I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1–2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

О СТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА ОБОБЩЕННЫХ ПЕРИОДОВ

А. НАФТАЛЕВИЧ

В настоящей работе изучается строение множества периодов 2-го и 3-го рода комплекснозначной функции $f(x)$ от действительного переменного x.

Число α называем периодом 2-го (3-го) рода функции $f(x)$, если имеется такое число k, $k=k(\alpha)\neq 0$ $\big($такой полином $p(x)$, $p(x)=p(x, \alpha)\big)$, что $f(x+\alpha)\equiv kf(x)$ $\big(f(x+\alpha)\equiv e^{p(x)}f(x)\big)$. В случае, когда $k=1$, α является периодом (1-го рода) функции $f(x)$. Очевидно, что каждый период 1-го рода функции $f(x)$ является и ее периодом 2-го рода, а период 2-го рода — периодом 3-го рода.

Нетрудно проверить, что множество периодов 2-го или 3-го родов является линейным множеством над кольцов целых чисел, т. е. если α и β — периоды (2-го или 3-го рода) функции $f(x)$, то и $m\alpha+n\beta$, где m и n — целые числа, период этой функции.

Легко показать, что множество периодов 1-го рода функции $f(x)$, имеющей хотя бы одну точку непрерывности, может иметь конечные предельные точки только в случае, когда функция $f(x)$ равна тождественно постоянной (заметим, что условие непрерывности функции $f(x)$ хотя бы в одной точке существенно для справедливости высказанного предложения: так, например, каждое рациональное число является периодом всюду разрывной функции Дирихле, равной единице, если x — рационально, и нулю, если x — иррационально).

Этот результат обобщается и на периоды 2-го и 3-го рода. В работе будет доказана.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну точку непрерывности и множество ее периодов 2-го рода (3-го рода) имеет конечные предельные точки, то $f(x)=Ce^{\gamma x}$ $\big(f(x)=Ce^{P(x)}\big)$, где C и γ — постоянные $\big(C$ — постоянная, $P(x)$ — полином$\big)$.*

Заметим, что каждый период 2-го рода функции $f(x)$ является периодом 1-го рода для логарифмической производной $\frac{f'(x)}{f(x)}$ (если эта производная существует). Из этого замечания и вышеуказанного свойства множества периодов 1-го рода, легко следует утверждение теоремы о множестве периодов 2-го рода в случае, когда функция $f(x)$ имеет непрерывную производную.

В работе рассматриваются также обобщенные периоды функций многих переменных.

1. В этом пункте докажем сформулированную теорему 1. Для этого сделаем несколько замечаний о функции со множеством периодов Ω 2-го рода, имеющим конечные предельные точки.

а) Если множество периодов Ω (2-го или 3-го родов) функции $f(x)$ имеет конечную предельную точку, то функция $f(x)$ имеет *как угодно малые периоды*.

В самом деле, если $\alpha_n \in \Omega$ и $\alpha_n \to a$, $a \neq \infty$, то $\alpha_n - \alpha_m \in \Omega$ и $\alpha_n - \alpha_m \to 0$ при $n, m \to \infty$.

б) Функция $f(x)$ имеет по условию теоремы 1 хотя бы одну точку непрерывности. Будем считать, что *начало координат* является точкой непрерывности функции $f(x)$. Общий случай приводится к этому частному соответствующим выбором начала координат.

в) Две точки x_1 и x_2, разность которых является периодом (1-го, 2-го или 3-го рода) функции $f(x)$ $(x_1 - x_2 \in \Omega)$, назовем *эквивалентными* точками и воспользуемся обозначением $x_1 \sim x_2$.

Если функция $f(x)$ имеет как угодно малые периоды, то множество точек, эквивалентных произвольно зафиксированной точке x_0, всюду плотно на прямой.

г) Если функция $f(x)$, непрерывная в начале координат и неравная тождественно нулю, имеет как угодно малые периоды 2-го рода, то она *нигде* не равна нулю.

В самом деле, если $f(x_0) = 0$ и $x_0 \neq 0$, то $f(x)$ равна нулю при всех $x \sim x_0$. Поэтому в силу *в* и $f(0) = 0$.

Пусть $\alpha_n \to +0$, $\alpha_n \in \Omega$ и

$$f(x + \alpha_n) = k_n f(x).$$

В последовательности $\{k_n\}$ или содержится подпоследовательность $\{k_{n_i}\}$ $|k_{n_i}| \geqslant 1$, или подпоследовательность $\{k_{n_j}\}$, $|k_{n_j}| < 1$. В первом случае допустим, что x_1 произвольное отрицательное число. Тогда

$$|f(x_1 + s\alpha_{n_i})| \geqslant |f(x_1)|, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.1}$$

С другой стороны, в любой окрестности начала координат имеются точки вида $\{x_1 + s\alpha_{n_i}\}$. Из (1.1) следует, что

$$0 = |f(0)| \geqslant |f(x_1)|.$$

Таким образом, $f(x) = 0$ при любом $x \leqslant 0$. Из периодичности (2-го рода) функции $f(x)$ следует, что $f(x) \equiv 0$.

Во втором случае (когда $|k_{n_j}| < 1$) рассуждаем аналогично, только сначала убеждаемся в том, что $f(x) = 0$, когда $x \geqslant 0$.

д) Пусть $f(x) \neq 0$, $\alpha \in \Omega$ и

$$f(x + \alpha) = k(\alpha) f(x). \tag{1.2}$$

Если $\alpha \to 0$, то

$$k(\alpha) \to 1. \tag{1.3}$$

Это следует из сказанного в *б* и *г* и из соотношения

$$f(\alpha)=k(\alpha)f(0)\to f(0)\neq 0.$$

е) Пусть функция $f(x)$ не равна тождественно нулю и выполнено соотношение (1.2). Тогда *множество*

$$\gamma(\alpha)=\frac{\ln k(\alpha)}{\alpha}=\frac{\ln|k(\alpha)|+i\operatorname{Arg}k(\alpha)}{\alpha} \tag{1.4}$$

(через $\operatorname{Arg}z$ обозначаем ветвь $\arg z$, удовлетворяющую неравенствам $-\pi\leqslant\operatorname{Arg}z<\pi$) *ограничено при достаточно малых* α, $\alpha\in\Omega$.

Допустим, что $f(0)=1$ $\left(\text{в общем случае рассмотрим функцию } \frac{f(x)}{f(0)}\right)$. Из непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=0$ следует, что имеется такая окрестность O начала координат $|x|<\delta$, $\delta<0$, в которой

$$\frac{1}{2}<|f(x)|<2, \qquad |\operatorname{Arg}f(x)|<\frac{\pi}{8}. \tag{1.5}$$

Пусть x_0, $x_0\neq 0$, такая точка из окрестности O, что $x_0=n\alpha$, $\alpha\in\Omega$, n — целое число и

$$\frac{\delta}{4}<x_0<\frac{\delta}{2}. \tag{1.6}$$

Тогда, как это следует из (1.2) и (1.4),

$$f(x_0)=e^{\gamma(\alpha)x_0}, \quad f(x_0+m\alpha)=e^{\gamma(\alpha)(x_0+m\alpha)}, \quad f(2x_0)=e^{2\gamma(\alpha)x_0}. \tag{1.7}$$

Из (1.5), (1.6) и (1.7) заключаем, что

$$|R[\gamma(\alpha)]|<\frac{\ln 2}{|x_0|}<\frac{4\ln 2}{\delta}.$$

Другими словами множество $R[\gamma(\alpha)]$ ограничено при $|\alpha|<\frac{\delta}{4}$;

Рассмотрим множество $I[\gamma(\alpha)]$. Из (1.5) и (1.7) следует, что

$$I[\gamma(\alpha)x_0]=2s\pi+\varphi_0, \qquad s=s(\alpha)-\text{целое число}, \tag{1.8}$$

где

$$|\varphi_0|<\frac{\pi}{8}. \tag{1.9}$$

Тогда

$$I[\gamma(\alpha)(x_0+m\alpha)]=2s\pi+\varphi_0+mI[\gamma(\alpha)\cdot\alpha] \tag{1.10}$$

и

$$I[2\gamma(\alpha)x_0]=4s\pi+2\varphi_0. \tag{1.11}$$

Точки x_0, $x_0+m\alpha$ при $m=1, 2, \ldots, n-1$ и $2x_0=x_0+n\alpha$ принадлежат окрестности O. Поэтому (см. (1.5))

$$|I[\gamma(\alpha)(x_0+m\alpha)]\,(\mathrm{mod.}\,2\pi)|<\frac{\pi}{8}. \tag{1.12}$$

Еще заметим, что (см. (1.3) и (1.4))

$$\gamma(\alpha)\cdot\alpha\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) и (1.13) заключаем, что при достаточно малом α целое число s в формуле (1.8) равно нулю.

Таким образом

$$|I[\gamma(\alpha)x_0]|<\frac{\pi}{8}.$$

Отсюда (см. (1.6))

$$|I[\gamma(\alpha)]|<\frac{\pi}{8|x_0|}<\frac{4\pi}{8\delta};$$

Выше мы доказали, что множество $R[\gamma(\alpha)]$ ограничено (при достаточно малых α). Следовательно, множество $\gamma(\alpha)$ ограничено при достаточно малых α, $\alpha \in \Omega$.

Теперь уже нетрудно будет доказать утверждение теоремы 1 о периодах 2-го рода.

Предположим, что функция $f(x)$, $f(x) \neq 0$, имеет как угодно малые периоды 2-го рода и что $\gamma(\alpha)$ определено равенством (1.4). Произвольно зафиксируем точку x_1, $x_1 \neq 0$, и построим функцию

$$\varphi(x) = Ce^{\gamma x} \tag{1.14}$$

(C и γ — постоянные), интерполирующую значения функции $f(x)$ в точках x_1 и 0:

$$\varphi(x_1) = f(x_1), \qquad \varphi(0) = f(0). \tag{1.15}$$

Для этого нужно взять

$$C = f(0), \qquad \gamma = \frac{1}{x_1} \ln\left[\frac{f(x_1)}{f(0)}\right] + \frac{2s\pi i}{x_1}. \tag{1.16}$$

Целое число s в (1.16) определим впоследствии.

Пусть целое число $n(\alpha)$ выбрано так, что

$$|x_1 + n(\alpha)\alpha| < |\alpha|. \tag{1.17}$$

Как следует из (1.2), (1.4) и (1.15)

$$f[x_1 + n(\alpha)\alpha] = \varphi(x_1)e^{\gamma(\alpha)\cdot n(\alpha)\cdot\alpha} \to f(0) = \varphi(0) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Последнее соотношение перепишем, пользуясь равенствами (1.14) и (1.15), в виде

$$Ce^{\gamma x_1 + \gamma(\alpha)\cdot n(\alpha)\cdot\alpha} \to C \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Другими словами, предельные значения множества $\gamma x_1 + \gamma(\alpha)n(\alpha)\alpha$ при $\alpha \to 0$ равны целым кратным от $2\pi i$ (надо иметь в виду, что $n(\alpha)\cdot\alpha \to -x_1$ по (1.17) и множество $\gamma(\alpha)$ ограничено по доказанному в e.; следовательно, бесконечность не является предельным значением для $\gamma x_1 + \gamma(\alpha)n(\alpha)\alpha$).

Пусть для некоторой последовательности значений α, стремящейся к нулю,

$$\gamma x_1 + \gamma(\alpha)n(\alpha)\alpha \to 2k_0\pi i.$$

Отсюда получим (надо иметь в виду, что $n(\alpha)\cdot\alpha \to -x_1$)

$$\gamma - \gamma(\alpha) \to \frac{2k_0\pi i}{x_1} \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Определив значение s в формуле (1.16) подходящим образом, получим

$$\gamma(\alpha) \to \gamma \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{1.18}$$

Пусть теперь $m = m(x, \alpha)$ такое целое число, что

$$|x + m\alpha| < |\alpha|, \quad m\alpha \to -x \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{1.19}$$

Тогда (см. (1.16))

$$f(x + m\alpha) = f(x)e^{\gamma(\alpha)\cdot m\cdot\alpha} \to f(0) = C \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Отсюда

$$Ce^{-\gamma(\alpha)\cdot m\cdot\alpha} \to f(x) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

В соединении с (1-18) и (1.19) последнее соотношение дает

$$f(x)=Ce^{\gamma x}.$$

Перейдем к рассмотрению периодов 3-го рода. Сперва рассмотрим частный случай, когда функция $f(x)$, непрерывная в начале координат, имеет как угодно малые периоды α 3-го рода, причем

$$f(x+\alpha)=e^{p_\alpha(x)}f(x), \quad p_\alpha(x)=a_\alpha x+b_\alpha, \quad R[a_\alpha]=0 \tag{1.20}$$

(a_α — чисто мнимое число).

Сделаем несколько замечаний.

А. Из (1.20) следует, что

$$|f(x+\alpha)|=e^{R[b_\alpha]}|f(x)|.$$

Иными словами, α является периодом 2-го рода для функции $|f(x)|$. По сказанному в *г*, функция $f(x)$ *нигде* не равна нулю, если она $\big(f(x)\big)$ не равна тождественно нулю.

Б. Пусть числа b_α определены равенствами (1.20) и

$$-\pi\leqslant I[b_\alpha]<\pi.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0} b_\alpha=0. \tag{1.21}$$

Это следует из соотношения $\big($см. (1.20)$\big)$

$$f(\alpha)=e^{b_\alpha}f(0)\to f(0) \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

В. *Множество чисел* a_α, определенных в (1.20) и соответствуюших достаточно малым значениям α, *ограничено.*

Пусть $f(0)=1$. Из непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=0$ следует, что существует число δ, $\delta>0$, что при $|x|<\delta$ будет выполнено (1.5).

Аналогично, пользуясь (1.21), устанавливаем существование такого числа η, $\eta<0$, что

$$|I[b_\alpha]|<\frac{\pi}{8} \quad \text{при} \quad |\alpha|<\eta. \tag{1.22}$$

Нам будет удобно ограничить значение числа η сверху неравенством

$$\eta<\frac{\delta}{4}.$$

Докажем, что при $|\alpha|<\eta$

$$|a_\alpha|<\frac{4\pi}{\delta}. \tag{1.23}$$

Рассуждая от противного, допустим, что для некоторого α, $|\alpha|<\eta$,

$$|a_\alpha|\geqslant\frac{4\pi}{\delta}. \tag{1.24}$$

Из (1.20) имеем

$$\operatorname{Arg}f(x+\alpha)-\operatorname{Arg}f(x)-I[b_\alpha]-\frac{a_\alpha x}{i}=0\,(\mathrm{mod.}\,2\pi). \tag{1.25}$$

Из (1.5) и (1.22) следует, что при $\frac{\delta}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\delta$

$$|\operatorname{Arg}f(x+\alpha)-\operatorname{Arg}f(x)-I[b_\alpha]|<\frac{3\pi}{8},$$

а из (1.24), что $a_\alpha x$ меняясь непрерывно пробегает интервал, длина которого не меньше 2π $\left(\text{если } \frac{\delta}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\delta\right)$. Но это противоречит равенству (1.25).

Г. Пусть α и β — два достаточно малых периода 3-го рода функции $f(x)$:

$$f(x+\alpha)=e^{a_\alpha x+b_\alpha}f(x),\quad f(x+\beta)=e^{a_\beta x+b_\beta}f(x),\quad R[a_\alpha]=R[a_\beta]=0.$$

Подсчитав двумя способами значение $f(x+\alpha+\beta)$, получим

$$a_\alpha x+b_\alpha+a_\beta(x+\alpha)+b_\beta-[a_\alpha(x+\beta)+b_\alpha+a_\beta x+b_\beta]=0\,(\text{mod. } 2\pi i),$$

$$a_\beta\alpha-a_\alpha\beta=0\,(\text{mod. } 2\pi i).$$

Из В следует, что для *достаточно малых* α и β

$$a_\beta\alpha-a_\alpha\beta=0. \tag{1.26}$$

Д. Пусть β_0 — некоторый достаточно малый период функции $f(x)$, а

$$f(x+\beta_0)=e^{a_0x+b_0}f(x),\quad R[a_0]=0, \tag{1.27}$$

и

$$P(x)=C_1x^2+C_2x,\quad C_1=\frac{a_0}{2\beta_0},\quad C_2=\frac{b_0}{\beta_0}-\frac{a_0}{2}. \tag{1.28}$$

Полином $P(x)$ так выбран, чтобы

$$\Delta_{\beta_0}P(x)=P(x+\beta_0)-P(x)=a_0x+b_0.$$

Определим функцию $F(x)$ равенством

$$f(x)=e^{P(x)}F(x). \tag{1.29}$$

Очевидно, что функция $F(x)$ будет непрерывна в точке $x=0$. Кроме того,

$$f(x+\alpha)=e^{P(x+\alpha)}F(x+\alpha)=e^{a_\alpha x+b_\alpha}e^{P(x)}F(x).$$

Следовательно,

$$F(x+\alpha)=e^{a_\alpha x+b_\alpha+P(x)-P(x+\alpha)}F(x).$$

Пользуясь (1.26) и (1.28), получаем для достаточно малых α

$$a_\alpha x+b_\alpha+P(x)-P(x+\alpha)=k_\alpha,$$

где k_α — постоянная.

Таким образом, все достаточно малые периоды 3-го рода функции $f(x)$ являются периодами 2-го рода для функции $F(x)$. По доказанному выше,

$$F(x)=Ce^{\gamma x},$$

где γ — постоянная. Из (1.29) следует, что

$$f(x)=Ce^{P(x)+\gamma\cdot x}.$$

Теперь нетрудно закончить доказательство теоремы 1.

Пусть Ω — множество периодов 3-го рода функции $f(x)$, $\alpha_0\in\Omega$ и

$$f(x+\alpha_0)=e^{p_0(x)}f(x), \tag{1.30}$$

где $p_0(x)$ — некоторый многочлен. Обозначим через $O(x)$ полином, для которого

$$\Delta_{\alpha_0}O(x)=O(x+\alpha_0)-O(x)=p_0(x), \tag{1.31}$$

и через $F(x)$ функцию, определенную равенством

$$f(x)=e^{O(x)}F(x). \tag{1.32}$$

Из (1.30), (1.31) и (1.32) получим, что

$$F(x+\alpha_0)=F(x) \tag{1.33}$$

и каждый период 3-го рода функции $f(x)$ является таковым для функции $F(x)$. Пусть $\alpha \in \Omega$ — один из таких периодов:

$$F(x+\alpha) = e^{p(x,\,\alpha)} F(x). \tag{1.34}$$

Найдем вид полинома $p(x,\,\alpha)$. Из (1.33) и (1.34) следует, что

$$F(x+\alpha+\alpha_0) = e^{p(x+\alpha_0,\,\alpha)} F(x) = e^{p(x,\,\alpha)} F(x).$$

Таким образом,

$$[e^{p(x+\alpha_0,\,\alpha)} - e^{p(x,\,\alpha)}] F(x) = 0. \tag{1.35}$$

Если $F(x)$ не равна тождественно нулю, то она не равна нулю на всюду плотном на прямой множестве точек (эквивалентных какой нибудь точке, в которой $F(x) \neq 0$). Отсюда заключаем, что

$$p(x+\alpha_0,\ \alpha) - p(x,\ \alpha) = 2s(\alpha)\pi i, \quad s(\alpha) \text{ — целое число,}$$

и

$$p(x,\ \alpha) = \frac{2s(\alpha)\pi i}{\alpha} x + C(\alpha), \tag{1.36}$$

где $C(\alpha)$ — постоянная. Мы пришли к ранее изученному случаю, и поэтому

$$F(x) = Ce^{P_2(x)},$$

где $P_2(x)$ — квадратный многочлен и (как следует из (1.32))

$$f(x) = Ce^{Q(x)+P_2(x)} = Ce^{H(x)},$$

где $H(x)$ — многочлен.

Замечание 1. Для функции

$$f(x) = Ce^{\gamma x} \tag{1.37}$$

любое число α является периодом 2-го рода. В самом деле

$$f(x+\alpha) = Ce^{\gamma(x+\alpha)} = e^{\gamma\alpha} Ce^{\gamma x} = e^{\gamma\alpha} f(x).$$

Отсюда сделаем один в дальнейшем нужный вывод.

Пусть множество периодов 2-го рода Ω функции $f(x)$, непрерывной хотя бы в одной точке, имеет конечные предельные точки, $\alpha \in \Omega$ и выполнено (1.2). Тогда $f(x) = Ce^{\gamma x}$, где

$$\gamma = \frac{\ln k(\alpha)}{\alpha}. \tag{1.38}$$

В равенстве (1.38) значение $\ln k(\alpha)$ должно быть подходящим образом выбрано. Для достаточно малых α значение $\ln k(\alpha)$ в (1.38) равно

$$\ln k(\alpha) = \ln |k(\alpha)| + i \operatorname{Arg} k(\alpha).$$

Замечание 2. Если функция $f(x)$, непрерывная хотя бы в одной точке, имеет как угодно малые периоды 3-го рода и удовлетворяет равенствам (1.20), то, как было показано,

$$f(x) = Ke^{c_1x^2+c_2x},$$

где K, c_1 и c_2 — постоянные. При этом для любого α

$$f(x+\alpha) = e^{2c_1\alpha x+c_1\alpha^2+c_2\alpha} f(x).$$

Если принять во внимание (1.20), то замечаем, что

$$2c_1\alpha x + c_1\alpha^2 + c_2\alpha = a_\alpha x + b_\alpha + 2k_\alpha \pi i,$$

где k_α — целое число, зависящее от α. Отсюда получаем

$$c_1=\frac{a_\alpha}{2\alpha},\quad c_2=\frac{b_\alpha+2\pi i k_\alpha}{2}-\frac{a_\alpha}{2}.$$

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке, то множество ее периодов 2-го рода (3-го рода) или пусто, или образует арифметическую прогрессию $\{k\alpha\}$, $\alpha\neq 0$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$, или исчерпывает множество всех действительных чисел. Последнее возможно только в случае, когда $f(x)=Ce^{\gamma x}$ $\left(f(x)=Ce^{P(x)}\right)$, где C и γ — постоянные $\left(C\right.$ — постоянная, $P(x)$ — полином$\left.\right)$.*

2. Перейдем к рассмотрению периодов функции многих переменных. Чтобы упростить изложение, ограничимся рассмотрением случая комплексно-значной функции двух действительных переменных. Воспользуемся следующей терминологией.

А. *Пару действительных чисел* (α, β) (α и β не равны одновременно нулю) *назовем периодом* 2-го *рода* (3-го *рода*) *функции* $f(x, y)$, *если имеется такое число* $k=k(\alpha, \beta)$ $\left(\text{такой полином } p(x, y)=p(x, y, \alpha, \beta)\right)$, что

$$f(x+\alpha, y+\beta)=kf(x, y), \tag{2.1}$$

$$\left(f(x+\alpha, y+\beta)=e^{p(x, y)}f(x, y)\right). \tag{2.2}$$

Если в равенстве (2.1) $k=1$, то пару чисел (α, β) назовем периодом 1-го рода функции $f(x, y)$.

Б. Если вектор $\{\alpha, \beta\}$ (с компонентами α, β) коллинеарен ненулевому вектору $\{a, b\}$, то период (α, β) назовем *коллинеарным* вектору $\{a, b\}$. Два периода, коллинеарных одному и тому же вектору, назовем *коллинеарными*.

В. Последовательность периодов (α_n, β_n) *стремится* (по определению) *к нулю*, если $\alpha_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$.

Последовательность периодов (α_n, β_n) имеет *предельное направление* $[a, b]$, если последовательность векторов

$$\left\{\frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}},\ \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}\right\}\to\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Г. Функция $f(x, y)$ *имеет свойство* $K(a, b, 2)$ $\left(K(a, b, 3)\right)$, если выполнены следующие условия:

1. На каждой прямой, параллельной вектору $\{a, b\}$, функция $f(x, y)$ имеет хотя бы одну точку непрерывности.

2. Имеются как угодно малые периоды 2-го рода (3-го рода) функции $f(x, y)$, коллинеарных вектору $\{a, b\}$.

Д. Функция $f(x, y)$ *имеет свойство* $P(2)$ $\left(P(3)\right)$, если: 1) она непрерывна хотя бы в одной точке плоскости x, y; 2) имеется стремящаяся к нулю последовательность периодов 2-го рода (3-го рода), в которой как угодно далеко от начала встречаются неколлинеарные между собой периоды 2-го рода (3-го рода).

Условие 2 приведенного определения Д можно высказать следующим образом: множество периодов 2-го рода (3-го рода) функции $f(x, y)$ всюду плотное на плоскости x, y.

Это следует из линейности множества периодов 2-го (3-го) рода функции $f(x, y)$ над кольцом целых чисел $\big($если (α, β) и (γ, δ) — периоды 2-го (3-го) рода функции $f(x, y)$ то и $(m\alpha + n\gamma,\ m\beta + n\delta)$ — период 2-го (3-го) рода этой функции$\big)$.

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ имеет свойство $K(a, b, 2)$ $\big(K(a, b, 3)\big)$, то*

$$f(x, y) = C(ay - bx)\, e^{\gamma(ax+by)}, \tag{2.3}$$

$$\left(f(x, y) = C(ay - bx)\, e^{P(x, y)}\right), \tag{2.4}$$

где γ — постоянная, $C(u)$ — непрерывная функция от u и $P(x, y)$ — полином.

Если функция $f(x, y)$ имеет свойство $P(2)$ $\big(P(3)\big)$, то

$$f(x, y) = Ce^{\gamma x + \delta y}, \tag{2.5}$$

$$\left(f(x, y) = Ce^{P(x, y)}\right), \tag{2.6}$$

где C, γ, δ — постоянные, а $P(x, y)$ — полином.

Доказательство. I. Пусть функция $f(x, y)$ имеет свойство $K(a, b, 2)$. Можно положить $a = 1$, $b = 0$, так как общий случай сводится к этому частному подходящим выбором координатных осей. Тогда функция $f(x, y)$ имеет как угодно малые периоды 2-го рода вида $(\alpha, 0)$. Функция $f(x, y_0)$ при произвольно зафиксированном y_0 имеет как угодно малые периоды 2-го рода α и

$$f(x + \alpha, y_0) = Kf(x, y_0),\quad K = K(\alpha).$$

По теореме 1 и замечанию 1 к ней

$$f(x, y_0) = C(y_0)\, e^{x\gamma},$$

где C и γ — постоянные, из которых γ не зависит от y_0. Следовательно,

$$f(x, y) = C(y)\, e^{\gamma x}. \tag{2.7}$$

Непрерывность функции $C(y)$ следует из условия 1 определения Т.

II. Допустим, что функция $f(x, y)$ имеет свойство $K(a, b, 3)$. Опять положим $a = 1$, $b = 0$ и рассмотрим сначала случай, когда функция имеет как угодно малые периоды 3-го рода $(\alpha, 0)$, для которых

$$f(x + \alpha, y) = e^{P(y, \alpha)} f(x, y). \tag{2.8}$$

При фиксированном y число α является периодом 2-го рода функции (одного переменного) $f(x, y)$ и поэтому (по теореме 1 и замечанию 1 к ней)

$$f(x, y) = C(y)\, e^{\left[\frac{P(y, \alpha)}{\alpha} + \frac{2\pi K(y, \alpha) i}{\alpha}\right] x},$$

где $C(y)$ и $K(y, \alpha)$ — функции, зависящие от y, причем функция $K(y, \alpha)$ — принимает только целые значения. Сейчас убедимся, что функция $K(y, \alpha)$ — постоянная.

Пусть β — другой период функции $f(x, y)$. Тогда

$$f(x+\beta, y)=C(y)\,e^{\left[\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}+\frac{2\pi K(y,\alpha)i}{\alpha}\right](x+\beta)}=e^{\frac{P(y,\alpha)\beta}{\alpha}+\frac{2\pi\beta K(y,\alpha)i}{\alpha}}f(x, y).$$

С другой стороны, по сделанному предположению (см. (2.8)),

$$f(x+\beta, y)=e^{P(y,\beta)}f(x, y). \tag{2.9}$$

Таким образом,

$$\frac{P(y,\alpha)\beta}{\alpha}+\frac{2\pi K(y,\alpha)\beta}{\alpha}i=P(y, \beta)+2i\pi\,n(y),$$

где $n(y)$ — функция, принимающая только целые значения. Другими словами,

$$\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}\beta-P(y, \beta)=2i\pi\left[n(y)-\frac{K(y,\alpha)}{\alpha}\beta\right].$$

В левой стороне последнего равенства — полином, а в правой — функция, принимающая только счетное множество значений (в силу того, что $n(y)$ и $K(y, \alpha)$ принимают только целые значения). Поэтому обе стороны равенства не зависят от y:

$$\frac{P(y,\alpha)\beta}{\alpha}-P(y, \beta)=2\pi i\left[n(y)-\frac{k(y,\alpha)\beta}{\alpha}\right]=K=K(\alpha, \beta). \tag{2.10}$$

Подставим в (2.9)

$$f(x, y)=e^{\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}x}F(x, y). \tag{2.11}$$

Получим

$$e^{\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}(x+\beta)}F(x+\beta, y)=e^{P(y,\beta)}e^{\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}x}F(x, y)$$

или

$$F(x+\beta, y)=e^{P(y,\beta)-\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}\beta}F(x, y).$$

Отсюда и из (2.10) следует, что функция $F(x, y)$ имеет свойство $K(1, 0, 2)$. По доказанному выше (см. I) заключаем, что функция $F(x, y)$ имеет вид (2.7). В соединении с (2.11) это дает

$$f(x, y)=C(y)\,e^{P(y)x}, \tag{2.12}$$

где полином

$$P(y)=\left[\frac{P(y,\alpha)}{\alpha}+\gamma\right]x$$

и $C(y)$ — непрерывная функция.

Остановимся еще на частный случай, когда функция $\varphi(x, y)$ со свойством $K(1, 0, 3)$ имеет как угодно малые периоды $(\alpha, 0)$, для которых

$$\varphi(x+\alpha, y)=e^{a(\alpha)x+p(y,\alpha)}\varphi(x, y),\quad R[a(\alpha)]=0, \tag{2.13}$$

где $a(\alpha)$ — чисто мнимое число и $p(y, \alpha)$ — полином.

Из сказанного в замечании 2 к теореме 1 следует, что

$$\varphi(x, y)=e^{c_1x^2+c_2(y)x}, \tag{2.14}$$

где

$$c_1=\frac{a(\alpha)}{2\alpha},\quad c_2(y)=\frac{p(y,\alpha)+2\pi k(y,\alpha)i}{\alpha}-\frac{a(\alpha)}{2}; \tag{2.15}$$

функция $k(y, \alpha)$ из (2.15) принимает только целые значения.

Обозначим

$$\varphi(x, y) = e^{c_1 x^2} f(x, y). \tag{2.16}$$

Пользуясь (2.14) и (2.15) убедимся что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям вышеприведенного частного случая. Поэтому функция $f(x, y)$ имеет вид (2.12) и $\Big($см. (2.16)$\Big)$

$$\varphi(x, y) = C(y)\, e^{c_1 x^2 + P(y)\, x}, \tag{2.17}$$

где c_1 — постоянная, $C(y)$ — непрерывная функция и $P(y)$ — полином.

Перейдем к общему случаю, когда

$$f(x+\alpha, y) = e^{p(x, y, \alpha)} f(x, y), \tag{2.18}$$

где $p(x, y, \alpha)$ — полином от x, y.

Пусть $(\alpha_0, 0)$ — один из периодов 3-го рода функции $f(x, y)$, $P_0(x, y)$ — такой полином, что

$$\Delta_{\alpha_0} P_0(x, y) = P_0(x+\alpha_0, y) - P_0(x, y) = p(x, y, \alpha_0)$$

и

$$f(x, y) = e^{P_0(x, y)} \varphi(x, y). \tag{2.19}$$

Легко проверить, что $\varphi(x, y)$ и $f(x, y)$ имеют те же периоды 3-го рода. Кроме того,

$$\varphi(x+\alpha_0, y) = \varphi(x, y). \tag{2.20}$$

Допустим, что

$$\varphi(x+\alpha, y) = e^{q(x, y, \alpha)} \varphi(x, y). \tag{2.21}$$

Подсчитаем, пользуясь равенствами (2.20) и (2.21), двумя способами $\varphi(x+\alpha+\alpha_0, y)$. Получим

$$\varphi(x+\alpha+\alpha_0, y) = e^{q(x+\alpha_0, y, \alpha)} \varphi(x, y) = e^{q(x, y, \alpha)} \varphi(x, y).$$

Следовательно,

$$q(x+\alpha_0, y, \alpha) - q(x, y, \alpha) = 2k\pi i,$$

где $k = k(\alpha)$ - целое число.

Из последнего равенства получаем вид полинома $q(x, y, \alpha)$:

$$q(x, y, \alpha) = \frac{2k\pi i}{\alpha_0} x + h(y, \alpha), \tag{2.22}$$

где $h(y, \alpha)$ — полином от y.

Соотношения (2.21) и (2.22) показывают, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет всем условиям вышерассмотренного частного случая и выражается поэтому в виде (2.17). Из (2.19) следует, что

$$f(x, y) = C(y)\, e^{\theta(x, y)},$$

где $C(y)$ — непрерывная функция и $\theta(x, y)$ — полином.

З а м е ч а н и е: Изменим определение периодов 2-го (3-го) рода функции $f(x, y)$ так, чтобы в соотношении (2.1) величина k зависела бы не только от α, β, но также непрерывно от $ay - bx$: $k = k(\alpha, \beta, ay-bx)$ $\Big($а в соотношении (2.2) так, чтобы $p(x, y) = p(x, y, \alpha, \beta)$ являлся бы полиномом от $ax+by$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от $ay - bx\Big)$.

Тогда функция $f(x, y)$, имеющая свойство $K(a, b, 2)$ $\Big(K(a, b, 3)\Big)$, будет попрежнему выражаться равенством (2.3) $\Big((2.4)\Big)$, в котором γ будет непрерывной функцией от $ay-bx$ $\big(P(x, y)$ — полином от $ax+by$, коэффициенты которого непрерывные функции от $ay-bx\big)$.

Чтобы доказать сказанное, достаточно повторить (с очевидными изменениями) вышеприведенные рассуждения.

III. Вид функции $f(x, y)$, имеющей свойство $P(2)$, изучается аналогичным способом как вид функций одного переменного, имеющих это свойство.

Отметим сперва следующие утверждения:

а) Из плотности множества периодов функции $f(x, y)$ следует, что для любого направления $[a, b]$ существует стремящаяся к нулю последовательность периодов, имеющая предельное направление $[a, b]$. В частности существуют две стремящиеся к нулю последовательности периодов $(\alpha_{nx}, \beta_{nx})$ и $(\alpha_{ny}, \beta_{ny})$ *с предельными направлениями* $[1, 0]$ и $[0, 1]$ (предельные направления совпадают с направлениями положительных полуосей системы координат).

б) Можем допустить, что функция $f(x, y)$ непрерывна в *начале координат*.

в) Две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) назовем *эквивалентными*, если (x_1-x_2, y_1-y_2) — период 2-го рода функции $f(x, y)$. Множество точек, эквивалентных произвольно зафиксированной точке плоскости x, y — всюду плотное на этой плоскости.

г) Если функция $f(x, y)$ не равна тождественно нулю, то она *нигде* не равна нулю.

Если $f(x_0, y_0)=0$, то из *б* и *в* следует, что функция $f(x, y)$ равна нулю и в начале координат.

Пусть

$$f(x+\alpha_{nx}, y+\beta_{nx})=k_{nx}f(x, y),$$
$$f(x+\alpha_{ny}, y+\beta_{ny})=k_{ny}f(x, y), \tag{2.23}$$

причем для бесконечного множества натуральных чисел n

$$|k_{nx}|\geqslant 1, \quad |k_{ny}|\geqslant 1. \tag{2.24}$$

Можем считать, что неравенства (2.24) выполнены для всех натуральных n.

Если

$$x_1\leqslant 0, \quad y_1\leqslant 0,$$

то в любой окрестности начала координат имеются точки, эквивалентные к точке x_1, y_1, вида

$$x_1+k\alpha_{nx}+l\alpha_{ny}, \quad y_1+k\beta_{nx}+l\beta_{ny},$$

где k и l — неотрицательные целые числа. Из (2.23) и (2.24) следует, что

$$|f(x_1, y_1)|\leqslant|f(x_1+k\alpha_{nx}+l\alpha_{ny}, \quad y_1+k\beta_{nx}+l\beta_{ny})|\to|f(0)|=0.$$

Следовательно,

$$f(x, y)=0$$

в квадрате $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, Из периодичности функции $f(x, y)$ следует, что $f(x, y)\equiv 0$.

Если неравенства (2.24) не выполнены для бесконечного числа натуральных n, сначала докажем, что функция $f(x, y)=0$ в одном из трех других квадрантов, образуемых осями координат.

д) Пусть $f(x, y)\neq 0$ и имеет место (2.23). Тогда

$$k_{nx}\to 1 \quad \text{и} \quad k_{ny}\to 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Это доказывается таким же способом, как утверждение ∂ в доказательстве теоремы 1.

Такими же рассуждениями как в теореме 1 убедимся, что имеет место:

е) Пусть $f(x, y)\neq 0$ и имеют место соотношения (2.23). Тогда *последовательности*

$$\begin{aligned} \gamma_{nx} &= \frac{\ln k_{nx}}{\sqrt{\alpha_{nx}^2+\beta_{nx}^2}} = \frac{\ln|k_{nx}|+i\operatorname{Arg}k_{nx}}{\sqrt{\alpha_{nx}^2+\beta_{nx}^2}}, \\ \gamma_{ny} &= \frac{\ln k_{ny}}{\sqrt{\alpha_{ny}^2+\beta_{ny}^2}} = \frac{\ln|k_{ny}|+i\operatorname{Arg}k_{ny}}{\sqrt{\alpha_{nx}^2+\beta_{ny}^2}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

ограничены.

Пользуясь этими замечаниями, нетрудно будет установить вид функции $f(x, y)$, имеющий свойство $P(2)$.

Пусть $f(x, y)\neq 0$. Произвольно зафиксируем точки $(x_1, 0)$ и $(0, y_1)$, $x_1\neq 0$, $y_1\neq 0$ и построим функцию

$$\varphi(x, y)=Ce^{ax+by}$$

(C, a и b — комплексные числа), интерполирующую зночения функции $f(x, y)$ в точках $(0, 0)$, $(x_1, 0)$ и $(0, y_1)$:

$$\varphi(0, 0)=f(0, 0),\quad \varphi(x_1, 0)=f(x_1, 0),\quad \varphi(0, y_1)=f(0, y_1). \tag{2.26}$$

Числа C, a и b определены равенствами

$$C=f(0, 0),\quad a=\frac{\ln f(x_1, 0)-\ln f(0, 0)}{x_1},\quad b=\frac{\ln f(0, y_1)-\ln f(0, 0)}{y_1}. \tag{2.27}$$

(Выбор значения логарифма в выражениях для a и b укажем несколько ниже).

Пусть целые числа s_{nx} и s_{ny} выбраны так, что

$$|x_1+s_{nx}\alpha_{nx}|\leqslant|\alpha_{nx}|,\quad |y_1+s_{ny}\beta_{ny}|\leqslant|\beta_{ny}|.$$

Из последних неравенств, из (2.23), (2.25) и (2.26) следует, что при $n\to\infty$

$$f(x_1+s_{nx}\alpha_{nx}, s_{nx}\beta_{nx})=\varphi(x_1, 0)e^{\gamma_{nx}s_{nx}\sqrt{\alpha_{nx}^2+\beta_{nx}^2}}\to f(0, 0)=\varphi(0, 0)$$

и

$$f(s_{ny}\alpha_{ny}, y_1+s_{ny}\beta_{ny})=\varphi(0, y_1)e^{\gamma_{ny}s_{ny}\sqrt{\alpha_{ny}^2+\beta_{ny}^2}}\to f(0, 0)=\varphi(0, 0).$$

Из этих равенств (см. соответствующие места в доказательстве теоремы 1) заключаем, что в формулах (2.27) значения логарифмов могут быть так выбраны, чтобы

$$\gamma_{nx}\to a,\quad \gamma_{ny}\to b \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Пусть теперь $k_n=k_n(x, y)$ и $l_n=l_n(x, y)$ — такие целые числа, что

$$|x+k_n\alpha_{nx}|\leqslant|\alpha_{nx}|,\quad |y+l_n\beta_{ny}|\leqslant|\beta_{ny}|.$$

Из соотношения

$$f(x+k_n\alpha_{nx}+l_n\alpha_{ny}, y+k_n\beta_{nx}+l_n\beta_{ny})\to f(0, 0),\quad n\to\infty,$$

выводим (ср. доказательство теоремы 1)

$$f(x, y) = Ce^{ax+by}.$$

IV. Чтобы изучить вид функции $f(x, y)$, имеющей свойство $P(3)$, рассмотрим сначала частный случай, когда для каждого периода 3-го рода (α, β) функции $f(x, y)$

$$f(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+c} f(x, y), \quad R[a] = R[b] = 0, \tag{2.28}$$

где $a = a(\alpha, \beta)$, $b = b(\alpha, \beta)$ и $c = c(\alpha, \beta)$ — постоянные, зависящие от α и β (a и b — чисто мнимые числа).

Нетрудно проверить, что (см. доказательство теоремы 1):

А. Функция $f(x, y)$ *нигде* не равна нулю, если она не равна тождественно нулю.

Б. Если ограничить выбор $I[c]$ $\big($из (2.28)$\big)$ неравенствами

$$-\pi \leqslant I[c] < \pi,$$

то

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} c = 0.$$

В. *Множество чисел a и b*, определенных в (2.28) и соответствующих достаточно малым периодам (α, β), *ограничено.*

Г. Если (α_1, β_1) и (α_2, β_2) достаточно малые периоды функции $f(x, y)$ и

$$f(x+\alpha_1, y+\beta_1) = e^{a_1x+b_1y+c_1} f(x, y),$$

$$f(x+\alpha_2, y+\beta_2) = e^{a_2x+b_2y+c_2} f(x, y),$$

то

$$a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 = a_2\alpha_1 + b_2\beta_1. \tag{2.29}$$

Д. Пусть $(\alpha_1, 0)$ и $(0, \beta_1)$ — два достаточно малых периода 3-го рода функции $f(x, y)$ $\big($можем предположить, что функция $f(x, y)$ имеет такие периоды, так как этого можно достичь выбором координатных осей$\big)$ и

$$f(x+\alpha_1, y) = e^{A_1x+B_1y+C_1} f(x, y),$$

$$f(x, y+\beta_2) = e^{A_2x+B_2y+C_2} f(x, y).$$

Тогда $\big($по (2.29)$\big)$

$$B_1\beta_2 = A_2\alpha_1.$$

Поэтому существует полином второй степени $\Theta(x, y)$, что

$$Q(x+\alpha_1, y) - Q(x, y) = A_1x + B_1y + C_1,$$

$$Q(x, y+\beta_2) - Q(x, y) = A_2x + B_2y + C_1.$$

Определим функцию $F(x, y)$ равенством

$$f(x, y) = e^{Q(x, y)} F(x, y). \tag{2.30}$$

Каждый период 3-го рода функции $f(x, y)$ будет таковым и для функции $F(x, y)$. При этом

$$F(x+\alpha_1, y) = F(x, y), \tag{2.31}$$

$$F(x, y+\beta_2) = F(x, y) \tag{2.32}$$

и

$$F(x+\alpha, y+\beta) = e^{Ax+By+C} F(x, y), \tag{2.33}$$

где A, B и C — постоянные, зависящие от α и β, из которых A и B — чисто мнимые числа. Применим (2.29) к парам соотношений (2.31), (2.33) и (2.32), (2.33). Получим

$$A=0, \quad B=0.$$

Так что соотношения (2.33) принимают вид

$$F(x+\alpha,\ y+\beta)=e^{C}F(x,\ y).$$

Другими словами, функция $F(x, y)$ имеет свойство $P(2)$ и поэтому

$$F(x,\ y)=Ce^{ax+by},$$

а $\left(\text{см. } (2.30)\right)$

$$f(x,\ y)=Ce^{Q_1(x,\,y)}, \tag{2.34}$$

где $Q_1(x, y)$ — полином второй степени.

Перейдем к общему случаю. Предположим, что среди периодов 3-го рода функции $f(x, y)$ имеются периоды вида $(\alpha_1, 0)$ и $(0, \beta_2)$. Пусть

$$f(x+\alpha_1,\ y)=e^{p(x,\,y)}f(x,\ y)$$

и

$$f(x,\ y+\beta_2)=e^{q(x,\,y)}f(x,\ y),$$

где $p(y, y)$ и $q(x, y)$ — полиномы. Подсчитав $f(x+\alpha_1, y+\beta_2)$ двумя способами, получим

$$f(x+\alpha_1,\ y+\beta_2)=e^{p(x,\,y)+q(x+\alpha_1,\,y)}f(x,\ y)=e^{q(x,\,y)+p(x,\,y+\beta_2)}f(x,\ y).$$

Следовательно

$$p(x,\ y)+q(x+\alpha_1,\ y)=q(x,\ y)+p(x,\ y+\beta_2)-2k\pi i$$

или

$$p(x,\ y+\beta_2)-p(x,\ y)=q(x+\alpha_1,\ y)+\frac{2k\pi i}{\alpha_1}(x+\alpha_1)-$$
$$-\left[q(x,\ y)+\frac{2k\pi i}{\alpha_1}x\right].$$

Отсюда следует, что существует полином $P(x, y)$, для которого

$$\begin{gathered} P(x+\alpha_1,\ y)-P(x,\ y)=p(x,\ y), \\ P(x,\ y+\beta_2)-P(x,\ y)=q(x,\ y)+\frac{2k\pi i}{\alpha_1}x. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Если обозначим

$$f(x,\ y)=e^{P(x,\,y)}F(x,\ y), \tag{2.36}$$

то и функция $F(x, y)$ имеет свойство $P(3)$. При этом каждый период 3-го рода функции $f(x, y)$ является таковым и для $F(x, y)$. Из (2.35) и (2.36) получим

$$\begin{gathered} F(x+\alpha_1,\ y)=F(x,\ y), \\ F(x,\ y+\beta_2)=e^{-\frac{2k\pi i}{\alpha_1}x}F(x,\ y). \end{gathered} \tag{2.37}$$

Пусть (α, β) — период 3-го рода функции $F(x, y)$ и

$$F(x+\alpha,\ y+\beta)=e^{p(x,\,y)}F(x,\ y). \tag{2.38}$$

Пользуясь (2.37) и (2.38) подсчитаем двумя способами

$$F(x+\alpha+\alpha_1,\ y+\beta)=e^{p(x,\ y)}F(x,\ y)=e^{p(x+\alpha_1,\ y)}F(x,\ y)$$

и

$$F(x+\alpha,\ y+\beta+\beta_2)=e^{-\frac{2k\pi i(x+\alpha)}{\alpha_1}+p(x,\ y)}F(x,\ y)=e^{p(x,\ y+\beta_2)-\frac{2k\pi i}{\alpha_1}}F(x,\ y).$$

Следовательно,

$$p(x+\alpha_1,\ y)-p(x,\ y)=2s\pi i$$

и

$$p(x,\ y+\beta_2)-p(x,\ y)=-\frac{2k\pi i\alpha}{\alpha_1}+2l\pi i,$$

где s, k и l — целые числа. Из этих равенств следует, что

$$p(x,\ y)=\frac{2s\pi i}{\alpha_1}x+\left[\frac{2l\pi i}{\beta_2}-\frac{2k\pi i\alpha}{\alpha_1\cdot\beta_2}\right]y+C,$$

где C — постоянная. Таким образом, функция $F(x,\ y)$ удовлетворяет условиям вышерассмотренного частного случая и

$$F(x,\ y)=Ce^{Q_2(x,\ y)},$$

где C — постоянная, а $Q_2(x,\ y)$ — полином второй степени.

Из (2.36) следует, что

$$f(x,\ y)=Ce^{Q_1(x,y)},$$

где C — постоянная и $P_1(x,\ y)$ — полином.

Следствие. *Множество периодов 2-го (3-го) рода непрерывной функции $f(x,\ y)$ может состоять:* 1) *из пустого множества,* 2) *из периодов вида* $(m\alpha,\ m\beta)$, $m=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$ (случай однопериодической функции), 3) *из периодов вида* $(k\alpha_1+l\alpha_2,\ k\beta_1+l\beta_2)$, *где* $k,\ l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$ *а периоды* $(\alpha_1,\ \beta_1)$ *и* $(\alpha_2,\ \beta_2)$ — *неколлинеарные* (случай двояко-периодической функции), 4) *из всех периодов вида* $(t\alpha,\ t\beta)$, $-\infty<t<+\infty$ (периоды заполняют прямую, проходящую через начало координат), 5) *из периодов вида* $(k\alpha_1+t\alpha_2,\ k\beta_1+t\beta_2)$, *где* $k=0,\ \pm 1\pm 2,\ \ldots$ и $-\infty<t<+\infty$ (периоды заполняют совокупность паралельных прямых) и 6) *из всех возможных периодов* $(\alpha,\ \beta)-\infty<\alpha<+\infty,\ -\infty<\beta<+\infty$ (периоды заполняют всю плоскость $x,\ y$). При этом случаи 4) и 5) могут иметь место только для функции вида (2.3) $\big((2.4)\big)$, а случай 6) — только для функции вида (2.5) $\big((2.6)\big)$.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила
в редакцию
17. II. 1960

APIBENDRINTŲ PERIODŲ STRUKTŪRA

A. NAFTALEVIČIUS

(*Reziumė*)

Realus skaičius α vadinamas funkcijos $f(x)$ (x yra realus argumentas, bet funkcija $f(x)$ gali įgyti ir menamas reikšmes) 2-os (3-os) rūšies periodu, jei egzistuoja skaičius k $\big($polinomas $P(x)\big)$, kuriam galioja tapatybė

$$f(x+\alpha)\equiv kf(x)\ \left(f(x+\alpha)\equiv e^{P(x)}f(x)\right).$$

Darbe išnagrinėta minėtų periodų aibės struktūra.

ÜBER DIE STRUKTUR DER MENGE DER VERRALLGEMEINERTEN PERIODEN

A. NAFTALEWITSCH

Es sei $f(x)$ eine Funktion der reellen Variablen, die aber auch imaginäre Werte haben kann.

Die reelle Zahl α nennen wir eine Periode 2-ter (3-ter) Art der Funktion $f(x)$, wenn es eine Zahl k (ein Polynom $P(x)$) gibt, so dass die Gleichung

$$f(x+\alpha) \equiv k f(x)$$

$$\left(f(x+\alpha) \equiv e^{P(x)} f(x)\right)$$

gilt

In der Arbeit wird die Struktur der Menge der Perioden 2-ter (3-ter) Art einer Funktion, die mindestens in einem Punkte stetig ist, untersucht. Es wird bewiesen, dass die Menge solcher Perioden entweder leer, oder von einer Folge $\{n\alpha\}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, gebildet ist oder aber alle reellen Zahlen enthält.

Es sind auch die Perioden einer von zwei Variablen abhängigen Funktion behandelt.