I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

К. ГРИНЦЕВИЧЮС

В настоящей работе рассматривается фундаментальный объект [1] третьего порядка комплекса прямых в многомерном проективном пространстве

§ 1. Фундаментальный объект третьего порядка

1. Комплекс прямых в репере первого порядка $\{A_i\}$ определяется внешними дифференциальными уравнениями [2]:

$$\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0,$$

$$2\Theta_3^4 \equiv \omega_3^4 - \omega_2^1 = h_{3333}\omega_1^3 + 2h_{3334}\omega_1^4 + \left(h - h_{3344}\right)\omega_2^4 + 2h_{333K}\omega_1^K + \left(h_K^1 - 2h_{334K}\right)\omega_2^K,$$

$$4\Theta_4^4 = -4\Theta_3^3 \equiv \omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = 2h_{3334}\omega_1^3 + 2\left(2h_{3344} + h\right)\omega_1^4 - 2h_{3444}\omega_2^4 +$$
$$+ \left(4h_{334K} + h_K^1\right)\omega_1^K - \left(4h_{344K} + h_K^2\right)\omega_2^K, \tag{1}$$

$$2\Theta_4^3 \equiv \omega_4^3 - \omega_1^2 = \left(h - h_{3344}\right)\omega_1^3 - 2h_{3444}\omega_1^4 + h_{4444}\omega_2^4 + \left(h_K^2 - 2h_{344K}\right)\omega_1^K + 2h_{444K}\omega_2^K,$$

$$\omega_K^4 = 2h_{333K}\omega_1^3 + \left(4h_{334K} + h_K^1\right)\omega_1^4 + \left(h_K^2 - 2h_{344K}\right)\omega_2^4 + 6h_{33KI}\omega_1 - 6\left(h_{34KI} + g_{KI}\right)\omega_2^I,$$

$$\omega_K^3 = \left(h_K^1 - 2h_{334K}\right)\omega_1^3 - \left(4h_{344K} + h_K^2\right)\omega_1^4 + 2h_{444K}\omega_2^4 - 6\left(h_{34KI} - g_{KI}\right)\omega_1^I + 6h_{44KI}\omega_2^I;$$

$$\left[\Delta h_{3333}\omega_1^3\right] + 2\left[\Delta h_{3334}\omega_1^4\right] + \left[\Delta h - \Delta h_{3344}, \omega_2^4\right] +$$
$$+ 2\left[\Delta h_{333K}\omega_1^K\right] + \left[\Delta h_K^1 - 2\Delta h_{334K}, \omega_2^K\right] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[\Delta h_K^1 - 2\Delta h_{334K}, \omega_1^3\right] - \left[4\Delta h_{344K} + \Delta h_K^2, \omega_1^4\right] + 2\left[\Delta h_{444L}, \omega_2^4\right] -$$
$$- 6\left[\Delta h_{34KI} - \Delta g_{KI}, \omega_1^I\right] + 6\left[\Delta h_{44KI}\omega_2^I\right] = 0,$$

где

$$i, j, k = 1, 2, \ldots, n; \qquad p, q, r = 1, 2;$$
$$I, J, K, L = 5, 6, \ldots, n;$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \iota,\ \xi,\ \eta = 3,\ 4;$$
$$\in^{p\alpha} = \in^{\alpha p} = \in_{p\alpha} = \in_{\alpha p} = 5 - p - \alpha;$$
$$\in^{\alpha\beta} = \in_{\alpha\beta} = \alpha - \beta;$$
$$dA_i = \omega_i^j A_j,\quad D\omega_i^j = \left[\omega_i^k \omega_k^j\right];$$
$$\Delta h_{\alpha\beta\gamma\delta} = dh_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4h_{\varepsilon(\beta\gamma\delta}\vartheta^{\varepsilon}_{\alpha)} - 4\omega^K_{(\alpha}h_{\beta\gamma\delta)K} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(3\omega^p_p + \omega^{\varepsilon}_{\varepsilon}\right), \tag{3}$$
$$\vartheta^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\omega^{\beta}_{\alpha} + \omega^{5-\beta}_{5-\alpha}\right);$$
$$\Delta h = dh + \frac{1}{2}h\left(\omega^p_p - \omega^{\alpha}_{\alpha}\right) - h^{5-\alpha}_K\omega^K_{\alpha} - \omega^1_4 - \omega^2_3; \tag{4}$$
$$\Delta h_{\alpha\beta\gamma K} = dh_{\alpha\beta\gamma K} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}_K - h_{\alpha\beta\gamma I}\omega^I_K - 3\omega^I_{(\alpha}h_{\beta\gamma)IK} - 3\vartheta^{\delta}_{(\alpha}h_{\beta\gamma)\delta K} +$$
$$+ \frac{1}{4}h_{\alpha\beta\gamma K}\left(5\omega^p_p + 3\omega^{\delta}_{\delta}\right) + \Theta^{\delta}_{(\alpha}h_{\beta\gamma)\delta K} + \frac{1}{2}\in_{p(\alpha}\Theta^{\delta}_{\beta}\in_{\gamma)\delta}h^p_K; \tag{5}$$
$$\Delta h^p_K = dh^p_K - h^p_J\omega^J_K - \omega^p_K - h\omega^{5-p}_K + 2\in^{p\zeta}\in^{\eta\iota}h_{\zeta\mu JK}\omega^J_{\iota} + 6\in^{p\zeta}g_{JK}\omega^J_{\zeta} +$$
$$+ \frac{1}{4}h^p_K\left(\omega^q_q - \omega^{\alpha}_{\alpha}\right) + h^{5-\alpha}_K\left(\vartheta^{5-p}_{\alpha} + \frac{1}{3}\Theta^{5-p}_{\alpha}\right) + \frac{4}{3}\in^{p\beta}\in^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta\gamma K}\Theta^{\alpha}_{\delta}; \tag{6}$$
$$\Delta h_{\alpha\beta IK} = dh_{\alpha\beta IK} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta IK}\left(3\omega^p_p + \omega^{\gamma}_{\gamma}\right) - 2h_{\alpha\beta L(K}\omega^L_{I)} -$$
$$- 2\omega^{5-\gamma}_{5-(\alpha}h_{\beta)\gamma IK} - \frac{2}{3}h_{\alpha\beta\gamma(I}\omega^{\gamma}_{K)} + \frac{1}{6}\in_{p(\alpha}\in_{\beta)\gamma}h^p_{(I}\omega^{\gamma}_{K)}; \tag{7}$$
$$\Delta g_{IK} = dg_{IK} + \frac{1}{2}g_{IK}\left(\omega^p_p + \omega^{\alpha}_{\alpha}\right) - 2g_{L[K}\omega^L_{I]} - \frac{1}{4}\in_{p\alpha}h^p_{[I}\omega^{\alpha}_{K]}. \tag{8}$$

Коэффициенты системы (1) образуют фундаментальный объект вто́рого порядка [1].

2. Развернув квадратичные уравнения (2) по лемме Картана, получаем:

$$\Delta h_{\alpha\beta\gamma\delta} = \in^{p\iota}f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}\omega^{\varepsilon}_p - \frac{6}{5}\omega^{\varepsilon}_{5-(\alpha}f_{\beta\gamma}\in_{\varepsilon)\delta} + \in^{p\iota}f_{\alpha\beta\gamma\delta\iota K}\omega^K_p + \omega^K_{5-(\alpha}f_{\beta\gamma\delta)K}, \tag{9}$$
$$\Delta h = \in^{p\alpha}f_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_p + \in^{p\alpha}f_{\alpha K}\omega^K_p, \tag{10}$$
$$\Delta h_{\alpha\beta\gamma K} = \frac{1}{2}\in^{p\delta}f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K}\omega^{\varepsilon}_p - \frac{1}{4}\omega^{\varepsilon}_{5-(\alpha}f_{\beta\gamma)\varepsilon K} + \frac{1}{2}\omega^{\delta}_{5-(\alpha}\in_{|\delta|\beta}f_{\gamma)K} +$$
$$+ \frac{1}{2}\in^{p\delta}f_{\alpha\beta\gamma\delta KJ}\omega^J_p + \frac{1}{2}\omega^J_{5-(\alpha}f_{\beta\gamma)KJ} - 3\omega^J_{5-(\alpha}g_{\beta\gamma)KJ}, \tag{11}$$
$$3\in_{p\alpha}\Delta h^p_K = -2f_{\beta K}\omega^{\beta}_{5-\alpha} + \frac{5}{2}\in^{p\gamma}f_{\alpha\beta\gamma K}\omega^{\beta}_p +$$
$$+ 4\in^{p\gamma}f_{\alpha\gamma KJ}\omega^J_p + 12\in^{p\gamma}g_{\alpha\gamma KJ}\omega^J_p - 3f_{JK}\omega^J_{5-\alpha}, \tag{12}$$
$$6\Delta h_{\alpha\beta IK} = \in^{p\delta}f_{\alpha\beta\gamma\delta IK}\omega^{\gamma}_p - 2\omega^{\gamma}_{5-(\alpha}f_{\beta)\gamma IK} + \in^{p\gamma}f_{\alpha\beta\gamma IKL}\omega^L_p -$$
$$- \frac{1}{2}f_{IK}\omega^{\gamma}_{5-(\alpha}\in_{\beta)\gamma} + 8\omega^L_{5-(\alpha}G_{\beta)L(IK)}, \tag{13}$$
$$\Delta g_{IK} = \in^{p\alpha}g_{\alpha\beta IK}\omega^{\beta}_p + \in^{p\alpha}G_{\alpha IKL}\omega^L_p. \tag{14}$$

Коэффициенты

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota},\ f_{\beta\alpha},\ f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon I},\ f_{\alpha\beta\gamma I},\ f_{\alpha I},\ f_{\alpha\beta\gamma\delta IK},\ f_{\alpha\beta IK},\ f_{IK}\ \text{и}\ f_{\alpha\beta\gamma IKJ}$$

являются симметрическими относительно всех индексов, а коэффициенты $g_{\alpha\beta IK}$ и $G_{\alpha IKJ}$ связаны соотношениями:

$$g_{\alpha\beta IK}=g_{\beta\alpha IK}=-g_{\alpha\beta KI},$$
$$G_{\alpha IKJ}=-G_{\alpha KIJ},$$

Внешнее дифференцирование уравнений (9) — (14) дает:

$$\epsilon^{\rho\iota}\left[\Delta f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}\omega^{\varepsilon}_{\rho}\right]+\frac{6}{5}\left[\omega^{\varepsilon}_{5-(\alpha}\Delta f_{\beta\gamma}\epsilon_{\delta)\varepsilon}\right]+\epsilon^{\rho\epsilon}\left[\Delta f_{\alpha\beta\gamma\delta\iota K}\omega^{K}_{\rho}\right]-\left[\omega^{K}_{5-(\alpha}\Delta f_{\beta\gamma\delta)K}\right]=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\tag{15}$$

$$\epsilon^{\rho\alpha}\left[\Delta g_{\alpha\beta IK}\omega^{\beta}_{\rho}\right]+\epsilon^{\rho\alpha}\left[\Delta G_{\alpha IKL}\,\omega^{L}_{\rho}\right]=0,$$

где

$$\Delta f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}=df_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}-6f_{\varsigma(\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}\omega^{\varsigma}_{\alpha)}+f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+2\omega^{\varsigma}_{\varsigma}\right)-3\omega^{K}_{(\alpha}f_{\beta\gamma\delta\varepsilon\iota)K}+$$
$$+3\epsilon^{\varsigma\eta}h_{(\alpha\beta\gamma\delta}h_{\varepsilon\iota)\varsigma K}\omega^{K}_{\eta}+3\epsilon_{\rho(\alpha}h_{\beta\gamma\delta\varepsilon}\omega^{\rho}_{\iota)}-\frac{3}{2}h^{\rho}_{K}\epsilon_{\rho(\alpha}h_{\beta\gamma\delta\varepsilon}\omega^{K}_{\iota)}+(\ldots),\tag{16}$$

$$\Delta f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K}=df_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K}-5\omega^{\varsigma}_{(\alpha}f_{\beta\gamma\delta\varepsilon)\varsigma K}-f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon J}\omega^{J}_{K}+f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+2\omega^{\varsigma}_{\varsigma}\right)-$$
$$-2\omega^{J}_{(\alpha}f_{\beta\gamma\delta\varepsilon)KJ}+\frac{3}{2}\epsilon_{\rho(\alpha}h_{\beta\gamma\delta\varepsilon)}\omega^{\rho}_{K}+4\epsilon_{\rho(\alpha}\omega^{\rho}_{\beta}h_{\gamma\delta\varepsilon)K}+4\epsilon^{\varsigma\eta}h_{K(\alpha\beta\gamma}h_{\delta\varepsilon);J}\omega^{J}_{\eta}-$$
$$-3g_{JK}h_{(\alpha\beta\gamma\delta}\omega^{J}_{\varepsilon)}+3\epsilon^{\varsigma\eta}h_{(\alpha\beta\gamma\delta}h_{\varepsilon)\varsigma JK}\omega^{J}_{\eta}-2h^{\rho}_{J}\epsilon_{\rho(\alpha}\omega^{J}_{\beta}h_{\gamma\delta\varepsilon)K}+(\ldots),\tag{17}$$

$$\Delta f_{\alpha\beta\gamma\delta IK}=df_{\alpha\beta\gamma\delta IK}+f_{\alpha\beta\gamma\delta IK}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+2\omega^{\varsigma}_{\varsigma}\right)-4\omega^{\varsigma}_{(\delta}f_{\alpha\beta\gamma)\varsigma IK}-2f_{\alpha\beta\gamma\delta J(K}\omega^{J}_{I)}-$$
$$-\omega^{J}_{(\delta}f_{\alpha\beta\gamma)IKJ}+6\epsilon_{\rho(\alpha}\omega^{\rho}_{\beta}h_{\gamma\delta)IK}+6\epsilon_{\rho(\alpha}h_{\beta\gamma\delta)(I}\omega^{\rho}_{K)}+6\epsilon^{\varepsilon\iota}h_{K(\alpha\beta\gamma}h_{\delta)\varepsilon IJ}\omega^{J}_{\iota}+$$
$$+6\epsilon^{\varepsilon\iota}h_{I(\alpha\beta\gamma}h_{\delta)\varepsilon KJ}\omega^{J}_{\iota}+12\omega^{J}_{(\alpha}h_{\beta\gamma\delta)(I}g_{K)J}+6\epsilon^{\varepsilon\iota}h_{J\varepsilon(\alpha\beta}h_{\gamma\delta)IK}\omega^{J}_{\iota}-$$
$$-3\epsilon_{\rho(\alpha}\omega^{J}_{\beta}h_{\gamma\delta)IK}h^{\rho}_{J}+(\ldots),\tag{18}$$

$$\Delta f_{\alpha\beta\gamma IKL}=df_{\alpha\beta\gamma IKL}-3\omega^{\varsigma}_{(\gamma}f_{\alpha\beta)\varsigma IKL}-3f_{\alpha\beta\gamma J(KL}\omega^{J}_{I)}+f_{\alpha\beta\gamma IKL}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+2\omega^{\varsigma}_{\varsigma}\right)+$$
$$+54\omega^{J}_{(\alpha}h_{\alpha\gamma)(LI}g_{K)J}+27\epsilon_{\rho(\alpha}h_{\beta\gamma)(IK}\omega^{\rho}_{L)}+54\epsilon^{\varsigma\eta}h_{\varsigma(\alpha|J(I}h_{KL)|\beta\gamma)}\omega^{J}_{\eta}+(\ldots),\tag{19}$$

$$\Delta G_{\alpha IKL}=dG_{\alpha IKL}-G_{\beta IKL}\omega^{\beta}_{\alpha}-G_{\alpha IKJ}\omega^{J}_{L}-G_{\alpha IJL}\,\omega^{J}_{K}-G_{\alpha JKL}\omega^{J}_{I}+$$
$$+G_{\alpha IKL}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+\omega^{\beta}_{\beta}\right)+\epsilon_{\rho\alpha}\left(\frac{1}{2}g_{IK}\omega^{\rho}_{L}+2g_{L[K}\omega^{\rho}_{I]}\right)-$$
$$-3\epsilon^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta L[I}g_{K]J}\omega^{J}_{\gamma}-3\epsilon^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta J[I}g_{K]L}\omega^{J}_{\gamma}-3g_{L[I}g_{K]J}\omega^{J}_{\alpha}+$$
$$+3\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\delta\varepsilon}h_{\varepsilon\beta J[I}h_{K]L\alpha\delta}\omega^{J}_{\gamma}+3\epsilon^{\beta\gamma}g_{IK}h_{\alpha\beta JL}\omega^{J}_{\gamma}+3g_{IK}g_{LJ}\omega^{J}_{\alpha}+(\ldots),\tag{20}$$

$$\Delta g_{\alpha\beta IK}=dg_{\alpha\beta IK}-2\omega^{\gamma}_{(\beta}g_{\alpha)\gamma IK}-\omega^{L}_{(\alpha}G_{\beta)IKL}-2g_{\alpha\beta L[K}\omega^{L}_{I]}+$$
$$+g_{\alpha\beta IK}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+\omega^{\gamma}_{\gamma}\right)+\epsilon^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta\gamma[K}g_{I]L}\omega^{L}_{\delta}+\epsilon^{\gamma\delta}\epsilon^{\varepsilon\iota}h_{\alpha\beta\varepsilon[K}h_{I]L\iota\gamma}\omega^{L}_{\delta}+$$
$$+\frac{1}{4}\epsilon_{\rho(\alpha}\epsilon_{\beta)q}h^{\rho}_{[I}\omega^{q}_{K]}-\frac{1}{2}\epsilon^{\gamma\delta}\epsilon_{\rho(\alpha}h_{\beta)\gamma L[I}h^{\rho}_{K]}\omega^{L}_{\delta}+$$
$$+\frac{1}{2}h^{\rho}_{[I}g_{K]L}\epsilon_{\rho(\alpha}\omega^{L}_{\beta)}+\epsilon^{\gamma\delta}g_{IK}h_{\alpha\beta\gamma L}\omega^{L}_{\delta}-\frac{1}{2}\,{}_{IK}h^{\rho}_{L}\epsilon_{\rho(\alpha}\omega^{L}_{\beta)}+(\ldots),\tag{21}$$

$$\Delta f_{\alpha\beta\gamma..}=df_{\alpha\beta\gamma K}-f_{\alpha\beta\gamma I}\omega^{I}_{K}-3\omega^{\delta}_{(\alpha}f_{\beta\gamma)\delta K}+f_{\alpha\beta\gamma K}\left(\omega^{\rho}_{\rho}+\omega^{\delta}_{\delta}\right)+\frac{2}{5}\epsilon^{\delta\varepsilon}f_{\alpha\beta\gamma\delta IK}\omega^{I}_{\varepsilon}-$$
$$-2\omega^{I}_{(\alpha}f_{\beta\gamma)IK}-\frac{4}{5}h_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega^{5-\delta}_{K}+12\omega^{I}_{(\alpha}g_{\beta\gamma)IK}+\frac{12}{5}\omega^{5-\delta}_{(\alpha}h_{\alpha\gamma)\delta K}+$$

$$+\frac{4}{5}h_{\alpha\beta\gamma K}\left(\omega_3^2+\omega_4^1\right)-\frac{12}{5}\in^{\varsigma\eta}h_{\alpha\beta\gamma\varsigma}g_{IK}\omega_\eta^I+\frac{12}{5}\in^{\delta\varepsilon}\in^{\varsigma\eta}h_{\alpha\beta\gamma\delta}h_{\varepsilon\varsigma IK}\omega_\eta^I-$$
$$-\frac{8}{5}h_{K\delta(\alpha\beta}h_{\gamma)\varepsilon\varsigma I}\in^{\varsigma\eta}\in^{\delta\varepsilon}\omega_\eta^I+2\in^{\delta\varepsilon}\in_{p(\alpha}h_{\beta\gamma)\delta I}h_K^p\omega_\varepsilon^I-\in_{p(\alpha}\omega_\beta^I\in_{\gamma)q}h_K^p h_I^q+$$
$$+\frac{4}{5}h_I^{5-\delta}h_{K\delta(\alpha\beta}\omega_{\gamma)}^I-\frac{2}{5}h_{\alpha\beta\gamma K}h_I^{5-\delta}\omega_\delta^I+(\ldots), \tag{22}$$

$$\Delta f_{\alpha\beta IK}=df_{\alpha\beta IK}-2\omega_{(\beta}^{\varsigma}f_{\alpha)\varsigma IK}-2f_{\alpha\beta J(I}\omega_{K)}^J+f_{\alpha\beta IK}\left(\omega_p^p+\omega_\varsigma^\varsigma\right)+\frac{1}{4}\in^{\gamma\delta}f_{\alpha\beta\gamma IKJ}\omega_\delta^J+$$
$$+4\omega_{(\alpha}^J G_{\beta)J(IK)}+3\in^{\varsigma\eta}h_{\alpha\beta\varsigma(I}g_{K)J}\omega_\eta^J+3\in^{\varepsilon\iota}\in^{\varsigma\eta}h_{J\varepsilon\varsigma(\alpha}h_{\beta)\eta IK}\omega_\iota^J+$$
$$+\frac{3}{4}\omega_{(\alpha}^J h_{\beta)\varsigma IK}h_J^{5-\varsigma}+\frac{3}{4}\in^{\varsigma\eta}\in_{p(\alpha}h_{\beta)\varsigma IK}h_J^p\omega_\eta^J+3\in^{\varepsilon\iota}\in_{p(\alpha}h_{\beta)\varepsilon J(I}h_{K)}^p\omega_\iota^J+$$
$$+3h_{(I}^p g_{K)J}\in_{p(\alpha}\omega_{\beta)}^J+(\ldots), \tag{23}$$

$$\Delta f_{IK}=df_{IK}+f_{IK}\omega_p^p-2f_{J(I}\omega_{K)}^J-3g_{J(I}h_{K)}^{5-\alpha}\omega_\alpha^J+3\in^{\varsigma\eta}h_{\alpha\varsigma J(I}h_{K)}^{5-\alpha}\omega_\eta^J+$$
$$+4\in^{\varsigma\eta}G_{\varsigma J(IK)}\omega_\eta^J+\in^{\zeta\eta}h_J^{5-\alpha}h_{\alpha\varsigma IK}\omega_\eta^J+4\in^{\alpha\beta}h_{\alpha\gamma IK}\omega_\beta^{5-\gamma}-$$
$$-2\in^{\alpha\beta}\in^{\gamma\delta}\in^{\varepsilon\iota}h_{\alpha\gamma IK}h_{\beta\delta\varepsilon J}\omega_\iota^J+(\ldots), \tag{24}$$

$$\Delta f_{\alpha K}=df_{\alpha K}+f_{\alpha K}\omega_p^p-f_{\beta K}\omega_\alpha^\beta-f_{\alpha I}\omega_K^I-f_{KJ}\omega_{\cdot\alpha}^I+\frac{4}{3}\in^{\beta\gamma}f_{\alpha\beta IK}\omega_\gamma^I+4\in^{\beta\gamma}g_{\alpha\beta IK}\omega_\gamma^I-$$
$$-\frac{4}{3}\in^{\delta\varepsilon}\in^{\iota\varsigma}\in^{\beta\gamma}h_{\alpha\delta\iota K}h_{\varepsilon\varsigma\beta I}\omega_\gamma^I+\frac{1}{2}\in_{p\alpha}h\omega_K^p+\in_{p\alpha}h_K^{5-\beta}\omega_\beta^p+\frac{2}{3}\in^{\beta\gamma}h_K^{5-\varepsilon}h_{\alpha\varepsilon\beta I}\omega_\gamma^I+$$
$$+\frac{1}{3}h_K^{[1}h_I^{2]}\omega_\alpha^I+\frac{2}{3}\in^{\beta\gamma}h_I^{5-\varepsilon}h_{\alpha\varepsilon\beta K}\omega_\gamma^I-\frac{1}{6}\in_{p\alpha}h_K^{5-\beta}h_I^p\omega_\beta^I+3\in^{\beta\gamma}hh_{\alpha\beta KI}\omega_\gamma^I+$$
$$+2\in^{\gamma\delta}h_{\alpha\gamma\beta K}\omega_\delta^{5-\beta}-3hg_{IK}\omega_\alpha^I-\frac{1}{2}\in_{p\alpha}h_K^{5-\beta}\omega_\beta^p+h_K^{[1}\omega_\alpha^{2]}+(\ldots), \tag{25}$$

$$\Delta f_{\alpha\beta}=df_{\alpha\beta}+f_{\alpha\beta}\omega_p^p-2f_{\gamma(\alpha}\omega_{\beta)}^\gamma-\frac{5}{3}\omega_{(\alpha}^K f_{\beta)K}+\frac{5}{6}\in^{\gamma\delta}f_{\alpha\beta\gamma K}\omega_\delta^K+$$
$$+\in^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\omega_\delta^{5-\varepsilon}-\frac{2}{3}\in^{\gamma\varepsilon}\in^{\delta\iota}\in^{\varsigma\delta}h_{\alpha\beta\gamma\delta}h_{\varepsilon\iota\varsigma K}\omega_\eta^K+\frac{1}{3}\in^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta\varsigma\varepsilon}h_K^{5-\varepsilon}\omega_\delta^K+$$
$$+\frac{5}{3}\in^{\gamma\delta}hh_{\alpha\beta\gamma K}\omega_\delta^K-\frac{5}{6}h_K^p h\in_{p(\alpha}\omega_{\beta)}^K+(\ldots). \tag{26}$$

В уравнениях (16) — (26) скобками $(\ldots)$ обозначены выражения независящие от дифференциалов вторичных параметров.

3. Коэффициенты уравнений (1), (9) — (14) образуют фундаментальный объект третьего порядка комплекса прямых.

Величины

$$g_{\alpha IKL}=G_{\alpha[IKL]} \tag{27}$$

и

$$F_{\alpha IKL}=G_{\alpha I(KL)} \tag{28}$$

удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$dg_{\alpha IKL}+g_{\alpha IKL}\left(\omega_p^p+\omega_\varsigma^\varsigma\right)-g_{\varsigma IKL}\omega_\alpha^\varsigma-3g_{\alpha J[KL}\omega_{I]}^J-\frac{3}{2}\in_{p\alpha}g_{[IK}\omega_{L]}^p+(\ldots)=0 \tag{29}$$

и

$$dF_{\alpha IKL}+F_{\alpha IKL}\left(\omega_p^p+\omega_\beta^\beta\right)-F_{\beta IKL}\omega_\alpha^\beta-F_{\alpha IKJ}\omega_L^J-F_{\alpha IJL}\omega_K^J-F_{\alpha JKL}\omega_J^I+$$
$$+\frac{3}{2}\in_{p\alpha}g_{I(K}\omega_{L)}^p+\frac{3}{2}\in^{\beta\gamma}\in^{\delta\varepsilon}\left(h_{\alpha\beta JI}h_{LK\alpha\delta}-h_{\varepsilon\beta J(K}h_{L)I\alpha\delta}\right)\omega_\gamma^J+$$
$$+\frac{3}{2}\in^{\beta\gamma}\left(h_{\alpha\beta KL}g_{IJ}-h_{\alpha\beta I(L}g_{K)J}\right)\omega_\gamma^J-\frac{9}{2}\in^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta J(K}g_{L)I}\omega_\gamma^J+$$
$$+\frac{9}{2}g_{I(K}g_{L)J}\omega_\alpha^J+(\ldots). \tag{30}$$

Из уравнений (3) — (8), (16) — (26), (29), (30) следует, что системы величин:

$$G_{\alpha IKL},\quad g_{IK},\quad h_{\alpha\beta IK}; \tag{31}$$

$${}_{\alpha IKL},\quad g_{IK}; \tag{32}$$

$$F_{\alpha IKL},\quad g_{IK},\quad h_{\alpha\beta IK}; \tag{33}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma IKL},\quad h_{\alpha\beta IK},\quad g_{IK}; \tag{34}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta IK},\quad (34),\quad h_{\alpha\beta\gamma I},\quad h_I^\rho; \tag{35}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon I},\quad (35),\quad h_{\alpha\beta\gamma\delta}; \tag{36}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota},\quad (36); \tag{37}$$

$$g_{\alpha\beta IK},\quad (32),\quad h_{\alpha\beta\gamma I},\quad h_I^\rho; \tag{38}$$

$$f_{IK},\quad (33),\quad h_{\alpha\beta\gamma I},\quad h_I^\rho; \tag{39}$$

$$f_{\alpha\beta IK},\quad (34),\quad (33),\quad h_{\alpha\beta\gamma I},\quad h_I^\rho; \tag{40}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma I},\quad (35),\quad (40),\quad h_{\alpha\beta\gamma\delta}; \tag{41}$$

$$f_{\alpha I},\quad (38),\quad (39),\quad (40),\quad h; \tag{42}$$

$$f_{\alpha\beta},\quad (42),\quad (41),\quad h_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{43}$$

являются подобъектами фундаментального объекта третьего порядка.

§ 2. Некоторые свойства гиперповерхности четвертого порядка

4. Двумерная линейчатая поверхность комплекса, точками прикосновения [3] которой являются точки

$$\rho_1^{5-p}A_p,\quad \rho_2^{5-p}A_p, \tag{44}$$

определяется уравнениями

$$\omega_p^\alpha = \epsilon_{p\beta}\rho_1^{(\alpha}\rho_2^{\beta)}\Theta,$$
$$\omega_p^K = \epsilon_{p\beta}\rho_1^{(K}\rho_2^{\beta)}\Theta, \tag{45}$$

где Θ — линейная дифференциальная форма.

Трехмерная плоскость, проходящая через лучи l и $l+dl$ линейчатой поверхности (45), определяется уравнениями

$$\rho_1^{[4}\rho_2^3 x^{K]} = 0. \tag{46}$$

Трехмерная плоскость (46) пересекается с гиперплоскостями, ассоциированными соответственно точкам прикосновения (44), по двумерным плоскостям:

$$\left(A_1A_2,\ \rho_1^\alpha A_\alpha + \rho_1^K A_K\right),\ \left(A_1A_2,\ \rho_2^\alpha A_\alpha + \rho_2^K A_K\right). \tag{47}$$

Если $\rho_1^\alpha = \rho_2^\alpha$, $\rho_1^K = \rho_2^K$, то линейчатая поверхность (45) является развертывающейся и точки прикосновения и плоскости (47) совпадают. В этом случае двойная точка прикосновения является точкой возврата, а двойная плоскость (47) — касательной плоскостью луча развертывающейся поверхности комплекса.

Развертывающаяся двумерная поверхность комплекса с точкой возврата

$$t^1A_1 + t^2A_2,$$

касательной, плоскостью которой вдоль луча l является двумерная плоскость

$$(A_1A_2, \quad \rho^K A_K), \tag{48}$$

лежащая в касательном пространстве, определяется уравнениями:

$$\omega_p^\alpha = 0,$$
$$\omega_1^K = t^2 \rho^K \Theta, \quad \omega_2^K = -t^1 \rho^K \Theta. \tag{49}$$

5. При движении луча l по линейчатой поверхности (49) касательное пространство перемещается и те точки касательного пространства $\eta^p A_p + \eta^I A_I$, которые движутся в гиперплоскости

$$\tau^1 x^3 - \tau^2 x^4 = 0,$$

ассоциированной точке $\tau^1 A_1 + \tau^2 A_2$, определяются уравнением

$$\left(h_{\alpha\beta IK} + \epsilon_{\alpha\beta} g_{IK}\right) \tau^{5-\alpha} t^{5-\beta} \rho^I \eta^K = 0. \tag{50}$$

Если координаты точки $\eta^p A_p + \eta^K A_K$ являются переменными, то уравнение (50) определяет $(n-4)$-мерную плоскость, лежащую в касательном пространстве, присоединенную к двумерной плоскости (48).

Уравнение (50) симметрично относительно ρ^K и η^K тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$g_{IK} \rho^I \eta^K = 0. \tag{51}$$

Это уравнение имеет инвариантный смысл, ибо оно не зависит от отношения $\tau^1 : \tau^2$.

Уравнение (51) равносильно уравнениям линейного комплекса

$$g_{IK} p^{IK} = 0, \quad p^{\alpha q} = p^{\alpha K} = p^{34} = 0, \tag{52}$$

где p^{ij} — координаты прямой в репере $\{A_i\}$.

6. Общие прямые линейных комплексов, соответствующих двум бесконечно близким лучам линейчатой поверхности (49), определяются уравнениями (52) и

$$\left(h_{\alpha\beta IK} + \epsilon_{\alpha\beta} g_{IK}\right) t^{5-\beta} \rho^I p^{Kq} = 0, \tag{53}$$

$$G_{\alpha IKL} t^{5-\alpha} \rho^L p^{IK} + 2g_{IK}\left(t^1 p^{2K} - t^2 p^{1K}\right) \rho^I = 0. \tag{54}$$

Действительно, дифференцируя уравнения (52), в силу (49), получаем (53) и (54).

Коэффициенты уравнений (50), (53) и (54) являются компонентами геометрического объекта (31).

Так как уравнения (53) и (54) связывают координаты трех точек

$$\rho^p A_p + \rho^I A_I, \quad \xi^p A_p + \xi^I A_I, \quad \eta^p A_p + \eta^I A_I$$

касательного пространства, где

$$p^{IK} = \xi^I \eta^K - \xi^K \eta^I, \quad p^{Kq} = \xi^K \eta^q - \xi^q \eta^K,$$

то в случае совпадения двух точек

$$\rho^p A_p + \rho^I A_I = \eta^p A_p + \eta^I A_I \equiv x^p A_p + x^I A_I$$

они определяют $(n-5)$-мерную поверхность

$$x^\alpha = 0,$$

$$\left(h_{\alpha\beta IK}+\epsilon_{\alpha\beta}g_{IK}\right)\rho^{\beta}x^{I}\left(x^{K}\xi^{p}-x^{p}\xi^{K}\right)=0,$$

$$F_{\alpha IKL}\rho^{\alpha}x^{K}x^{L}\xi^{I}+g_{IK}\left\{\rho^{3}\left(x^{1}\xi^{K}-x^{K}\xi^{1}\right)-\rho^{4}\left(x^{2}\xi^{K}-x^{K}\xi^{2}\right)\right\}x^{I}=0,$$

присоединенную к точке $\rho^4 A_1+\rho^3 A_2$ луча l и к точке $\xi^p A_p+\xi^I A_I$ касательного пространства. Коэффициенты уравнений этой поверхности определяются компонентами геометрического объекта (33).

7. Прямая, проходящая через точку

$$U=u^{p}A_{p}+u^{\alpha}A_{\alpha}+u^{K}A_{K}, \tag{55}$$

пересекается с гиперпоэрхностью четвертого порядка [2]

$$6h_{\alpha\beta IK}x^{\alpha}x^{\beta}x^{I}x^{K}+4h_{\alpha\beta\gamma K}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{K}+h_{\alpha\beta\gamma\delta}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}=0 \tag{56}$$

в точках P_1, P_2, P_3, P_4, с помощью которых (см. лемму 1 [4]) соотношениями

$$ZU\div PQ,\quad PZ\div P_1P_2,\quad QZ\div P_3P_4$$

на этой прямой определяются три точки Z. При вращении этой прямой около точки U, точки Z описывают гиперповерхность третьего порядка

$$6h_{\alpha\beta IK}u^{(\alpha}x^{\beta}x^{I}x^{K)}+4h_{\alpha\beta\gamma K}u^{(\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{K)}+h_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}=0.$$

Прямая, проходящая через точку

$$V=v^{p}A_{p}+v^{\alpha}A_{\alpha}+v^{K}A_{K}, \tag{57}$$

пересекается с выше полученной гиперповерхностью третьего порядка в точках Q_1, Q_2, Q_3, с помощью которых (см. лемму 2 [4]) соотношениями

$$VY\div RS,\quad RY\div Q_1Q_2,\quad SY\div Q_3V$$

на этой прямой определяются две точки Y. При движении прямой, проходящей через точку V, точки Y описывают гиперповерхность второго порядка

$$6h_{\alpha\beta IK}u^{(\alpha}v^{\beta}x^{I}x^{K)}+4h_{\alpha\beta\gamma K}u^{(\alpha}v^{\beta}x^{\gamma}x^{K)}+h_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\alpha}v^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}=0.$$

Полярная гиперплоскость, соответствующая точке

$$W=w^{p}A_{p}+w^{\alpha}A_{\alpha}+w^{K}A_{K} \tag{58}$$

относительно этой гиперквадрики, определяется уравнением

$$6h_{\alpha\beta IK}u^{(\alpha}v^{\beta}w^{I}x^{K)}+4h_{\alpha\beta\gamma K}u^{(\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}x^{K)}+h_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}x^{\delta}=0. \tag{59}$$

Если все три точки (55), (57) и (58) стоят на месте, а луч l комплекса движется, то координаты точек U, V, W удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$du^{i}+u^{j}\omega_{j}^{i}=u^{i}\Theta,\quad dv^{i}+v^{j}\omega_{j}^{i}=v^{i}\Theta,\quad dw^{i}+w^{j}\omega_{j}^{i}=w^{i}\Theta,\quad D\Theta=0,$$

в характеристика гиперплоскости (59) определяется уравнениями (59) и

$$\begin{gathered}\left(\Delta h_{\alpha\beta\gamma\delta}-4h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\Theta_{\delta}^{\varepsilon}\right)u^{(\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}x^{\beta)}+\\+2\left(2\Delta h_{\alpha\beta\gamma K}-h_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{K}^{\delta}-8h_{\alpha\beta\delta K}\Theta_{\gamma}^{\delta}-\epsilon_{p\alpha}\epsilon_{\beta\delta}h_{K}^{p}\Theta_{\gamma}^{\delta}\right)u^{(\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}x^{K)}+\\+\left(6\Delta h_{\alpha\beta IK}-8h_{\alpha\beta\gamma I}\omega_{K}^{\gamma}-24h_{\alpha\gamma IK}\Theta_{\beta}^{\gamma}-\epsilon_{p\alpha}\epsilon_{\beta\gamma}h_{I}^{p}\omega_{K}^{\gamma}\right)u^{(\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}x^{K)}-\\-12h_{\alpha\beta IK}\left(\omega_{p}^{\beta}u^{(p}v^{\alpha}w^{I}x^{K)}+\omega_{L}^{\beta}u^{(L}v^{\alpha}w^{I}x^{K)}\right)-4\left(h_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{p}^{\delta}+h_{\alpha\beta\gamma K}\omega_{p}^{K}\right)u^{(\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}x^{p)}-\\-12\left(h_{\alpha\beta\gamma K}\omega_{p}^{\gamma}+h_{\alpha\beta IK}\omega_{p}^{K}\right)u^{(\alpha}v^{\beta}w^{I}x^{p)}=0.\end{gathered} \tag{60}$$

8. Если луч l перемещается и описывает линейчатую поверхность комплекса определяемую уравнениями (45), то уравнение (60) примет вид

$$\begin{aligned}
\psi(u, v, \overset{\bullet}{w}, \rho_1, \rho_2, x) \equiv & \Big\{ \Big(f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota} + \frac{6}{5} \epsilon_{\varepsilon\alpha} f_{\beta\gamma} \epsilon_{\delta\iota} + O_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota} \Big) \rho_1^{(\varepsilon} \rho_2^{\iota)} + \\
& + \Big(f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K} - \epsilon_{\varepsilon\alpha} f_{\beta\gamma\delta K} + O_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K} \Big) \rho_1^{(\varepsilon} \rho_2^{K)} \Big\} u^{(\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} x^{\delta)} + \\
& + \Big\{ \Big(2 f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K} + \epsilon_{\delta\alpha} f_{\beta\gamma\varepsilon K} - 2 \epsilon_{\delta\alpha} \epsilon_{\varepsilon\beta} f_{\gamma K} + O^*_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K} \Big) \rho_1^{(\delta} \rho_2^{\varepsilon)} + \\
& + 2 \Big(f_{\alpha\beta\gamma\delta KI} - \epsilon_{\delta\alpha} f_{\beta\gamma KI} + 6 \epsilon_{\delta\alpha} g_{\beta\gamma KI} + O_{\alpha\beta\gamma\delta KI} \Big) \rho_1^{(\delta} \rho_2^{I)} \Big\} u^{(\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} x^{K)} + \\
& + \Big\{ \Big(f_{\alpha\beta\gamma\delta IK} + 2 \epsilon_{\gamma\alpha} f_{\beta\delta IK} + \epsilon_{\gamma\alpha} \epsilon_{\beta\delta} f_{IK} + O^*_{\alpha\beta\gamma\delta IK} \Big) \rho_1^{(\gamma} \rho_2^{\delta)} + \\
& + \Big(f_{\alpha\beta\gamma IKL} - 8 \epsilon_{\gamma\alpha} F_{\beta LIK} + O_{\alpha\beta\gamma IKL} \Big) \rho_1^{(\gamma} \rho_2^{L)} \Big\} u^{(\alpha} v^{\beta} w^{I} x^{K)} - \\
- 12 h_{\alpha\beta IK} \epsilon_{p\gamma} \rho_1^{(\beta} \rho_2^{\gamma)} u^{(\alpha} v^{p} w^{I} x^{K)} & - 4 \epsilon_{p\varsigma} \Big(h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \rho_1^{(\varepsilon} \rho_2^{\varsigma)} + h_{\alpha\beta\gamma K} \rho_1^{(K} \rho_2^{\varsigma)} \Big) u^{(\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} x^{p)} - \\
& - 12 \epsilon_{p\xi} \big(h_{\alpha\beta\gamma K} \rho_1^{(\gamma} \rho_2^{\varsigma)} + h_{\alpha p IK} \rho_1^{(I} \rho_2^{\varsigma)} \big) u^{(\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} x^{p)} - \\
& - 12 \Big\{ \Big(\epsilon^{\varsigma\eta} h_{\alpha\varsigma IK} h_{\eta\gamma\delta L} + \epsilon_{p\delta} h_{\alpha\gamma IK} h^{p}_{L} \Big) \rho_1^{(\gamma} \rho_2^{\delta)} + \\
& + \Big(6 h_{\alpha\gamma IK} g_{LJ} + \epsilon^{\eta\delta} h_{\alpha\eta IK} h_{\delta\gamma LJ} \Big) \rho_1^{(\gamma} \rho_2^{J)} \Big\} u^{(\alpha} v^{I} w^{K} x^{L)} = 0,
\end{aligned} \tag{61}$$

где

$$O_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota} = 2 \epsilon_{\varepsilon(\alpha} h_{\beta\gamma\delta)\iota} h + 2 \epsilon^{\varsigma\eta} h_{\eta(\alpha\beta\gamma} h_{\delta)\varepsilon\varsigma\iota} \tag{62}$$

$$O_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K} = 2 \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta\gamma\delta)\varepsilon} h^{p}_{K} + 4 \epsilon^{\eta\iota} h_{\iota(\alpha\beta\gamma} h_{\delta)\eta\varepsilon K}, \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
O^*_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K} = & \, 4 \epsilon^{\eta\varsigma} h_{\alpha\beta\gamma\varsigma} h_{\eta\delta\varepsilon K} - 2 \epsilon_{p\delta} h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} h^{p}_{K} + \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta\gamma)\delta\varepsilon} h^{p}_{K} + \\
& + 8 \epsilon_{\delta(\alpha} h_{\beta\gamma)\varepsilon K} h - 8 \epsilon^{\varsigma\eta} h_{\delta\varepsilon\eta(\gamma} h_{\alpha\beta)\varsigma K} + \epsilon_{p(\alpha} \epsilon_{|\delta|\varsigma} \epsilon_{\gamma)\varepsilon} h^{p}_{K} h,
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
O_{\alpha\beta\gamma\delta KI} = & \, 2 \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta\gamma)\delta K} h^{p}_{I} + 6 \epsilon^{\eta\varsigma} h_{\alpha\beta\gamma\varsigma} h_{\eta\delta KI} + \\
& + 8 \epsilon^{\eta\varsigma} h_{(\alpha\beta|\varsigma K|} h_{\gamma)\delta\eta I} - 6 h_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{KI} + 2 \epsilon_{\delta(\alpha} h_{\beta\gamma)\varsigma K} h_{I}^{5-\varsigma} + \\
& + \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta\gamma)\delta I} h^{p}_{K} + \frac{1}{2} \epsilon_{p(\alpha} \epsilon_{|q|\beta} \epsilon_{\gamma)\delta} h^{p}_{K} h^{q}_{I},
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
O^*_{\alpha\beta\gamma\delta KI} = & \, 12 \epsilon^{\varsigma\eta} h_{\varsigma\gamma\delta(\alpha} h_{\beta)\eta IK} - 8 \epsilon_{p\gamma} h_{\alpha\beta\delta I} h^{p}_{K} + \\
& + 16 \epsilon^{\eta\varsigma} h_{\alpha\beta\varsigma I} h_{\eta\gamma\delta K} - \epsilon_{p(\alpha} \epsilon_{\beta)\gamma} \epsilon_{q\delta} h^{p}_{I} h^{q}_{K} + \\
& + 12 \epsilon_{\delta(\alpha} h_{\beta)\gamma IK} h + 2 \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta)\gamma\delta K} h^{p}_{I},
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
O_{\alpha\beta\gamma IKL} = & \, \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta)\gamma KL} h^{p}_{I} - 6 \epsilon_{p(\alpha} \epsilon_{\beta)\gamma} h^{p}_{I} g_{KL} + \\
& + 48 \epsilon^{\eta\varsigma} h_{\alpha\beta\varsigma I} h_{\eta\gamma KL} + 24 \epsilon^{\varsigma\eta} h_{\varsigma(\alpha|\gamma L|} h_{\beta)\eta IK} + \\
& + 6 \epsilon_{p(\alpha} h_{\beta)\gamma IK} h^{p}_{L} + 6 \epsilon_{\gamma(\alpha} h_{\beta)\delta IK} h_{L}^{5-\delta} - 48 h_{\alpha\beta\gamma I} g_{KL}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Уравнения (59) и (1) определяют $(n-3)$-мерную плоскость, присоединенную к точкам (55), (57), (58) и к двухмерным плоскостям (47). Подробные исследования этих уравнений дадут геометрическое истолкование объектов (33) — (43).

9. Считая, что плоскости (47) совпадают, а также совпадают точки (55), (57), (58) с точкой $x^i A_i$, которая лежит в двойной плоскости, т.е.

$$u^p = v^p = w^p = x^p, \quad u^\alpha = v^\alpha = w^\alpha = \rho_1^\alpha = \rho_2^\alpha = x^\alpha,$$

$$u^I = v^I = w^I = \rho_1^I = \rho_2^I = x^I$$

(множители пропорциональности пропущены, так как они в этом случае не имеют никакого значения), получим $(n-3)$-мерную поверхность, определяемую уравнениями (56) и

$$\begin{gathered}
f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\iota}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}x^{\varepsilon}x^{\iota}+3f_{\alpha\beta\gamma\delta KI}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}x^{I}x^{K}+\\
+\left(3f_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon K}+\epsilon_{p\alpha}h_{\beta\gamma\delta\varepsilon}h^{p}_{K}\right)x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}x^{\varepsilon}x^{K}+\\
+\left(f_{\alpha\beta\gamma IKL}-5\epsilon_{p\alpha}h_{\beta\gamma IK}h^{p}_{L}+12\epsilon^{\eta\zeta}h_{\alpha\beta\zeta I}h_{\eta\gamma KL}\right)x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{I}x^{K}x^{L}-\\
-8\epsilon_{p\alpha}\left(3h_{\beta\gamma IK}x^{I}+2h_{\beta\gamma\zeta K}x^{\zeta}\right)x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{p}x^{K}-4\epsilon_{p\zeta}h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\varepsilon}x^{\zeta}x^{p}=0. \quad (68)
\end{gathered}$$

Поверхность (56), (68) определяется компонентами геометрического объекта (37). Более детальные исследования этой поверхности, осуществляемые с помощью ассоциированной гиперплоскости к точке луча l, касательного пространства и луча l в нем, дают нам геометрические интерпретации объектов (34) — (36).

10. В общем случае соответствие между точками (55), (57), (58) и плоскостью $\left(A_1A_2,\ \rho_1^{\alpha}A_{\alpha}+\rho_1^{K}A_{K}\right)$, определяемое уравнениями (59) и (61), не является симметричным относительно точки x^iA_i и некоторой точки $\rho_2^iA_i$, лежащей во второй плоскости (47). Следовательно, требование, чтобы это соответствие было симметричным относительно точек x^iA_i и $\rho_2^iA_i$, дает дополнительные уравнения:

$$6h_{\alpha\beta IK}u^{(\alpha}v^{\beta}w^{I}\rho_2^{K)}+4h_{\alpha\beta\gamma K}u^{(\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}\rho_2^{K)}+h_{\alpha\beta\gamma\delta}u \qquad =0, \qquad (69)$$

$$\psi(u,\ v,\ w,\ \rho_1,\ x,\ \rho_2)=0. \qquad (70)$$

Исключение координаты ι прямой, проходящей через точки x^iA_i и $\rho_2^iA_i$, приводит к трем уравнениям: (59), (69) и

$$\psi(u,\ v,\ w,\ \rho_1,\ \rho_2,\ x)-\psi(u,\ v,\ w,\ \rho_1\ x,\ \rho_2)=0. \qquad (71)$$

Эти три уравнения (59), (69), (71) определяют линейный комплекс прямых, лежащих в гиперплоскости (59), присоединенной к трем точкам (55), (57), (58). Этот комплекс определяется компонентами геометрического объекта (43).

Те прямые линейного комплекса (59), (69), (71), которые: а) пересекаются с касательным пространством, характеризуются уравнением $p^{43}=0$ и определяются компонентами геометрического объекта (42), б) лежат в касательном пространстве, характеризуются уравнениями $p^{43}=p^{\alpha K}=p^{\alpha q}=0$ и определяются компонентами геометрического объекта (38).

При $u^{\alpha}=0$ (одна из точек (55) (67), (58) лежит в касательном пространстве) уравнения (59), (69) и (71) будут определены компонентами геометрических объектов (42), (41) и (39). Если $u^{\alpha}=0$, $v^{\alpha}=w^{\alpha}=\rho_1^{\alpha}$ (точка U лежит в касательном пространстве, а точки V, W и двухмерная плоскость $\left(A_1A_2,\ \rho_1^{\alpha}A_{\alpha}+\rho_1^{K}A_{K}\right)$ лежат в одной ассоциированной гиперплоскости), то уравнения (59), (69) и (71) будут определены компонентами геометрического объекта (41).

При $u^{\alpha}=v^{\alpha}=0$ уравнения (59), (69) и (71) будут определены компонентами геометрических объектов (40) и (39).

При $u^{\alpha}=v^{\alpha}=0$ и $w^{\alpha}=\rho_1^{\alpha}$ уравнения (59), (69) и (71) будут определены компонентами геометрического объекта (40).

Значение геометрического объекта (39) получается из требования, чтобы точка (58) была симметрична точке $\rho_1^i A_i$, лежащей в первой плоскости (47).

11. Компоненты фундаментального объекта второго порядка позволяют определить нормали второго рода [2] и двухмерные плоскости, проходящие через луч l и лежащие в касательном пространстве. Каждая такая двумерная плоскость и нормаль второго рода пересекаются в одной точке. Совокупность этих точек определяет совокупность прямых лежащих в касательном пространстве. Каждая прямая этой совокупности при перемещении луча l по заданному комплексу также перемещается и описывает (в общем случае) другой комплекс, фундаментальный объект первого порядка которого является подобъектом фундаментального объекта третьего порядка исходного комплекса.

12. Полярная форма гиперповерхности четвертого порядка дала геометрическое значение большинства геометрических объектов третьего порядка. С помощью принципа двойственности в работе [2] получена геометрическая интерпретация нормали первого рода и ряда других геометрических объектов. Применяя принцип двойственности к дифференциальной окрестности третьего порядка, получим новые геометрические объекты, двойственные геометрическим объектам (31) — (43).

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
1. II. 1961 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий, Труды Московского матем. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
2. К. И. Гринцевичюс. Дифференциальная окрестность второго порядка луча комплекса в многомерном проективном пространстве, Математический сборник, 1960, 52 (94), № 4, 1005—1034.
3. Н. И. Кованцов. К проективной теории комплекса прямых, ДАН СССР, 1954, т. 95 № 5, 917—920.
4. К. И. Гринцевичюс. Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса, Успехи матем. наук, 1958, т. 13, в. 2 (80), 175—180.

APIE TIESIŲ KOMPLEKSO TREČIOS EILĖS DIFERENCIALINĘ APLINKĄ

K. GRINCEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe tiriama tiesių komplekso daugiamatėje projektyvinėje erdvėje trečios eilės diferencialinė aplinka. Šis darbas yra kito darbo [2] tęsinys, kuriame buvo ištirta antros eilės diferencialinė aplinka. G. F. Laptevo metodu gauta trylika geometrinių objektų. Duodama jų geometrinė prasmė.

DIFFERENTIALUMGEBUNG DRITTER ORDNUNG DES STRAHLENKOMPLEXS

K. GRINCEVIČIUS

(Zusammenfassung)

In vorliegender Arbeit wird das Fundamentalobjekt dritter Ordnung des Strahlenkomplexs im mehrdimensionalen projektiven Raum untersucht. Im erwähnten Raum wurden 13 Unterobjekte des Fundamentalobjekts gefunden. Die geometrische Deutung der Unterobjekte wird mit Hilfe einer Hyperfläche vierter Ordnung durchgeführt. Die genannte Hyperfläche wird durch Komponenten des einem Komplex angehörigen Fundamentalobjekts zweiter Ordnung definiert.