I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

ОБ ОДНОЙ ПАРЕ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ

К. ГРИНЦЕВИЧЮС

В этой заметке методом внешних форм Картана [1] строится одна пара комплексов прямых, для которой два четырехпараметрические многообразия плоских элементов, определяемых нулевыми системами касательных линейных комплексов, вырождаются в трехпараметрические.

1. Пусть ребра $l=A_1A_2$ и $l^*=A_4A_3$ подвижного проективного репера $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$ в трехмерном проективном пространстве описывают два комплекса прямых $(l)=(A_1A_2)$ и $(l^*)=(A_4A_3)$, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие так, чтобы лучу A_1A_2 соответствовал луч A_4A_3.

Если инфинитезимальное перемещение репера $\{A_i\}$ обозначим через

$$dA_i=\omega_i^k A_k,$$

то дифференциальные формы ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_i^j=\left[\omega_i^k\omega_k^j\right]$$

и комплекс (A_1A_2) будет определен дифференциальными уравнениями

$$\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha=0, \tag{1}$$

$$\left[\Delta\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha\right]=0, \tag{2}$$

а комплекс (A_4A_3) — уравнениями

$$\lambda_p^\alpha\omega_\alpha^p=0, \tag{3}$$

$$\left[\Delta\lambda_p^\alpha\omega_\alpha^p\right]=0, \tag{4}$$

где $p, q=1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma=3, 4$;

$$\Delta\lambda_\alpha^p=d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\omega_q^p-\lambda_\beta^p\omega_\alpha^\beta,$$
$$\Delta\lambda_p^\alpha=d\lambda_p^\alpha+\lambda_p^\beta\omega_\beta^\alpha-\lambda_q^\alpha\omega_p^q.$$

Из рассмотрения исключаются комплексы касательных к поверхностям, т.е. предполагается, что

$$A=\lambda_4^2\lambda_3^1-\lambda_4^1\lambda_3^2\neq 0, \tag{5}$$

$$B=\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3\neq 0. \tag{6}$$

2. Пучок линейных касательных комплексов комплекса (A_1A_2) определяется уравнением

$$\lambda^1_\alpha p^{2\alpha} - \lambda^2_\alpha p^{1\alpha} + \rho p^{43} = 0, \tag{7}$$

а для комплекса (A_4A_3) — уравнением

$$\lambda^4_q p^{3q} - \lambda^3_q p^{4q} + \sigma p^{12} = 0, \tag{8}$$

где ρ и σ — параметры пучков и p^{ij} — однородные координаты прямой.

Прямые линейного комплекса (8), проходящие через точку $M_1 = A_1 + tA_2$ луча A_1A_2, принадлежат плоскости

$$\sigma\left(tx^1 - x^2\right) + \left(t\lambda^4_2 + \lambda^4_1\right)x^3 - \left(t\lambda^3_2 + \lambda^3_1\right)x^4 = 0, \tag{9}$$

а прямые комплекса (7), проходящие через точку $M_4 = A_4 + \tau A_3$ луча A_4A_3 — плоскости

$$\rho\left(\tau x^4 - x^3\right) + \left(\tau\lambda^1_3 + \lambda^1_4\right)x^2 - \left(\tau\lambda^2_3 + \lambda^2_4\right)x^1 = 0, \tag{10}$$

где x^i — координаты точки относительно репера $\{A_i\}$. Точка M_1 принадлежит плоскости (9). Требование, чтобы все точки $M_1 + dM_1$ тоже принадлежали этой плоскости, приводит к уравнению

$$\sigma\left\{dt + t\left(\omega^2_2 - \omega^1_1\right) - t^2\omega^1_2 + \omega^2_1\right\} +$$
$$+\left(t\lambda^3_2 + \lambda^3_1\right)\left(\omega^4_1 + t\omega^4_2\right) - \left(t\lambda^4_2 + \lambda^4_1\right)\left(\omega^3_1 + t\omega^3_2\right) = 0. \tag{11}$$

3. Если потребуем, чтобы уравнение (11) было вполне интегрируемо и сохранялась линейная независимость трех главных форм пары комплексов, то получим следующие условия.

$$\left[\nabla\lambda^3_1\omega^4_1\right] = \left[\nabla\lambda^4_1\omega^3_1\right], \quad \left[\nabla\lambda^3_2\omega^4_2\right] = \left[\nabla\lambda^4_2\omega^3_2\right], \tag{12}$$
$$\left[\nabla\lambda^3_1\omega^4_2\right] + \left[\Delta\lambda^3_2\omega^4_1\right] = \left[\nabla\lambda^4_1\omega^3_2\right] + \left[\nabla\lambda^4_2\omega^3_1\right],$$

где

$$\nabla\lambda^\alpha_p = \sigma\Delta\lambda^\alpha_p - \lambda^\alpha_p\Delta\sigma + 4\lambda^{[4}_p\omega^{3]}_{[1}\lambda^\alpha_{2]} + \sigma^2\Theta^\alpha_p,$$
$$\Delta\sigma = d\sigma - \sigma\left(\omega^q_q - \omega^\beta_\beta\right), \tag{13}$$
$$\Theta^3_1 = -\omega^2_4, \quad \Theta^4_1 = \omega^2_3, \quad \Theta^3_2 = \omega^1_4, \quad \Theta^4_2 = -\omega^1_3,$$

а квадратичные скобки в (13) обозначают альтернирование.

Такую пару комплексов, для которой уравнение (11) является вполне интегрируемым, обозначим $(A_1A_2 \to A_4A_3)$.

Внешние дифференциалы выражений $\nabla\lambda^\alpha_p$ имеют вид:

$$D\nabla\lambda^\alpha_p = \left[\omega^q_p\nabla\lambda^\alpha_q\right] - \left[\omega^\alpha_\beta\nabla\lambda^\beta_p\right] + \left[\Theta\Delta\lambda^\alpha_p\right] + \frac{4}{\sigma}\lambda^\alpha_{[2}\left[\omega^{[4}_{1]}\nabla\lambda^{3]}_p\right] +$$
$$+\frac{4}{\sigma}\lambda^{[3}_p\left[\omega^{4]}_{[1}\nabla\lambda^\alpha_{2]}\right], \tag{14}$$

где

$$\Theta = 2d\ln\sigma - \omega^p_p + \omega^\alpha_\alpha.$$

Система уравнений (1) — (4) и (12), определяющая пару комплексов $(A_1A_2 \to A_4A_3)$, замкнута относительно внешнего дифференцирования, но она не в инволюции. Частичное продолжение этой системы дает:

$$\nabla\lambda^\alpha_p = \lambda^{\alpha 3}\omega^4_p - \lambda^{\alpha 4}\omega^3_p, \quad \lambda^{34} = \lambda^{43}. \tag{15}$$

Дифференцируя линейные уравнения (15), в силу формул (14), получим:

$$\left[\Delta\lambda^{\alpha 3}\omega_p^4\right]-\left[\Delta\lambda^{\alpha 4}\omega_p^3\right]=0, \tag{16}$$

где

$$\Delta\lambda^{\alpha\beta}=d\lambda^{\alpha\beta}-\lambda^{\alpha\beta}\left(2d\ln\sigma-\omega_p^p+2\omega_\gamma^\gamma\right)+2\lambda^{\gamma(\beta}\omega_\gamma^{\alpha)}+$$
$$+\frac{4}{\sigma}\lambda^{\alpha\beta}\lambda_{[2}^{[4}\omega_{1]}^{3]}+\frac{8}{\sigma}\lambda_{[2}^{(\alpha}\lambda^{\beta)[4}\omega_{1]}^{3]}.$$

Из четырех квадратичных уравнений (16) следует, что

$$\Delta\lambda^{\alpha\beta}=0. \tag{17}$$

Дифференцируя внешним образом эти три уравнения, получим:

$$\left(\lambda^{33}\lambda^{\alpha\beta}+2\lambda^{3\alpha}\lambda^{3\beta}\right)\left[\omega_1^4\omega_2^4\right]+\left(\lambda^{44}\lambda^{\alpha\beta}+2\lambda^{4\alpha}\lambda^{4\beta}\right)\left[\omega_1^3\omega_2^3\right]-$$
$$-\left(\lambda^{34}\lambda^{\alpha\beta}+\lambda^{4\alpha}\lambda^{3\beta}+\lambda^{3\alpha}\lambda^{4\beta}\right)\left[\omega_1^3\omega_2^4+\omega_1^4\omega_2^3\right]=0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda^{\alpha\beta}=0. \tag{18}$$

4. Таким образом, пара комплексов $(A_1A_2\to A_4A_3)$, для которой уравнение (11) является вполне интегрируемым, будет определена, в силу (18), системой уравнений (1)—(4) и (15). Эта система замкнута относительно внешнего дифференцирования, находится в инволюции и произвол ее решения — две функции от трех аргументов.

Если задан комплекс (A_1A_2), то комплекс (A_4A_3) и соответствие между лучами l и l^*, в силу (18), определяются системой уравнений (3), (4) и (15). Эта система — в инволюции и допускает решение с произволом одной функции от трех аргументов.

5. Пять линейных уравнений (3) и (15), в силу (18), устанавливают соответствие между лучами пары комплексов и определяют $d\sigma$.

Из (15), в силу (18), получается дифференциальное уравнение

$$2Bd\sigma-\sigma dB-B\sigma\left(\omega_p^p-\omega_\alpha^\alpha\right)+B\lambda_{[1}^{[4}\omega_{2]}^{3]}=0.$$

Так как это уравнение вполне интегрируемо, то σ есть функция трех первичных параметров пары комплексов и одной произвольной константы.

6. *Следствие.* Дифференциальные уравнения стационарности геометрической точки $M_1=A_1+tA_2$, в силу (15) и (18), равносильны дифференциальным уравнениям стационарности плоскости (9) при любом t. Следовательно, конусу комплекса (A_1A_2) с вершиной в точке $M_1=A_1+tA_2$ при определенном σ соответствует одна плоскость (9), т. е. требование полной интегрируемости уравнения (11) понижает размерность многообразия плоскостей (9) на единицу. Справедливо и обратное предложение: из равносильности дифференциальных уравнений стационарности геометрической точки $M_1=A_1+tA_2$ и дифференциальных уравнений стационарности плоскости (9) вытекает полная интегрируемость уравнения (11).

7. Пара комплексов $(A_1A_2\rightleftarrows A_4A_3)$, для которой оба семейства плоскостей (9) и (10) (при определенных σ и ρ) будут трехпараметрические, в силу симметрии относительно индексов $1 \longleftrightarrow 4$, $2 \longleftrightarrow 3$ и $\rho \longleftrightarrow \sigma$, определяется уравнениями:

$$\lambda_\alpha^\rho \omega_\rho^\alpha = 0, \tag{19}$$

$$\lambda_\rho^\alpha \omega_\alpha^\rho = 0, \tag{20}$$

$$\nabla \lambda_\rho^\alpha = 0, \tag{21}$$

$$\nabla \lambda_\alpha^\rho = 0, \tag{22}$$

$$\left[\omega_\rho^\alpha \, \omega_\alpha^\rho\right] = 0, \tag{23}$$

где выражения $\nabla \lambda_\alpha^\rho$, симметричны выражениям $\nabla \lambda_\rho^\alpha$, определенным соотношениями (13). Оба квадратичные уравнения (2) и (4), в силу (19) — (22), превращаются в одно уравнение (28).

Система уравнений (19) — (23) замкнута относительно внешнего дифференцирования, находится в инволюции с характерами $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ и допускает решение с произволом одной функции от трех аргументов. Один комплекс пары $(A_1A_2 \rightleftarrows A_4A_3)$ является произволным комплексом, а второй комплекс этой пары и соответствие между лучами, если первый задан, определяются с произволом девяти констант.

8. Так как из (21) и (22) следует, что

$$\frac{\rho^3\sigma^3}{AB} d \frac{AB}{\rho^3\sigma^3} = 4\left\{\rho\lambda_{[1}^{[4}\omega_{2]}^{3]} + \sigma\lambda_{[4}^{[1}\omega_{3]}^{2]}\right\}$$

и

$$\frac{\rho\sigma\, dI - Id(\rho\sigma)}{I - \rho\sigma} = 4\left\{\rho\lambda_{[1}^{[4}\omega_{2]}^{3]} + \sigma\lambda_{[4}^{[1}\omega_{3]}^{2]}\right\},$$

где

$$I = \lambda_\rho^\alpha \lambda_\alpha^\rho, \tag{24}$$

то общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{\rho^3\sigma^3}{AB} d \frac{AB}{\rho^3\sigma^3} = \frac{\rho\sigma\, dI - Id(\rho\sigma)}{I - \rho\sigma}$$

является

$$\left(1 - \frac{1}{4c}\right)\rho\sigma(I - \rho\sigma) = AB, \quad c = const, \tag{25}$$

причем $c \neq 0$ и $c \neq \frac{1}{4}$.

9. При переменном t уравнение (9) определяет пучок плоскостей, ось которого

$$m = \left[-\frac{B}{\sigma} A_1 + \lambda_1^\alpha A_\alpha, \quad -\frac{B}{\sigma} A_2 + \lambda_2^\beta A_\beta\right] \tag{26}$$

сопряжена с лучом A_1A_2 относительно линейного комплекса (8).

Так как

$$d\left(-\frac{B}{\sigma} A_p + \lambda_p^\alpha A_\alpha\right) = \left(-\frac{B}{\sigma} A_p + \lambda_p^\alpha A_\alpha\right) d\ln\frac{B}{\sigma} +$$
$$+ \left(-\frac{B}{\sigma} A_q + \lambda_q^\alpha A_\alpha\right)\left(\omega_p^q - \frac{\sigma}{B}\lambda_p^\beta \omega_\beta^q\right),$$

то прямая (26) стоит на месте.

Аналогично прямая

$$n = \left[-\frac{A}{\rho} A_4 + \lambda_4^p A_p, \quad -\frac{A}{\rho} A_3 + \lambda_3^q A_q\right], \tag{27}$$

сопряженная лучу A_4A_3 относительно линейного комплекса (7), также стоит на месте.

10. Параметрическое уравнение демиквадрики, проходящей через лучи

m, n и $l,$

имеет вид

$$u(t)=\frac{1}{\sigma}\Big\{I\rho\sigma(t^2-t)-\rho^2\sigma^2t^2-AB(1-t)^2\Big\}[12]-A\sigma[34]+$$
$$+\Big\{A\lambda_2^3(1-t)-\rho\sigma\lambda_4^1 t\Big\}[13]+\Big\{A\lambda_1^4(1-t)-\rho\sigma\lambda_3^2 t\Big\}[42]+ \qquad (28)$$
$$+\Big\{A\lambda_2^4(1-t)+\rho\sigma\lambda_3^1 t\Big\}[14]-\Big\{A\lambda_1^3(1-t)+\rho\sigma\lambda_4^2 t\Big\}[23],$$

где t — параметр, означающий сложное отношение четырех прямых l, m, n и u, т. е.

$$t=(lmnu).$$

Гармоническая нормаль комплекса (A_1A_2), проходящая через прямую m, имеет вид

$$v(\tau)=\Big\{\frac{1}{4}(I-2\rho\sigma)^2\tau^2-\frac{I}{2}(I-2\rho\sigma)\tau+AB\Big\}[12]+A\sigma^2[34]-$$
$$-\Big\{A\sigma\lambda_2^3+\frac{\sigma}{2}(I-2\rho\sigma)\lambda_4^1\tau\Big\}[13]-\Big\{A\sigma\lambda_1^4+\frac{\sigma}{2}(I-2\rho\sigma)\lambda_3^2\tau\Big\}[42]- \qquad (29)$$
$$-\Big\{A\sigma\lambda_2^4-\frac{\sigma}{2}(I-2\rho\sigma)\lambda_3^1\tau\Big\}[14]+\Big\{A\sigma\lambda_1^3-\frac{\sigma}{2}(I-2\rho\sigma)\lambda_4^2\tau\Big\}[23],$$

где параметр τ для лучей m, и [12] принимает соответственно значения 0 и ∞.

11. Пересечение лучей u и v демиквадрик (28) и (29) характеризуется соотношением

$$\frac{1}{4}(I-2\rho\sigma)^2(\tau^2-2t\tau)+\Big\{AB-\rho\sigma(I-\rho\sigma)\Big\}t^2=0, \qquad (30)$$

связывающем параметры t и τ. Так как соответствие (30) является квадратичным уравнением относительно t и τ, то в общем случае каждый луч демиквадрики (28) пересекается с двумя лучами демиквадрики (29) и наоборот.

Из соотношения (30) следуют два проективных соответствия между лучами u и v демиквадрик (28) и (29):

$$\tau-t=0; \qquad (31)$$
$$\frac{1}{4}(I-2\rho\sigma)^2\tau-\Big\{AB-\rho\sigma(I-\rho\sigma)\Big\}t=0. \qquad (32)$$

Соответствие (31) получается следующим образом: если луч u демиквадрики (28) пересекается с лучами v_1 и v_2 демиквадрики (29), то к лучу u присоединяется тот луч v демиквадрики (29), который с прямой [12] гармонически разделяет лучи v_1 и v_2.

Соответствие (32) означает, что если луч v демиквадрики (29) пересекается с лучами u_1 и u_2 демиквадрики (28), то к лучу v присоединен тот луч u, который с прямой [12] гармонически разделяет лучи u_1 и u_2.

12. Введем два проективных соответствия между лучами демиквадрики (28).

Первое соответствие. Пусть лучу $u(t)$ демиквадрики (28), в силу (31), соответствует луч $v(\tau)$ демиквадрики (29), а лучу $v(\tau)$, в силу (32), соответствует луч $u'(t')$. Это соответствие определяется уравнением

$$\frac{1}{4}(I-2\rho\sigma)^2t-\Big\{AB-\rho\sigma(I-\rho\sigma)\Big\}t'=0. \qquad (33)$$

Второе соответствие. Три пары лучей демиквадрики (28):

$$n,\ [12];\quad [12],\ m;\quad m,\ u(c),$$

где c постояная интеграла (25), определяют проективное соответствие

$$t' = \frac{c}{1-t}, \tag{34}$$

где параметр t для первых лучей этих трех пар принимает значения:

$$1,\ \infty,\ 0,$$

а t' для вторых лучей — значения:

$$\infty,\ 0,\ c.$$

Проективные соответствия (33) и (34) имеют две общие пары

$$u(t_1),\quad u(t_1') \quad \text{и} \quad u(t_2),\quad u(t_2')$$

соответственных лучей, где

$$t_1 = \frac{I-\rho\sigma}{I-2\rho\sigma},\qquad t_1' = -\frac{c(I-2\rho\sigma)}{\rho\sigma},$$

$$t_2 = -\frac{\rho\sigma}{I-2\rho\sigma},\qquad t_2' = \frac{c(I-2\rho\sigma)}{I-\rho\sigma}.$$

Так как $t_1t_2' = t_2t_1' = c$, то пары $u(t_1)\ u(t_2')$ и $u(t_1'),\ u(t_2)$ принадлежат одной инверсии, определяемой постоянной c.

Линейный комплекс (7) проходит через луч $u(t_1)$, которым он и определяется.

Если комплекс, описываемый ребром [12], постоянные прямые m, n и линейный касательный комплекс (7), определяемый постоянной c, заданы, то комплекс, описываемый ребром [43], полностью определен, ибо прямые [43] и n являются сопряженными относительно линейного комплекса (7).

13. Огибающая трехмерного многообразия линейных комплексов (7) есть пара T комплексов, одним из которых является комплекс (A_1A_2). Луч, соответствующий лучу второго комплекса этой пары T, имеет вид

$$\frac{B\rho^2}{I}[12] + I[34] - \rho\lambda_2^3[13] - \rho\lambda_1^4[42] - \rho\lambda_2^4[14] + \rho\mu_1^3[23].$$

14. Плоскость, ассоциированна к точке

$$M = t^p A_p \tag{35}$$

прямой l комлекса (l), совпадает с касательной плоскостью демиквадрики (28) в точке

$$M' = \tau^p A_p \tag{36}$$

тогда и только тогда, когда координаты этих точек (35) и (36) удовлетворяют соотношению

$$\lambda_p^\alpha \lambda_\alpha^{[2} t^{1]} \tau^p + \rho\sigma t^{[1} \tau^{2]} = 0. \tag{37}$$

Следовательно, соответствие между точками (35) и (36), определяемое уравнением (37), является проективным соответствием, двойные точки которого имеют вид

$$t_0^p A_p,\quad \text{где}\quad \lambda_p^\alpha \lambda_\alpha^{[2} t_0^{1]} t_0^p = 0. \tag{38}$$

Между точками (35) и (36) луча l можно получить еще и другое проективное соответствие. Плоскость $\lambda_\alpha^{[1} t^{2]} x^\alpha = 0$, ассоциированная точке $\mathbf{M}$ луча l комплекса (l), пересекается с лучом l^* в точке

$$N = t^\alpha A_\alpha,\quad \text{где}\quad t^3 = -2\lambda_4^{[2} t^{1]},\quad t^4 = 2\lambda_3^{[2} t^{1]}. \tag{39}$$

Если луч l пересекается с плоскостью $\lambda_p^{[4} t^{3]} x^p = 0$, ассоциированной точке N луча l^* комплекса (l^*), в точке $M' = \tau^p A_p$, то координаты точек M и M' связаны соотношением

$$\lambda_p^\alpha \lambda_\alpha^{[2} t^{1]} \tau^p = 0. \tag{40}$$

Двойные точки проективного соответствия (40) совпадают с двойными точками проективного соответствия (37).

Аналогично получаются два проективных соответствия

$$\lambda_\alpha^p \lambda_p^{[3} t^{4]} \tau^\alpha + \rho \sigma t^{[4} \tau^{3]} = 0, \tag{41}$$

$$\lambda_\alpha^p \lambda_p^{[3} t^{4]} \tau^\alpha = 0 \tag{42}$$

между точками

$$N = t^\alpha A_\alpha \quad \text{и} \quad N' = \tau^\alpha A_\alpha$$

луча l^*.

Двойными точками обоих проективных соответствий (41) и (42) являются

$$t_0^\alpha A_\alpha, \quad \text{где} \quad \lambda_\alpha^p \lambda_p^{[3} t_0^{4]} t_0^\alpha = 0. \tag{43}$$

15. Если точки (38) действительные, различные, мнимые или совпадающие, то точки (43) также будут соответственно действительные, различные, мнимые или совпадающие.

Следовательно, все четыре проективные соответствия (37), (40) — (42) одного типа, т. е. или гиперболические, или эллиптические, или параболические.

Равенства (39) определяют проективное соответствие между точками $M = t^p A_p$ и $N = t^\alpha A_\alpha$ лучей l и l^*. По этому проективному соответствию каждой двойной точке (38) сопоставлена одна двойная точка (43) и наоборот.

Все четыре прямые [12], [43], m и n, в общем случае, не принадлежат одной демиквадрике, следовательно, существуют только две прямые, пересекающиеся с прямыми [12], [43], m и n. Одна из этих прямых пересекается с прямыми [12] и [43] в точках одной пары соответственных двойных точек (38) и (43), а вторая прямая — в точках второй пары. Следовательно, прямые, пересекающиеся с прямыми [12], [43] m и n, действительные различные, мнимые или совпадающие зависимо от того будут ли проективные соответствия (37), (40) — (42) гиперболические, эллиптические или параболические.

16. В случае, когда проективные соответствия (37), (40) — (41) гиперболические, полагая, что

$$\lambda_3^1 = \lambda_4^2 = \lambda_1^3 = \lambda_2^4 = 0, \quad \lambda_3^2 = \lambda_4^1 = \lambda_1^4 = 1,$$
$$\lambda_2^3 = \lambda, \tag{44}$$

уравнения (19) — (24) запишем так:

$$\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \quad \omega_4^1 + \lambda\omega_3^2 = 0,$$
$$\sigma(\omega_4^3 - \lambda\omega_1^2) + \lambda\omega_1^3 - \sigma^2\omega_4^2 = 0,$$
$$\rho(\omega_1^2 - \omega_4^3) + \omega_4^2 - \rho^2\omega_1^3 = 0,$$
$$\sigma(\lambda\omega_3^4 - \omega_2^1) + \lambda\omega_2^4 - \sigma^2\omega_3^1 = 0,$$
$$\rho(\omega_2^1 - \omega_3^4) + \omega_3^1 - \rho^2\omega_2^4 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&d\sigma - \sigma(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \omega_2^3 - \sigma^2\omega_3^2 = 0,\\
&d\rho - \rho(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \omega_3^2 - \rho^2\omega_2^3 = 0,\\
&\rho(\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4) + (1+\lambda)\,\omega_3^2 - 2\rho^2\omega_2^3 = 0,\\
&\rho\sigma\, d\lambda + \lambda(2\rho\sigma - \lambda - 1)(\rho\omega_1^4 - \sigma\omega_3^2) = 0,\\
&\left[\omega_\alpha^p\,\omega_p^\alpha\right] = 0.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Точками (38) являются вершины A_1, A_2, а точками (43) — вершины A_4, A_3, причем точке A_4 соответствует точка A_1, а точке A_3 — точка A_2.

17. Если

$$
I = \lambda + 1 = 0, \tag{46}
$$

то проективные соответствия (40) и (42) являются инволюциями.

Если соответствие (46) имеет место для каждой пары соответственных лучей, то система (45) превращается в систему:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \quad \omega_4^1 - \omega_3^2 = 0,\\
&\sigma(\omega_4^3 + \omega_1^2) - \omega_1^3 - \sigma^2\omega_4^2 = 0,\\
&\rho(\omega_1^2 - \omega_4^3) + \omega_4^2 - \rho^2\omega_1^3 = 0,\\
&\sigma(\omega_3^4 + \omega_2^1) + \omega_2^4 + \sigma^2\omega_3^1 = 0,\\
&\rho(\omega_2^1 - \omega_3^4) + \omega_3^1 - \rho^2\omega_2^4 = 0,\\
&\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\rho\omega_2^3 = 0,\\
&\rho\omega_2^3 + \sigma\omega_3^2 = 0,\\
&d\rho - \sigma(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \omega_2^3 - \sigma^2\omega_3^2 = 0,\\
&d\rho - \rho(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \omega_3^2 - \rho^2\omega_2^3 = 0,\\
&[\omega_3^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^4] = 0.
\end{aligned} \tag{47}
$$

Система (47) в инволюции с характерами $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = 0$ и определяет решение с произволом одной функции от двух аргументов. Следовательно, такая пара комплексов, для которой имеет место соотношение (46), существует с произволом одной функции от двух аргументов.

18. Если $\lambda = 1$, то пара $(A_1A_2 \rightleftarrows A_4A_3)$ является парой T комплексов и система (45) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \quad \omega_4^1 + \omega_3^2 = 0,\\
&\omega_3^4 - \omega_2^1 + \left(\frac{1}{\sigma} + \rho\right)\omega_2^4 = 0,\\
&\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4 + 2\left(\frac{1}{\sigma} + \rho\right)\omega_1^4 = 0,\\
&\omega_4^3 - \omega_1^2 + \left(\frac{1}{\sigma} + \rho\right)\omega_1^3 = 0,\\
&\rho\omega_1^3 + \sigma\omega_4^2 = 0,\\
&\rho\omega_1^4 + \sigma\omega_4^1 = 0,\\
&\rho\omega_2^4 + \sigma\omega_3^1 = 0,\\
&d\rho + \frac{1}{2}\rho\left(\omega_p^p - \omega_\alpha^\alpha\right) = 0,\\
&d\sigma - \frac{1}{2}\sigma\left(\omega_p^p - \omega_\alpha^\alpha\right) = 0.
\end{aligned} \tag{48}
$$

Так как квадратичное уравнение системы (45) при $\lambda = 1$ есть алгебраическое следствие линейных уравнений системы (45), то система (48) образована только из линейных уравнений, вполне интегрируема и ее решение определяет особую пару $(A_1A_2 \rightleftarrows A_4A_3)$ с произволом десяти констант. Оказывается, что каждый комплекс этой особой пары является линейным комплексом.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
3. VI. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948.

APIE VIENĄ KOMPLEKSŲ DVEJETĄ

K. GRINCEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe yra gautas tiesių kompleksų dvejetas, kurio kiekvieno komplekso tiesinių elementų daugdaros yra triparametrinės. Minėtos tiesinių elementų daugdaros yra konstruojamos liečiamųjų tiesinių kompleksų pagalba.

ÜBER EIN PAAR GERADENKOMPLEXSE

K. GRINCEVIČIUS

(Zusammenfassung)

In dieser Abhandlung wird ein Paar der Geradenkomplexe konstruiert, für das zwei vierparametrische Mannigfaltigkeiten der ebenen Elemente, die durch Nullsysteme berührender linearer komplexe definiert sind, in die dreiparametrischen ausgeartet werden.