I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

# О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. МИТАЛАУСКАС

Теория локальных предельных теорем для одинаково распределенных независимых случайных величин уже получила довольно исчерпывающее развитие. Однако имеющиеся результаты для различно распределенных слагаемых далеки от окончательных и касаются лишь случая, когда предельное распределение нормально. В случае же устойчивых предельных распределений пока известна одна работа автора [1] (имеются в виду решетчатые случайные величины), где исследован довольно-таки специальный случай. Более общий случай исследуется в настоящей работе.

Для получения основного результата (теоремы 2) нам потребуется одна теорема интегрального типа (теорема 1).

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$.

Условимся говорить, что последовательность $\{F_k(x),\ k=1, 2, \ldots\}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $G_\alpha(x)$, если существуют постоянные $B_n>0$ и $A_n$, такие, что

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - A_n < x\right\} \to G_\alpha(x)$$

при $n\to\infty$.

Если $B_n=a_n n^{\frac{1}{\alpha}}$, где $0<a'<a_n<a''<\infty$, $0<\alpha<2$, то говорим об области нормального притяжения. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай.

**Теорема 1.** *Если последовательность* (1) *удовлетворяет условиям*

$$a)\qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_k(x)=\begin{cases}\left[c_1a_n^\alpha+\alpha_1(n,\ x)\right]\dfrac{1}{|x|^\alpha}, & x<0,\\[2mm] 1-\left[c_2a_n^\alpha+\alpha_2(n,\ x)\right]\dfrac{1}{x^\alpha}, & x>0,\end{cases}$$

*где* $c_1\geqslant 0$, $c_2\geqslant 0$, $c_1+c_2>0$, $\alpha_1(n,\ x)\to 0$ *при* $n\to\infty$, $x\to-\infty$ и $\alpha_2(n,\ x)\to 0$ *при* $n\to\infty$ и $x\to\infty$;

*b)* $M|\xi_k|^\delta<K$, *где* $\delta<\alpha$, *а* $K$ *не зависит от* $k$; *то величины* $\frac{\xi_k}{B_n}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *бесконечно малы, и последовательность* $\{F_k(x),\ k=1, 2,\ldots\}$ *принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона* $G_\alpha(x)$.

Доказательство. Проверим сначала бесконечную малость величин $\frac{\xi_k}{B_n}$. Действительно,

$$P\{|\xi_k| > \varepsilon B_n\} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon B_n)^\delta} \cdot \int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} |x|^\delta \, dF_k(x) \leqslant \frac{K}{(\varepsilon B_n)^\delta};$$

Поэтому

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n} P\{|\xi_k|>\varepsilon B_n\} \leqslant \frac{K}{(\varepsilon B_n)^\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Далее нам придется проверить, выполнены ли условия 4 теоремы § 25 книги [2] в нашем случае. При $x<0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(B_n x) = n\,[c_1 a_n^\alpha + \alpha_1(n,\ B_n x)]\,\frac{1}{B_n^\alpha |x|^\alpha} =$$

$$= \frac{c_1}{|x|^\alpha} + \frac{\alpha_1(n,\ B_n x)}{a_n^\alpha |x|^\alpha} \to \frac{c_1}{|x|^\alpha} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

При $x>0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} [F_k(B_n x) - 1] = -n\,[c_2 a_n^\alpha + \alpha_2(n,\ B_n x)]\,\frac{1}{B_n^\alpha x^\alpha} =$$

$$= -\frac{c_2}{x^\alpha} - \frac{\alpha_2(n,\ B_n x)}{a_n^\alpha x^\alpha} \to -\frac{c_2}{x^\alpha} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Остается доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_k(B_n x) - \left( \int\limits_{|x|<\varepsilon} x\, dF_k(B_n x) \right)^2 \right\} = \sigma^2 = 0.$$

Так как

$$0 < \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_k(B_n x) - \left( \int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_k(B_n x)\right)^2 < \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_k(B_n x),$$

то достаточно будет показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_k(B_n x) = 0.$$

Метод доказательства по существу совпадает с методом, примененным в статье [3]. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_k(B_n x) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|<\varepsilon B_n} y^2 dF_k(y) =$$

$$= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|\leqslant B_n^\eta} y^2 dF_k(y) + \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{B_n^\eta<|y|<\varepsilon B_n} y^2 dF_k(y),$$

где $0<\eta<1-\frac{\alpha}{2}$. Тогда $2\eta+\alpha<2$ и

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|\leqslant B_n^\eta} y^2 dF_k(y) \leqslant \frac{1}{a_n^\alpha}\, \frac{B_n^{2\eta+\alpha}}{B_n^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Далее,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<|y|<\varepsilon B_n} y^2dF_k(y)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n} y^2dF_k(y)-$$
$$-\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n} y^2dF_k(-y). \tag{2}$$

Исследуем первое слагаемое. Интегрируя по частям, имеем

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n} y^2dF_k(y)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{y^2[F_k(y)-1]\Big|_{B_n^{\eta}}^{\varepsilon B_n}\right\}-$$
$$-\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B} [F_k(y)-1]\,dy^2. \tag{3}$$

Подставляем пределы интегрирования и используем условие $a$):

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{y^2[F_k(y)-1]\Big|_{B_n^{\eta}}^{\varepsilon B_n}\right\}=-\varepsilon^2 n\,[c_2a_n^{\alpha}+\alpha_2(n,\ \varepsilon B_n)]\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}B_n^{\alpha}}+$$
$$+\frac{B_n^{2\eta}}{B_n^2}n\,[c_2a_n^{\alpha}+\alpha_2(n,\ B_n^{\eta})]\frac{1}{B_n^{\alpha\eta}}=-c_2\varepsilon^{2-\alpha}+$$
$$+\frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{a_n^{\alpha}}\alpha_2(n,\ \varepsilon B_n)-c_2\frac{B_n^{\eta(2-\alpha)+\alpha}}{B_n^2}-\frac{1}{a_n^{\alpha}}\frac{B_n^{\eta(2-\alpha)+\alpha}}{B_n^2}\alpha_2(n,\ B_n^{\eta})\to$$
$$\to-c_2\varepsilon^{2-\alpha}\quad\text{при } n\to\infty,\quad\text{так как } \eta(2-\alpha)+\alpha<2.$$

Ко второму слагаемому (3) также применяем условие $a$):

$$-\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}[F_k(y)-1]\,dy^2=\frac{n}{B_n^2}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}[c_2a_n^{\alpha}+\alpha_2(n,\ y)]\frac{1}{y^{\alpha}}\,dy^2=$$
$$=\frac{2c_2}{B_n^{2-\alpha}}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}y^{1-\alpha}dy+\frac{2B_n^{\alpha}}{a_n^{\alpha}B_n^2}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}\alpha_2(n,\ y)y^{1-\alpha}dy. \tag{4}$$

Оценим первое слагаемое в (4):

$$\frac{2c_2}{B_n^{2-\alpha}}\frac{y^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big|_{B_n^{\eta}}^{\varepsilon B_n}=\frac{2c_2\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{2c_2}{2-\alpha}\frac{B_n^{\eta(2-\alpha)+\alpha}}{B_n^2}\to\frac{2c_2}{2-\alpha}\,\varepsilon^{2-\alpha}\quad\text{при } n\to\infty.$$

Для второго слагаемого в (4) получаем аналогично

$$\left|\frac{2B_n^{\alpha}}{a_n^{\alpha}B_n^2}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}\alpha_2(n,\ y)y^{1-\alpha}dy\right|\leqslant\left|\frac{2B_n^{\alpha}}{a_n^{\alpha}B_n^2}\max_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}\alpha_2(n,\ y)\cdot\frac{y^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big|_{B_n^{\eta}}^{\varepsilon B_n}\right|\to0$$

при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n}y^2dF_k(y)=\frac{\alpha}{2-\alpha}c_2\varepsilon^{2-\alpha}.$$

Аналогично оценив второе слагаемое формулы (2), получим

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_n^{\eta}<y<\varepsilon B_n} y^2 dF_k(-y)\right\}=\frac{\alpha}{2-\alpha}c_1\varepsilon^{2-\alpha}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|y|<\varepsilon B_n} y^2 dF_k(y)=\frac{\alpha}{2-\alpha}(c_1+c_2)\varepsilon^{2-\alpha}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|y|<\varepsilon B_n} y^2 dF_k(y)=0.$$

Этим и заканчивается доказательство теоремы 1.

Переходим к формулировке и доказательству основного результата.

Для последовательности (1), принимающей только целочисленные значения, имеет место локальная предельная теорема, если при $n\to\infty$ равномерно по $m\ (-\infty<m<\infty)$

$$B_n P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k=m\right\}-g\left(\frac{m-A_n}{B_n}\right)\to 0, \tag{5}$$

где $g(x)$ — плотность, соответствующая функции распределения устойчивого закона $G_\alpha(x)$. Если соотношение (5) выполняется для любой последовательности целочисленных случайных величин, отличающейся от (1) конечным числом членов, то будем говорить, что последовательность (1) удовлетворяет локальной предельной теореме в усиленной форме (Л. Т. У).

**Теорема 2.** *При соблюдении условий а) и в) для того, чтобы последовательность* (1) *удовлетворяла Л. Т. У., необходимо и достаточно, чтобы для всех целых* $q\geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n}\min_{0\leqslant m<q}P\left\{\xi_k\not\equiv m \pmod q\right\}=\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость условия (6) следует из соображений, примененных Ю. А. Розановым [4] при доказательстве локальной предельной теоремы для сходимости к нормальному закону распределения. Поэтому докажем только достаточность.

Характеристическая функция случайной величины $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$

$$f(t,\ S_n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{itm}P\{S_n=m\}.$$

Имеем

$$2\pi P\{S_n=m\}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itm}f(t,\ S_n)\,dt=\frac{1}{B_n}\int_{-\pi B_n}^{\pi B_n}e^{-it\frac{m-A_n}{B_n}}f\left(t,\ \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)dt.$$

Известно, что

$$2\pi g\left(\frac{m-A_n}{B_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\frac{m-A_n}{B_n}}f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — характеристическая функция устойчивого закона $G_\alpha(x)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$2\pi\left[B_n P\{S_n = m\} - g\left(\frac{m-A_n}{B_n}\right)\right] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \to 0.$$

Здесь

$$I_1 = \int\limits_{|t|<\theta} e^{-it\frac{m-A_n}{B_n}}\left[f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right) - f(t)\right]dt,$$

$$I_2 = -\int\limits_{|t|\geqslant\theta} e^{-it\frac{m-A_n}{B_n}} f(t)\,dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\theta\leqslant|t|<\varepsilon B_n} e^{-it\frac{m-A_n}{B_n}} f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\varepsilon B_n\leqslant|t|\leqslant\pi B_n} e^{-it\frac{m-A_n}{B_n}} f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)dt.$$

Постоянные $\theta > 0$ и $\varepsilon > 0$ выбираются позднее.

Оценим каждый интеграл в отдельности.

Из теоремы 1 следует, что

$$f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right) \to f(t)$$

для всех $|t|<\theta$, поэтому $I_1 \to 0$ при $n\to\infty$ для любого постоянного $\theta$.

Далее получаем

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{|t|\geqslant\theta} |f(t)|\,dt \leqslant 2\int\limits_{\theta}^{\infty} e^{-c|t|^\alpha}dt, \quad \text{где} \quad c>0.$$

При достаточно большом $\theta$ интеграл $I_2$ сколь угодно мал.

Оценим $\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|$ в интервале $\theta \leqslant |t| < \varepsilon B_n$. Пусть $f_k(t)$ — характеристическая функция величины $\xi_k$. Ясно, что

$$|f_k(t)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos t(x-y)\,dF_k(x)\,dF_k(y).$$

Тогда

$$1-|f_k(t)|^2 \geqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{\frac{\pi}{3}\leqslant|t(x-y)|<\frac{5\pi}{3}} dF_k(x)\,dF_k(y) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{3|t|}+y\leqslant x<\frac{5\pi}{3|t|}+y} dF_k(x)\right)dF_k(y) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[F_k\left(\frac{5\pi}{3|t|}+y\right) - F_k\left(\frac{\pi}{3|t|}+y\right)\right]dF_k(y).$$

Так как

$$\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|=\prod_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|,$$

то

$$\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_{-N}^{N}\left[F_k\left(\frac{5\pi B_n}{3|t|}+y\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-F_k\left(\frac{\pi B_n}{3|t|}+y\right)\right]dF_k(y)\right\}\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[F_k\left(\frac{5\pi B_n}{3|t|}-N\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-F_k\left(\frac{\pi B_n}{3|t|}+N\right)\right]\int_{-N}^{N}dF_k(y)\right\}$$

при любом $N<\frac{2\pi}{3\varepsilon}$. Так как

$$\int_{-N}^{N}dF_k(y)\geqslant 1-\frac{1}{N^{\delta}}\int_{|y|>N}|y|^{\delta}\,dF_k(y)\geqslant\frac{1}{2}$$

при достаточно большом $N$, то для $\Theta\leqslant|t|<\varepsilon B_n$ при достаточно малом $\varepsilon$

$$\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left[F_k\left(\frac{5\pi B_n}{3|t|}-N\right)-F_k\left(\frac{\pi B_n}{3|t|}+N\right)\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-c'|t|^{\alpha}\},$$

где $c'>0$ — некоторая постоянная. Тогда для интеграла $I_3$ получаем:

$$|I_3|\leqslant\int_{\Theta\leqslant|t|<\varepsilon B_n}\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|dt\leqslant 2\int_{\Theta}^{\infty}\exp\ -c'|t|^{\alpha}\}\,dt.$$

При достаточно большом $\Theta$ интеграл $I_3$ сколь угодно мал.

Для оценки $I_4$ заметим, что

$$\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[1-\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^2\right]\right\},$$

а

$$|f_k(t)|^2=\sum_{m_1}\sum_{m_2}p_{km_1}p_{km_2}\cos t(m_1-m_2),$$

где $p_{km}=P\{\xi_k=m\}$. Поэтому после замены $u=\frac{t}{2\pi B_n}$ имеем

$$|I_4|\leqslant\int_{\varepsilon B_n\leqslant|t|\leqslant\pi B_n}\left|f\left(t, \frac{S_n-A_n}{B_n}\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi B_n\int_{\frac{\varepsilon}{2\pi}\leqslant|u|\leqslant\frac{1}{2}}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m_1}\sum_{m_2}p_{km_1}p_{km_2}\sin^2\pi u(m_1-m_2)\right\}du.$$

Известно, что при любом $\tau>1$ число $u$ можно представить в виде

$$u=\frac{a}{q}+t, \tag{7}$$

причем $a$, $q$ — целые числа, о. н. д. $(a, q)=1$, $0<q<\tau$, $|t|<\frac{1}{q\tau}$. Имеем

$$|I_4| \leqslant 2\pi B_n \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2\pi} \leqslant |u| \leqslant \frac{1}{2}} \exp\left\{-\alpha_n(u)-\beta_n(u)\right\} du,$$

где

$$\alpha_n(u)=\sum_{k=1}^{n} {\sum_{m_1}}' {\sum_{m_2}}' p_{km_1} p_{km_2} \sin^2 \pi\left(\frac{a}{q}+t\right)(m_1-m_2),$$

$$\beta_n(u)=\sum_{k=1}^{n} {\sum_{m_1}}'' {\sum_{m_2}}'' p_{km_1} p_{km_2} \sin^2 \pi t\,(m_1-m_2).$$

Здесь ${\sum\limits_{m_1}}' {\sum\limits_{m_2}}'$ обозначает суммирование по таким $m_1$ и $m_2$, что $m_1 \not\equiv m_2 \pmod q$, а ${\sum\limits_{m_1}}'' {\sum\limits_{m_2}}''$ — по таким $m_1$ и $m_2$, что $m_1 \equiv m_2 \pmod q$. Тогда можем написать, что

$$|I_4| \leqslant \sum_{\frac{a}{q}} \left(I_4^{(1)}+I_4^{(2)}+I_4^{(3)}\right),$$

где суммирование ведется по всем несократимым дробям $\frac{a}{q}$ из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, знаменатель которых $q$ не превышает некоторого $\tau$, подбираемого позднее, а

$$I_4^{(1)}=4\pi B_n \int\limits_0^{\varphi(n) n^{-\frac{1}{\alpha}}} \exp\left\{-\alpha_n(u)-\beta_n(u)\right\} dt,$$

$$I_4^{(2)}=4\pi B_n \int\limits_{\varphi(n) n^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\delta_n} \exp\left\{-\alpha_n(u)-\beta_n(u)\right\} dt,$$

$$I_4^{(3)}=4\pi B_n \int\limits_{\delta_n}^{\frac{1}{q\tau}} \exp\left\{-\alpha_n(u)-\beta_n(u)\right\} dt.$$

Здесь $\varphi(n)$ — функция, медленно стремящаяся в бесконечность, а $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ (более конкретно $\varphi(n)$ и $\delta_n$ выберем позднее).

Пусть $0 \leqslant t \leqslant \varphi(n) n^{-\frac{1}{\alpha}}$. Тогда

$$\alpha_n(u) \geqslant \sum_{k=1} \; {\sum_{|m_1-m_2| \leqslant \frac{1}{2qt}}}' {\sum}' p_{km_1} p_{km_2} \sin^2 \pi\left[\frac{a}{q}(m_1-m_2)+t(m_1-m_2)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \; {\sum_{|m_1-m_2| \leqslant \frac{1}{2qt}}}' {\sum}' p_{km_1} p_{km_2} \sin^2 \pi\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2q}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \delta \sum_{k=1}^{n} \sum_{m_1}' \sum_{m_2}' p_{km_1} p_{km_2} - \delta \sum_{k=1}^{n} \sum_{m_1 - m_2} \sum_{> \frac{1}{2qt}} p_{km_1} p_{km_2} \geqslant$$

$$\geqslant \delta \sum_{k=1}^{n} \min_{0 \leqslant m_1 < q} P\left\{\xi_k \not\equiv m \,(\mathrm{mod}\, q)\right\} - 2\delta \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| > \frac{1}{2qt}} p_{km}.$$

Первое слагаемое ввиду условия (6) при $n \to \infty$ бесконечно возрастает. А так как

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{|m| > \frac{1}{2qt}} p_{km} = \sum_{k=1}^{n} P\left\{|\xi_k| > \frac{1}{4qt}\right\} \leqslant c_1 n t^{\alpha} \leqslant c_1 \left(\varphi(n)\right)^{\alpha},$$

то возможно так подобрать функцию $\varphi(n)$, что

$$\alpha_n(u) > \varphi_1(n) \quad \text{при} \quad t \leqslant \varphi(n) n^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{где} \quad \varphi_1(n) \to \infty$$

при $n \to \infty$. Кроме того, имеем

$$\alpha_n(u) + \beta_n(u) \geqslant \delta_2 t^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\frac{1}{4qt} \leqslant m_1 - m_2 \leqslant \frac{1}{2qt}} \sum (m_1 - m_2)^2 p_{km_1} p_{km_2} \geqslant$$

$$\geqslant \delta_3 \sum_{k=1} \sum_{|m_2| \leqslant \frac{1}{16qt}} \Bigl( \sum_{\frac{1}{4qt} + m_2 \leqslant m_1 \leqslant \frac{1}{2qt} + m_2} p_{km_1} \Bigr) p_{km_2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \delta_3 \sum_{k=1}^{n} P\left\{ \frac{5}{16qt} \leqslant \xi_k \leqslant \frac{7}{16qt} \right\} \geqslant c n t^{\alpha},$$

если только $t \to 0$. Ввиду очевидного неравенства

$$\alpha_n(u) + \beta_n(u) \geqslant \frac{1}{2} \alpha_n(u) + \frac{1}{2}\left[\alpha_n(u) + \beta_n(u)\right]$$

имеем

$$I_4^{(1)} \leqslant c_2 n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\varphi(n)} e^{-\frac{1}{2}\varphi_1(n) - \frac{1}{2} c n t^{\alpha}} dt.$$

Подстановкой $n^{\frac{1}{\alpha}} t = y$ получим

$$I_4^{(1)} \leqslant c_2 e^{-\frac{1}{2}\varphi_1(n)} \int_0^{\varphi(n)} e^{-\frac{1}{2} c y^{\alpha}} dy \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При помощи аналогичной подстановки получаем также

$$I_4^{(2)} \leqslant c_2 n^{\frac{1}{\alpha}} \int_{\varphi(n) n^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\delta_n} e^{-cnt^{\alpha}} dt \leqslant c_2 \int_{\varphi(n)}^{\infty} e^{-cy^{\alpha}} dy \to 0$$

при $n \to \infty$.

Далее имеем

$$I_4^{(3)} \leqslant c_2 n^{\frac{1}{\alpha}} \int_{\delta_n}^{\frac{1}{q\tau}} \exp\left\{ -\delta t^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{|m_1 - m_2| < \frac{\tau}{2}} \sum (m_1 - m_2)^2 p_{km_1} p_{km_2} \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant c_2 n^{\frac{1}{\alpha}} \int\limits_{\delta_n}^{\frac{1}{q\tau}} \exp\{-cnt^2\}\, dt \leqslant c_2 n^{\frac{1}{\alpha}} e^{-cn\delta_n^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, если мы выберем $\delta_n > \sqrt{\frac{1}{\alpha c} \frac{\ln n}{n}}$. Отсюда следует, что $|I_4| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 2 полностью доказана.

Автор глубоко признателен И. Кубилюсу и В. Статулявичусу, ценными замечаниями способствовавшим появлению данной работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила
в редакцию
15. I. 1961.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Миталаускас. О локальной предельной теореме для устойчивых предельных распределений. Теор. вероят. и ее прим., 7, 2 (1962).
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
3. Б. А. Рогозин. Некоторые задачи из области предельных теорем. Теор. вероят. и ее прим., 3, 2 (1958), 186—196.
4. Ю. А- Розанов. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений Теор. вероят. и ее прим., 2, 2 (1957), 275-281.

## ÜBER DEN LOKALEN GRENZWERTSATZ IM FALLE DER STABILEN GRENZVERTEILUNGEN

A. MITALAUSKAS

*(Zusammenfassung)*

Im Artikel ist ein Resultat des Verfassers [1] verbessert. Es sei (1) eine Folge unabhängiger ganzzahliger Zufallsgrößen. Man sagt, daß für die Folge (1) der sog. lokale Grenzwertsatz in starker Form gilt, wenn für jede Folge, die sich nur in endlich vielen Gliedern von (1) unterscheidet, Relation (3) erfüllt ist. Im Artikel wird der folgende Satz bewiesen: Die Bedingung (6) ist notwendig und hinreichend dafür, daß für die Folge (1) der Zufallsgrößen, die Bedingungen *a*) und *b*) erfüllen, der lokale Grenzwertssatz in starker Form gelte.

## LOKALINĖ RIBINĖ TEOREMA STABILAUS RIBINIO PASISKIRSTYMO ATVEJU

A. MITALAUSKAS

*(Reziumė)*

Šiame darbe pagerinamas autoriaus rezultatas [1]. Tegu (1) — nepriklausomų sveikų atsitiktinių dydžių seka. Sakoma, kad (1) sekai galioja sustiprinta lokalinė ribinė teorema, jei kiekvienai sekai, kuri skiriasi nuo (1) tik baigtiniu narių skaičiumi, yra patenkinta (3) pareinamybė. Darbe įrodoma teorema: Sąlyga (6) yra būtina ir pakankama, kad (1) sekai atsitiktinių dydžių, patenkinančių sąlygas *a*) ir *b*), galiotų sustiprinta lokalinė ribinė teorema.