_s^{l_s} + R.$$

3. Заметим, что

$$\frac{1}{k+4} < \frac{1-2\alpha}{2} \leqslant \frac{1}{k+3}$$

и

$$\chi^{k+4}_{t_1^{l_1} \dots t_s^{l_s}} = \frac{n}{n_0} \psi^{k+4}_{t_1^{l_1} \dots t_s^{l_s}}.$$

Аналогичные рассуждения как в доказательстве теоремы 1 и дают доказательство теоремы 2.

Выражаю искреннюю благодарность В. А. Статулявичюсу за помощь, оказанную при выполнении работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
5. IV. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник, Новые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, Доклады АН СССР, 133, 6 1960, 1291 — 1293.
2. S. Bochner and K. Chandrasekharan, Fourier transforms, London, 1953, 66.
3. Г. М. Фихтенгольц; Курс диф. и интег. исчисл., III, 1960, 404.
4. Г. Крамер, Мат. Метод. статистики, 1948, 137.
5. H. Bateman, Higher transcendentical functions, vol. II, 1953, 153.

NORMALINIO KONVERGAVIMO ZONOS DAUGIAMAČIU ATVEJU

L. VILKAUSKAS

(Reziumė)

Straipsnyje apibendrinta J. V. Liniko [1] lokalinė teorema daugiamačiu atveju. Nagrinėjama nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių s-mačių vektorių (1) seka. Sakysime, kad (1) sekai galioja lokalinis normalinis tolygus konvergavimas (l. n. t. k.) s-mačiame kube su briauna $[-\psi(n), \psi(n)]$, jeigu

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

tolygiai atžvilgiu $X(x_1, \ldots, x_s)$, kai $x_i \in [-\psi(n), \psi(n)]$, kur $p_n(X)$ — normuotas n pirmųjų narių (1) sekos tikimybinis tankis, $p(X)$ — s-matis Gauso tankis.

Darbe įrodyta sekanti teorema:

Jeigu patenkintos a) ir b) sąlygos, ir, kai $\alpha < \frac{1}{6}$, galioja (2), tada (1) sekai galioja (l. n. t. k.) s-mačiame kube su briauna $[-n^{\alpha}\rho^{-1}(n), n^{\alpha}\rho^{-1}(n)]$, kur $\rho(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Atveju $\frac{1}{6} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, t. y.

$$\frac{1}{2}\,\frac{k+1}{k+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\,\frac{k+2}{k+4}$$

dar reikalaujama, kad sutaptų $k+3$ (1) sekos pirmieji momentai su normaliniais.

ZONES OF NORMAL CONVERGENCE IN THE MULTI — DIMENSIONAL CASE

L. VILKAUSKAS

(Summary)

Some results of Yu. V. Linnik [1] for multi — dimensional case are generalized in this paper. We consider the sequence (1) of independent s-dimensional random vectors that are identically distributed, and for which concept of uniform local normal convergence (u. l. n. c.) is introduced in a sense

$$\frac{p_n(X)}{p(X)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

where $p_n(X)$ is probability density of normalized sums of first n terms of sequence (1), $p(X)$ — Gaussian density. The following theorem is proved. If conditions *a*), *б*) are satisfied and with $\alpha < \frac{1}{6}$ relation (2) holds, then for sequence (1) takes place u. l. n. c. in the s-dimensional cube with a edge $[-n^{\alpha}\rho^{-1}(n), n^{\alpha}\rho^{-1}(n)]$ where $\rho(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

In the case $\frac{1}{6} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, i.e.

$$\frac{1}{2}\frac{k+1}{k+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\frac{k+2}{k+4}$$

coincidence of first $k+3$ moments of the sequence (1) with the normal moments is required in addition.