I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

ПРЕПЯТСТВИЯ ДЛЯ СЕКУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВУКРАТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. МАТУЗЯВИЧЮС

1. Введение

В настоящей работе расслоенное пространство понимается в смысле Серра [1]. Напомним его определение.

Расслоенным пространством называется тройка (P, p, B), где P и B — топологические пространства, а p — непрерывное отображение пространства P на B, удовлетворяющее следующему условию[1].

Каковы бы ни были непрерывные отображения

$$f: E\times I\to B,$$

$$g: E\to P$$

(где E — конечный полиэдр, а I — сегмент [0. 1]), связанные соотношением

$$(p \circ g)(x)=f(x, 0)$$

для всех $x\in E$, существует такое непрерывное отображение

$$h: E\times I\to P,$$

что

$$p \circ h=f$$

и, кроме того,

$$h(x, 0)=g(x)$$

для всех

$$x\in E.$$

Это условие часто называется условием существования накрывающей гомотопии.

Так как в советской литературе определение препятствия и различающей для расслоенных пространств отсутствует, то здесь определим[2] препятствие и различающую для расслоенного пространства (P, p, B), однако, лишь для случая, когда базой служит односвязный симплициальный комплекс B. Слой $C=p^{-1}(x_0)$ над фиксированной точкой $x_0\in B$ предполагается гомотопически простым в некоторой размерности r.

[1] Для справедливости условия в такой формулировке достаточно потребовать, чтобы оно было выполнено лишь для случая, когда полиэдр E является n-мерным кубом $n=0, 1, 2, \ldots$

[2] Эти определения заимствованы из лекции В. Г. Болтянского по гомотопической топологии.

Пусть над r-мерным остовом B^r базисного пространства B задана в расслоенном пространстве (P, p, B) секущая поверхность $\mathfrak{S}$, т.е. такое отображение $\mathfrak{S}: B^r \to P$, что $p \circ \mathfrak{S}$ есть тождественное отображение $B^r \to B^r$. Далее, пусть T^{r+1} — произвольный, $(r+1)$-мерный ориентированный симплекс комплекса B, а $\dot{T}^{r+1} = S^r$ — его когерентно ориентированная граница. Будем рассматривать секущую поверхность $\mathfrak{S}$ только на S^r.

По определению секущей поверхности имеем $p \circ \mathfrak{S} = e$, где e — тождественное отображение ориентированной сферы S^r на себя.

Пусть h_τ — деформация, соединяющая тождественное отображение

$$h_0 = e : S^r \to S^r$$

с отображением

$$h_1 : S^r \to x_0$$

и построенная таким образом, что сначала сфера S^r стягивается по симплексу T^{r+1} в точку, а затем эта точка перемещается в x_0.

Применяя условия существования накрывающей гомотопии для расслоенного пространства (P, p, B), получаем такое семейство отображений

$$\mathfrak{S}_\tau : S^r \to P,$$

что

$$p \circ \mathfrak{S}_\tau = h_\tau.$$

Но непрерывное отображение $\mathfrak{S}_1$ ориентированной r-мерной сферы S^r в слой C определяет некоторый элемент гомотопической группы $\pi^r(C)$, который поставим в соответствие симплексу T^{r+1} и обозначим через $z_{\mathfrak{S}}^{r+1}(T^{r+1})$. Без труда доказывается, что элемент $z_{\mathfrak{S}}^{r+1}(T^{r+1})$ не зависит от выбора элементов построения. При перемене ориентации симплекса T^{r+1} меняется и ориентация его границы, так что

$$z_{\mathfrak{S}}^{r+1}(-T^{r+1}) = -z_{\mathfrak{S}}^{r+1}(T^{r+1}).$$

Функция $z_{\mathfrak{S}}^{r+1}$, заданная на $(r+1)$-мерных ориентированных симплексах комплекса B, является $(r+1)$-мерной контрацепью по области коэффициентов $\pi^r(C)$. Эта контрацепь называется препятствием для секущей поверхности $\mathfrak{S}$.

Определенное таким образом препятствие $z_{\mathfrak{S}}^{r+1}$ является контрациклом. Действительно, пусть T^{r+2} — произвольный, $(r+2)$-мерный симплекс комплекса B, обозначим r-мерный остов этого симплекса, через L^r. Далее, возьмем выше построенное отображение $\mathfrak{S}_1$ сразу для всего остова L^r:

$$\mathfrak{S}_1 : L^r \to C.$$

Тогда для любой $(r+1)$-мерной грани T^{r+1} симплекса T^{r+2} отображение $\mathfrak{S}_1$ границы $\dot{T}^{r+1}$ симплекса T^{r+2} в C определяет элемент группы $\pi^r(C)$, равный $z_{\mathfrak{S}}^{r+1}(T^{r+1})$. Таким образом, вопрос сводится к случаю непрерывного отображения r-мерного остова симплекса T^{r+2} в слой C, и поэтому значение контрацепи $\nabla z_{\mathfrak{S}}^{r+1}$ на симплексе T^{r+1} равно нулю [2].

Остальные свойства так определенного препятствия аналогичны тем, которые имеются в случае косого произведения [2].

Теперь определим для расслоенного пространства (P, p, B) различающую.

Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — две секущие поверхности расслоенного пространства (P, p, B), заданные над r-мерным остовом B^r и совпадающие над $(r-1)$-мерным остовом B^{r-1}. Далее, пусть T^r — произвольный ориентированный r-мерный симплекс комплекса B. Возьмем два экземпляра T^+ и T^- этого симплекса T^r, которые ориентируем так же, как и T^r и „склеим" по их общей границе. Полученную сферу $S^r = T^+ \cup T^-$ ориентируем согласованно с симплексом T^+ (тогда симплекс T^- будет иметь ориентацию, противоположную ориентации сферы S^r).

Определим отображение

$$\mathfrak{S}: S^r \to P,$$

положив

$$\mathfrak{S}(x) = \begin{cases} \mathfrak{S}_1(x) & \text{при} \quad x \in T^+, \\ \mathfrak{S}_2(x) & \text{при} \quad x \in T^- \end{cases}$$

и отображение

$$e: S^r \to T^r,$$

тождественно отображающее каждый симплекс T^+, T^- на T^r.

Тогда также по определению секущей поверхности $\mathfrak{S}_i$ $(i=1, 2)$ имеем

$$p \circ \mathfrak{S} = e.$$

Пусть k'_t — деформация, соединяющая тождественное отображение k'_0 симплекса T^r в B с отображением k'_1, переводящим весь симплекс T^r в точку $x_0 \in B$. (Как и выше, можем считать, что деформация k'_t сначала стягивает симплекс T^r по себе в точку, а затем переводит эту точку в x_0).

Положим

$$k_t = k'_t \circ e.$$

Исходя из соотношения

$$p \circ \mathfrak{S} = e = k_0$$

и применяя условие существования накрывающей гомотопии для расслоенного пространства (P, p, B), найдем такую деформацию $\mathfrak{S}^t$ отображения $\mathfrak{S}^0 = \mathfrak{S}$, что

$$p \circ \mathfrak{S}^t = k_t.$$

Но отображение $\mathfrak{S}^1$ сферы S^r в слой C определяет некоторый элемент группы $\pi^r(C)$, который поставим в соответствие симплексу T^r. Обозначим его через $d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(T^r)$ и назовем получающуюся контрацепь различающей для секущих поверхностей $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$. Также свойства определенной таким образом различающей $d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}$ совершенно аналогичны тем, которые имеются в случае косого произведения [2].

2. Препятствия для секущих поверхностей индуцированных расслоений

Пусть (C, p', C_1) — расслоенное пространство с базисным пространством C_1, гомотопически простым в некоторой размерности r, и слоем $C' = (p')^{-1}(*)$, где $*$ — фиксированная точка пространства C_1.

Пусть α — произвольный элемент гомотопической группы $\pi^r(C_1)$, и f — отображение r-мерной ориентированной сферы S^r в C_1, определяющее элемент α. Предположим, что отображение f переводит некоторую точку x_0 сферы S^r в точку $*$.

Рассмотрим прямое произведение $S^r \times C$, и его естественные проекции:

$$p: S^r \times C \to S^r,$$
$$h: S^r \times C \to C.$$

Расслоенное пространство (C_1, p', C_1) и отображение

$$f: S^r \to C_1$$

порождают индуцированное расслоенное пространство (C_f, p, S^r) над S^r с тем же слоем $C' = p^{-1}(x_0)$. Пространство C_f определяется как подпространство прямого произведения $S^r \times C$, состоящее из всех таких пар (x, c), где $x \in S^r$, $c \in C$, которые удовлетворяют соотношению

$$f(x) = p'(c).$$

Проекцией p расслоенного пространства (C_f, p, S^r) служит естественное отображение

$$p: S^r \times C \to S^r,$$

рассматриваемое на пространстве $C_f \subset S^r \times C$ и также обозначаемое через

$$p: C_f \to S^r.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} C_f \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[d, "p'"] \\ S^r \arrow[r, "f"] & C_1. \end{tikzcd}$$

Коммутативность этой диаграммы сразу вытекает из определения отображения p.

Действительно, для любой точки $(x, c) \in C_f$ имеем:

$$(f \circ p)(x, c) = f(x),$$
$$(p' \circ h)(x, c) = p'(c).$$

В силу соотношения

$$f(x) = p'(c)$$

получаем

$$(f \circ p)(x, c) = (p' \circ h)(x, c).$$

Рассмотрим следующее клеточное разбиение r-мерной сферы S^r. Пусть оно состоит из одной нульмерной клетки x_0, одной $(r-1)$-мерной клетки $S^{r-1} \setminus x_0$, где S^{r-1} — большая $(r-1)$-мерная сфера, проходящая через точку x_0, и двух r-мерных клеток T^+ и T^-, определяемых сферой S^{r-1}.

Над большой сферой S^{r-1} базисного пространства S^r в индуцированном расслоенном пространстве (C_f, p, S^r) можно всегда построить секущую поверхность.

Например, строим искомую секущую поверхность так: выбираем гомотопию k, стягивающую полусферу T^+ по себе в точку x_0. Гомотопия k соединяет тождественное отображение

$$g_0 = e: T^+ \to T^+$$

с отображением

$$g_1: T^+ \to x_0.$$

В слое $C' = C_{x_0}$, лежащем над точкой x_0, выбираем произвольную точку $y \in C_{x_0}$ и определяем отображение

$$\varphi_1: T^+ \to C_{x_0},$$

полагая

$$\varphi_1(T^+) = y.$$

Рассмотрим теперь гомотопию k в обратном порядке, как гомотопию отображения g_1 в g_0, и построим для нее накрывающую гомотопию

$$\psi: T^+ \times I \to C_f.$$

Рассматриваемая над $T^+ \times 0$ эта накрывающая гомотопия даёт такое отображение

$$\varphi_0: T^+ \to C_f,$$

что

$$p \circ \varphi_0 = g_0 = e,$$

т. е. φ_0 есть секущая поверхность над всей полусферой T^+.

При попытке распространения секущей поверхности, заданной над S^{r-1}, на все базисное пространство S^r индуцированного расслоенного пространства (C_f, p, S^r) возникает первое препятствие z^r — контрацикл, принимающий на каждой r-мерной клетке базисного пространства значение из группы $\pi^{r-1}(C')$.

Класс контрагомологий этого контрацикла обозначим через $\chi(\alpha)$ и покажем, что так определенный класс контрагомологий $\chi(\alpha)$ не зависит от выбора отображения f, принадлежащего классу α.

Действительно, имеем секущую поверхность φ_0 над $(r-1)$-мерной большой сферой S^{r-1}, т. е. такое отображение

$$\varphi_0: S^{r-1} \to C_f,$$

что

$$p \circ \varphi_0 = e.$$

Из коммутативности выше написанной диаграммы следует, что

$$p' \circ h \circ \varphi_0 = f \circ p \circ \varphi_0 = f.$$

Определим значение первого препятствия z^r на верхней полусфере T^+ следующим образом: выбирая гомотопию k_τ, стягивающую верхнюю полусферу T^+ по себе в точку x_0, имеем

$$p' \circ (h \circ \varphi_0) = f \circ k_0,$$

где

$$k_0 = e: T^+ \to T^+.$$

По условию для расслоенного пространства (C, p', C_1) сущестует такая гомотопия $(h \circ \varphi_0)_\tau$ отображения

$$(h \circ \varphi_0) = (h \circ \varphi_0)_0: T^+ \to C$$

в отображение

$$(h \circ \varphi_0)_1: T^+ \to C' = (p')^{-1}(*),$$

что

$$p' \circ (h \circ \varphi_0)_\tau = f \circ k_\tau.$$

Тогда отображение $(h \circ \varphi_0)_1$ $(r-1)$-мерной большой сферы S^{r-1} (соответственно ориентированной границы полусферы T^+) в слой $C' = (p')^{-1}(*)$ определяет элемент группы $\pi^{r-1}(C')$, который равен $z^r(T^+)$.

Далее, пусть $f = f_0$ и f_1 — любые два отображения, принадлежащие классу α, а f_t — гомотопия, соединяющая отображения f_0 и f_1 и обладающая тем свойством, что некоторая точка $x_0 \in S^{r-1}$ переходит все время в $*$, т. е.

$$f_t(x_0) = *, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Теперь, фиксируя параметр τ, будем менять параметр t. Для отображения $f=f_0$ имеем

$$p'\circ(h\circ\varphi_0)_\tau=f_0\circ k_\tau.$$

Применяя вторично условие существования накрывающей гомотопии для расслоенного пространства $(C,\ p',\ C_1)$, для параметра t, получаем такое семейство отображений, зависящее от τ, t, что

$$p'\circ(h\circ\varphi_0)_{\tau t}=f_t\circ k_\tau.$$

Отображение $(h\circ\varphi_0)_{\tau t}$ вышеуказанным образом определяет при $\tau=1$ и любом t значение препятствия z^r над верхней полусферой T^+ для расслоенного пространства C_{f_t}. Из непрерывности отображения $(h\circ\varphi_0)_{1t}$ по t следует теперь, что оно определяет такое же значение препятствия над верхней полусферой для отображения f_1, какое и для отображения f_0. Совершенно аналогично доказывается, что значение препятствия z^r и над нижней полусферой T^- не зависит от выбора отображения f из класса α.

Таким образом, хотя отображения f_0 и f_1 индуцируют два различные расслоенные пространства C_{f_0}, C_{f_1}, но, очевидно, выше определенное препятствие для них будет одинаковое. Поэтому класс контрагомологии $\chi(\alpha)$ определен корректно.

Теорема. Отображение

$$\chi:\pi^r(C_1)\to\pi^{r-1}(C')$$

является композицией изоморфизма

$$(p'_*)^{-1}:\pi^r(C_1)\to\pi^r(C,\ C')$$

и гомоморфизма

$$\partial':\pi^r(C,\ C')\to\pi^{r-1}(C');$$

иначе говоря, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi^r(C_1) \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "(p'_*)^{-1}"'] & & \pi^{r-1}(C') \\
& \pi^r(C,\ C') \arrow[ur, "\partial'"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Это означает, что χ есть граничный гомоморфизм Δ точной гомотопической последовательности

$$\ldots\to\pi^r(C)\xrightarrow{p'_*}\pi^r(C_1)\xrightarrow{\Delta}\pi^{r-1}(C')\to\pi^{r-1}(C)\to\ldots$$

расслоенного пространства $(C,\ p',\ C_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $\alpha\in\pi^r(C_1)$, а f — сфероид класса α, который нижнюю полусферу T^- r-мерной сферы S^r отображает в C_1, а всю верхнюю полусферу T^+ отображает в точку $*\in C_1$, в частности, границу $\dot{T}^-=S^{r-1}$ полусферы T^- переводит тоже в точку $*$:

$$f:T^-\to C_1,$$

$$f:T^+\to *,$$

$$f:\dot{T}^-\to *.$$

Далее, по условию существования накрывающей гомотопии для расслоенного пространства (C, p', C_1) существует такое отображение

$$F: T^- \to C,$$

что

$$p' \circ F = f.$$

Отображение F переводит границу S^{r-1} полусферы T^- в слой C', т.е. является отображением пары (T^-, S^{r-1}) в (C, C'). Оно определяет элемент β относительной гомотопической группы $\pi^r(C, C')$, удовлетворяющий в силу соотношения $p' \circ F = f$ равенству $p'_* \beta = -\alpha$ (отображение

$$e: T^- \to S^r$$

имеет степень -1) или $\beta = -(p'_*)^{-1} \alpha$, где

$$p'_*: \pi^r(C, C') \to \pi^r(C')$$

изоморфизм [3].

Теперь возьмем гомоморфизм

$$\partial': \pi^r(C, C') \to \pi^{r-1}(C').$$

Отображение F, рассматриваемое только на границе S^{r-1} полусферы T^- (в ориентации, которую индуцирует на ней эта полусфера)

$$F: S^{r-1} \to C'$$

определяет элемент

$$\partial' \beta = -\partial' (p'_*)^{-1} \alpha.$$

Далее, существует такое отображение F' нижней полусферы T^- в индуцированное расслоенное пространство C_f, что выполнено соотношение

$$p \circ F' = F.$$

Действительно, такое отображение F' получим, если точке $x \in T^-$ поставим в соответствие пару $\big(x, F(x)\big)$:

$$F'(x) = \big(x, F(x)\big).$$

Так как

$$f(x) = p' \circ F(x),$$

то полученная точка $\big(x, F(x)\big)$ принадлежит пространству C_f. Соотношение $h \circ F' = F$ очевидно.

Более того, так построенное отображение F' является секущей поверхностью в расслоенном пространстве (C_f, p, S^r) над нижней полусферой T^-:

$$\varphi_{0 \mid T^-} = F',$$

так как по определению проекции p имеем:

$$p \circ \varphi_0(x) = p \circ F'(x) = p\big(x, F(x)\big) = x,$$

где $x \in T$. Таким образом, препятствие z^r над T^- равно нулю:

$$z^r(T^-) = 0.$$

Для определения значения препятствия для секущей поверхности φ_0 на верхней полусфере T^+ можем считать, что $k_\tau \equiv e$ (так как отображение f уже переводит всю полусферу T^+ в точку $*$). На границе S^{r-1} полусферы T^+ выполняется соотношение

$$p' \circ (h \circ \varphi_0) = p' \circ (h \circ F') = p' \circ F = f.$$

Но, с одной стороны, отображение F, расматриваемое на сфере S^{r-1} (рассматриваемой в той ориентации, которую индуцирует на ней полусфера T^+) определяет элемент $\partial'(p'_*)^{-1}\alpha$, а, с другой стороны, оно определяет элемент $z^r(T^+)$. В силу того, что $z^r(T^-)=0$, имеем:

$$z^r(T^+)-z^r(T^-)=\partial'(p'_*)^{-1}\alpha.$$

3. Препятствия для секущих поверхностей двукратных расслоений

Пусть $P_1=(P_1, p, B)$ и $P_2=(P_2, p', P_1)$ — два расслоенные пространства, базами в которых служит соответственно односвязные симплициальные комплексы B, P_1. Слой C_1, C' предполагаются гомотопически простыми в размерностях r и $(r-1)$ соответственно. Наконец предполагается, что над r-мерным остовом B^r базисного пространства B в расслоенном пространстве P_1 заданы две секущие поверхности $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, которые совпадают на $(r-1)$-мерном остове, т. е. $\mathfrak{S}_1=\mathfrak{S}_{2/B^{r-1}}$, и определяют различающую контрацепь по области коэффициентов $\pi^r(C_1)$.

Отображение

$$\mathfrak{S}_i: B^r \to P_1 \qquad (i=1,\ 2)$$

и расслоенное пространство $P_2=(P_2, p', P_1)$ с базой P_1 индуцируют некоторое расслоенное пространство с базой B^r. Обозначим его через $P_{\mathfrak{S}_i}= =(P_{\mathfrak{S}_i}, p_i, B^r)$. Пространство $P_{\mathfrak{S}_i}$ является подпространством прямого произведения $B^r\times P_2$, состоящим из всех пар (x, g), где $x\in B^r$, $g\in P_2$, удовлетворяющих условию

$$\mathfrak{S}_i(x)=p'(g),$$

а проекция p_i определяется формулой $p_i(x, g)=x$.

Очевидно, что часть расслоенного пространства $P_{\mathfrak{S}_1}$ над $(r-1)$-мерным остовом B^{r-1} совпадает с частью расслоенного пространства P_{H_2} над этим же остовом. Поэтому, если в $P_{\mathfrak{S}_1}$ задана над B^{r-1} секущая поверхность ψ, то ее можно рассматривать и как секущую поверхность в расслоенном пространстве $P_{\mathfrak{S}_2}$. В этом смысле можем говорить, что одна и та же секущая поверхность ψ задана над остовом B^{r-1} одновременно в расслоенных пространствах $P_{\mathfrak{S}_1}$, $P_{\mathfrak{S}_2}$.

Будем предполагать расслоенные пространства P_1, P_2 и секущие поверхности $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ такими, что в расслоенных пространствах $P_{\mathfrak{S}_1}$ и $P_{\mathfrak{S}_2}$ можно над всем $(r-1)$-мерным остовом B^{r-1} построить секущую поверхность. Фиксируем одну такую секущую поверхность (на B^{r-1}) и будем ее в дальнейшем обозначать через ψ.

Тогда определены препятствия к ее распространению в расслоенных пространствах $P_{\mathfrak{S}_1}$ и $P_{\mathfrak{S}_2}$, классы контрагомологий которых обозначим соответственно через Z^r_1 и Z^r_2. Здесь Z^r_1 и Z^r_2 суть элементы группы контрагомологий $H^r\left(B^r, \pi^{r-1}(C')\right)$.

Обозначим, далее, через $d^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}$ различающую контрацепь секущих поверхностей $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$. Эту контрацепь можем рассматривать как r-мерный контрацикл комплекса B^r. Класс контрагомологий этого контрацикла обозначим через $D^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}$; этот класс является элементом группы $H^r\left(B^r, \pi^r(C_1)\right)$.

Наконец, положим $C=(p')^{-1}(C_1)$ и обозначим отображение p', рассматриваемое на C, снова через p'. Тогда $C=(C, p', C_1)$ есть расслоенное пространство (часть расслоенного пространства P_2) со слоем $C'=(p')^{-1}(*)$, где $*$ — фиксированная точка пространства C_1. Для этого расслоенного пространства можем написать точную гомотопическую последовательность

$$\ldots\to\pi^r(C)\xrightarrow{p'_*}\pi^r(C_1)\xrightarrow{\quad}\pi^{r-1}(C')\to\pi^{r-1}(C)\to\ldots,$$

где Δ — граничный гомоморфизм. Этот гомоморфизм

$$\Delta:\pi^r(C_1)\to\pi^{r-1}(C')$$

порождает гомоморфизм групп контрагомологий

$$H^r\left(B^r,\ \pi^r(C_1)\right)\to H^r\left(B^r,\ \pi^{r-1}(C')\right),$$

который обозначим через $\hat\Delta$. При этих условиях имеет место следующая основная теорема.

Основная теорема. Классы контрагомологий Z_1^r, Z_2^r и $D^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}$ связаны соотношением

$$Z_1^r-Z_2^r=\hat\Delta D^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}.$$

Доказательство. Для доказательства основной теоремы, очевидно, нам достаточно показать, что имеет место соотношение

$$z^r_{1,\psi}-z^r_{2,\psi}=\Delta d^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2},$$

где $z^r_{1,\psi}$, $z^r_{2,\psi}$ — препятствия соответственно в расслоенных пространствах $P_{\mathfrak{S}_1}$, $P_{\mathfrak{S}_2}$, принадлежащие классам контрагомологий Z_1^r, Z_2^r, а $d^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}$ — различающая в расслоенном пространстве P_1, принадлежащая классу контрагомологий $D^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}$.

Пусть T^r — произвольный, r-мерный ориентированный симплекс базисного пространства B. Возьмем два одинаковых экземпляра T^+ и T^- этого симплекса, которые ориентируем так же, как и T^r, и склеим по их общей границе. Получающуюся сферу $S^r=T^+\cup T^-$ ориентируем согласованно с симплексом T^+ (тогда симплекс T^- будет иметь ориентацию, противоположную ориентации сферы). Обозначим тождественное отображение сферы S^r в B через e.

В свою очередь, для доказательства последнего соотношения нам достаточно показать, что оно справедливо для любого r-мерного симплекса T^r базисного пространства, т. е.

$$z^r_{1,\psi}(T^r)-z^r_{2,\psi}(T^r)-\Delta d^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}(T^r),$$

где

$$e^*z^r_{1,\psi}(T^+)=z^r_{1,\psi}(T^r),$$

$$e^*z^r_{2,\psi}(T^-)=z^r_{2,\psi}(T^r) -$$

значения препятствий $z^r_{1,\psi}$, $z^r_{2,\psi}$ — на симплексе T^r, а $d^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}(T^r)$ — значение различающей $d^r_{\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2}$ на том же симплексе T^r. Это соотношение и докажем.

Определим отображение

$$\mathfrak{S}: S^r\to P_1,$$

положив

$$\mathfrak{S}(x)=\begin{cases}\mathfrak{S}_1(x) & \text{при}\quad x\in T^+,\\ \mathfrak{S}_2(x) & \text{при}\quad x\in T^-.\end{cases}$$

Очевидно, что отображение $\mathfrak{S}$ сферы S^r в P_1 и расслоенное пространство P_2 индуцируют такое расслоенное пространство $P_{\mathfrak{S}}=(P_{\mathfrak{S}}, \bar{p}, S^r)$ над r-мерной ориентированной сферой S^r, которое на верхней полусфере T^+ совпадает с частью индуцированного расслоенного пространства $P_{\mathfrak{S}_1}$ над симплексом T^r, а на нижней полусфере T^- — с частью пространства $P_{\mathfrak{S}_2}$ над тем же симплексом T^r.

Пусть k'_t — деформация, соединяющая тождественное отображение

$$k'_0: T^r \to B$$

с отображением

$$k'_1: T^r \to x_0,$$

где x_0 — фиксированная точка пространства B, прообразом которой при отображении p является слой C_1. Эта деформация k'_t строится так: когда параметр t меняется от 0 до $\frac{1}{2}$, весь симплекс T^r стягивается по себе в некоторую свою точку y_0, когда же параметр t меняется от $\frac{1}{2}$ до 1, точка y_0 непрерывно движутся по некоторому пути к точке x_0. Положим

$$k_t = k'_t \circ e.$$

По определению секущей поверхности $\mathfrak{S}_i$ имеем

$$p \circ \mathfrak{S} = e = k_0.$$

Применяя условие существования накрывающей гомотопии к расслоенному пространству P_1, найдем такую деформацию $\mathfrak{S}^t$ отображения $\mathfrak{S}^0=\mathfrak{S}$, что

$$p \circ \mathfrak{S}^t = k_t.$$

Так как

$$k_1: S^r \to x_0,$$

то отображение $\mathfrak{S}^1$ переводит сферу S^r в слой C_1 и определяет элемент $d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(T^r)$ группы $\pi^r(C_1)$, т.е. значение различающей $d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}$ на симплексе T^r.

Отображение

$$\mathfrak{S}^t: S^r \to P_1$$

и расслоенное пространство P_2 индуцирует новое расслоенное пространство $P_{\mathfrak{S}^t}=(P_{\mathfrak{S}^t}, \bar{p}_t, S^r)$; точками пространства $P_{\mathfrak{S}^t}$ являются пары (x, g), где $x \in S^r$, $g \in P_2$, удовлетворяющие условию

$$\mathfrak{S}^t(x) = p'(g).$$

Определим отображение

$$h^t: P_{\mathfrak{S}^t} \to P_2,$$

положив

$$h^t(x, g) = g.$$

Отображение ψ определено на всем остове B^{r-1} и, в частности, на сфере $S^{r-1}=\dot{T}^r$. Так как $P_{\mathfrak{S}_1}=P_{\mathfrak{S}_2}$ на B^{r-1}, то отображение ψ, рассматриваемое на S^{r-1}, можно считать секущей поверхностью расслоенного пространства $P_{\mathfrak{S}^0}$, заданной на S^{r-1}. Это отображение

$$\psi: S^{r-1} \to P_{\mathfrak{S}^0},$$

для удобства, обозначим через ψ^0. Отображение

$$\varphi^0 = h^0 \circ \psi^0: S^{r-1} \to P_2$$

удовлетворяет, очевидно условие

$$p' \circ \varphi^0 = \mathfrak{S}^0,$$

и, применяя условие существования накрывающей гомотопии к расслоенному пространству P_2, можно найти такое непрерывное семейство отображений

$$\varphi^t : S^{r-1} \to P_2,$$

что (на S^{r-1})

$$p' \circ \varphi^t = \mathfrak{S}^t.$$

Положив

$$\psi^t(x) = \left(x,\ \varphi^t(x)\right),$$

где $x \in S^{r-1}$, получаем секущую поверхность ψ расслоенного пространства $P_{\mathfrak{S}^t}$, заданную над S^{r-1}. В частности, получаем секущую поверхность

$$\psi^1 : S^{r-1} \to P_{\mathfrak{S}^1}.$$

Выбираем такую гомотопию h_τ, что, когда параметр τ меняется от 0 до $\frac{1}{2}$, вся верхняя полусфера T^+ стягивается по себе в одну точку $y_0 \in \dot{T}^+ = S^{r-1}$, когда же параметр τ меняется от $\frac{1}{2}$ до 1, точка y_0 непрерывно движется по некоторому пути к фиксированной точке $x_0 \in B^r$; имеем

$$p' \circ \varphi^0 = \mathfrak{S} \circ h_0.$$

Из соотношения

$$p' \circ \varphi^t = \mathfrak{S}^t \circ h_0$$

по условию существования накрывающей гомотопии имеется такая гомотопия φ_τ^t, соединяющая отображение

$$\varphi_0^t : T^+ \to (p')^{-1}\left(\mathfrak{S}^t(T^+)\right)$$

с некоторым отображением

$$\varphi_1^t : T^+ \to (p')^{-1}\left(\mathfrak{S}^t(x_0)\right),$$

что

$$p' \circ \varphi_\tau^t = \mathfrak{S}^t \circ h_\tau.$$

Так как $h_1(T^+) = x_0$ и $C_1 = p^{-1}(x_0)$, то выбираем и фиксируем такую точку $* \in C_1 \subset P_2$, чтобы $\mathfrak{S}^1(x_0) = *$.

Последовательное выполнение деформаций φ_τ^0, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, φ_1^t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ дает нам такую деформацию χ_Θ, $0 \leqslant \Theta \leqslant 2$, что

$$p' \circ \chi_\Theta = \mathfrak{S}^1 \circ h_\Theta^*,$$

где h_Θ^* совпадает с h_Θ при $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$ и с $p \circ p' \circ \chi_1$ при $1 \leqslant \Theta \leqslant 2$.

Поэтому положив

$$\bar{\psi}_\Theta(x) = \left(h_\Theta^*(x),\ \chi_\Theta(x)\right), \quad x \in \dot{T}^+,$$

получаем в индуцированном расслоении $P_{\mathfrak{S}^1}$ именно такую деформацию, которая определяет препятствие $e^* z_{1,\psi}^r(T^+)$. Итак, элемент $e^* z_{1,\psi}^r(T^+)$ определяется отображением

$$\psi_2 : S^{r-1} \to C' = (p')^{-1}(*).$$

Но это отображение имеет вид:

$$\bar{\psi}_2(x) = \left(x,\ \chi_2(x)\right) = \left(x,\ \varphi_1^1(x)\right).$$

Иначе говоря, элемент $e^*z^r_{1,\psi}(T^+)$ определяется отображением

$$\varphi^1_1 : S^{r-1} \to C'.$$

Нетрудно видеть, что этот же элемент равен значению препятствия на T^+ к продолжению секущей поверхности ψ^1 в индуцированном произведении $P_{\mathfrak{S}^1}$.

В самом деле, эта секущая поверхность определяется на S^{r-1} формулой

$$\psi^1(x) = \left(x, \ \varphi^1(x)\right) = \left(x, \ \varphi^1_0(x)\right), \tag{1}$$

и потому деформация этого отображения дается формулой

$$\psi^1_\tau(x) = \left(h_\tau(x), \ \varphi^1_\tau(x)\right),$$

и в конце деформации определяется препятствие (на T^+) в индуцированном произведении $P_{\mathfrak{S}^1}$. Но при $\tau = 1$ как раз и получим (1). Итак, $e^*z^r_{1,\psi}$ есть препятствие в индуцированном произведении $P_{\mathfrak{S}^1}$.

Очевидно, что отображение

$$\mathfrak{S}^1 : S^r \to C_1$$

и расслоенное пространство P_2 или часть этого пространства над C_1

$$C = (C, \ p', \ C_1)$$

индуцируют одинаковое расслоенное пространство

$$P_{\mathfrak{S}^1} = (P_{\mathfrak{S}^1}, \ \bar{p}, \ S^r).$$

Если значению различающей $d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(T^r)$ над симплексом T^r, рассматриваемую как элемент группы $\pi^r(C)$, поставим в соответствие элемент

$$e^*z^r_{1,\psi}(T^+) - e^*z^r_{2,\psi}(T^-)$$

группы $\pi^{r-1}(C')$, то находимся в условиях доказанной ранее теоремы, из которой следует, что это соответствие является граничным гомоморфизмом

$$\Delta : \pi^r(C_1) \to \pi^{r-1}(C').$$

Таким образом,

$$e^*z^r_{1,\psi}(T^+) - e^*z^r_{2,\psi}(T^-) = \Delta d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(T^r)$$

или

$$z^r_{1,\psi}(T^r) - z^r_{2,\psi}(T^r) = \Delta d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}(T^r).$$

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
18. I. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Serre. Ann. Math., 54, 425—505 (1951).
2. В. Г. Болтянский. Изв. АН СССР, сер. мат., 20, 99—136 (1956).
3. Н. Стинрод. Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.

KERTAMŲJŲ PAVIRŠIŲ KLIŪTYS DVIGUBUOSE SLUOKSNIAVIMUOSE

A. MATUZEVIČIUS

(Reziumė)

Sakykime, kad $P_2 \xrightarrow{p'} P_1 \xrightarrow{p} B$ yra dvigubas sluoksniavimas, kurio bazė B — simpleksinis padalijimas, o sluoksniai C', C_1 yra homotopiniai paprasti matavimuose $(r-1)$, r. Jeigu sluoksniavime $P_1 \xrightarrow{p} B$ ant r-matės bazės dalies B^r duoti du kertamieji paviršiai $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, kurie sutampa ant $(r-1)$-matės bazės dalies B^{r-1}, tai apibrėžta skiriamoji $d^r_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}$ priklauso kontrahomologijos klasei $D^r \in H^r\left(B^r, \pi^r(C_1)\right)$. Kertamasis paviršius $\mathfrak{S}_i : B^r \to P_1$ $(i=1, 2)$ ir sluoksniavimas $P_2 \xrightarrow{p'} P_1$ indukuoja sluoksniavimą $P_{\mathfrak{S}_i} \xrightarrow{p_i} B^r$ su baze B^r ir sluoksniu C'. Tegu indukuotame sluoksniavime ant $(r-1)$-matės bazės dalies B^{r-1} duotas kertamasis paviršius. Tada ant B^r jo pratęsimo kliūtys z^r_1, z^r_2 priklauso atitinkamai kontrahomologijos klasėms Z^r_1, $Z^r_2 \in H^r\left(B^r, \pi^{r-1}(C')\right)$.

Darbe įrodoma formulė

$$Z^r_1 - Z^r_2 = \hat{\Delta} D^r,$$

kur $\hat{\Delta}$ homomorfizmas kontrahomologijos grupių

$$H^r\left(B^r, \pi^r(C_1)\right) \xrightarrow{\hat{\Delta}} H^r\left(B^r, \pi^{r-1}(C')\right)$$

indukuotas ribinio homomorfizmo $\pi^r(C_1) \xrightarrow{\Delta} \pi^{r-1}(C')$.

ÜBER DIE HINDERNISSE DER SCHNITTFLÄCHEN IN ZWEIMALIGER FASERUNG

A. MATUZEVIČIUS

(Zusammenfassung)

Es sei erstens $P_2 \xrightarrow{p'} P_1 \xrightarrow{p} B$ eine zweimalige Faserung mit homotopisch einfachen Fibern C', C_1 in den Dimenssionen $r-1$ bzw. r, zweitens sein zwei zusammenfallende (auf B^{r-1}) Schnittflächen auf dem simplizialen r-dimensionalen Komplex B^r in der Faserung $P_1 \xrightarrow{p} B$ und drittens sei $D^r \in H^r\left(B^r, \pi^r(C_1)\right)$ eine Cohomologieklasse der Unterscheidung von Schnittflächen. Die Schnittflächen und die Faserung $P_2 \xrightarrow{p'} P_1$ induzieren die neue Faserung $\tilde{P}$. Schließlich setzen wir voraus, daß die Schnittflächen auf B^{r-1} in $\tilde{P}$ konstruierbar sind.

Im vorliegenden Aufsatz wird die Formel

$$Z^r_1 - Z^r_2 = \hat{\Delta} D^r$$

bewiesen, wo

$$\hat{\Delta} : H^r\left(B^r, \pi^r(C_1)\right) \to H^r\left(B^r, \pi^{r-1}(C')\right)$$

ein Homomorphismus und Z^r_1, $Z^r_2 \in H^r\left(B^r, \pi^{r-1}(C')\right)$ die Cohomologieklassen der Hindernisse von Schnittflächen in $\tilde{P}$ sind.
