I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. НАФТАЛЕВИЧ

В настоящей работе рассматривается рост мероморфной в единичном круге функции, лорановские разложения которой в окрестностях заданных точек $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i|<1$, $\lim|\lambda_i|=1$, начинаются с заданных групп членов. В частности, изучается вопрос о зависимости порядка роста мероморфной в единичном круге функции от полюсов и главных частей этой фукции.

Для случая функции, мероморфной в комплексной плоскости, этот вопрос решен Дж. Уиттекером [5].

В работе результат Уиттекера переносится на функции, мероморфные в единичном круге. При этом, полный аналог результата Уиттекера получается при условии, что все полюсы рассматриваемой функции лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов.

Большинство результатов, излагаемых в этой работе, приведены без доказательства в заметке [1].

§ 1. Вспомогательные предложения

1. Приведем сначала несколько часто используемых в работе обозначений (по поводу этих обозначений см. [3] п. 133 и п. 216).

А. *Порядок*, *тип* и *класс* возрастающей функции. Положительная, возрастающая функция $S(r)$, $0<r<1$, является функцией конечного порядка, если

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln S(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\nu<\infty. \tag{1.1}$$

Число ν называется *порядком* функции $S(r)$.

При соблюдении соотношения (1.1) $S(r)$ является функцией *максимального*, *нормального* или *минимального типа* (порядка ν) в зависимости от того, является ли

$$\overline{\lim_{r\to 1}}(1-r)^{\nu}S(r)$$

бесконечным, конечным положительным или нулем.

Если равенство (1.1) имеет место, то интеграл

$$\int^{1} (1-r)^{k-1} S(r)\,dr \tag{1.2}$$

сходится для $k>\nu$ и расходится для $k<\nu$.

Функция $S(r)$ принадлежит *классу сходимости*, если интеграл (1.2) сходится при $k=\nu$, и *классу расходимости*, если этот интеграл расходится. Функция $S(r)$ может принадлежать классу сходимости лишь в том случае, если она минимального типа.

Б. *Показатель сходимости, функции* $n(r, \lambda)$ и $N(r, \lambda)$. Последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots<1$, $\lim|\lambda_n|=1$ имеет конечный *показатель сходимости*, если существует такое положительное число L, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\lambda_n|)^k \tag{1.3}$$

сходится для $k>L$. Показатель сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$ равен μ, если ряд (1.3) сходится для $k>\mu$ и расходится для $k<\mu$.

Пусть $n(r, \lambda)$ — число точек λ_n в круге $|z|\leqslant r$, и

$$N(r, \lambda)=\int_0^r \frac{n(t, \lambda)-n(0, \lambda)}{t}\,dt+n(0, \lambda)\ln r.$$

Тогда для $k>1$ ряд (1.3) и интегралы

$$\int^{1} (1-t)^{k-1} n(t, \lambda)\,dt, \qquad \int^{1} (1-t)^{k-2} N(t, \lambda)\,dt$$

сходятся или расходятся одновременно. Если

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-|\lambda_i|)<\infty,$$

то

$$\int^{1} n(t, \lambda)\,dt<\infty$$

и

$$\lim_{r\to 1} N(r, \lambda)<\infty.$$

Отсюда следует:

а. Если показатель сходимости последовательности $\{\lambda_i\}$ равен μ, то порядок функции $n(r, \lambda)$ также равен μ.

б. В случае $\mu>1$, порядок функции $N(r, \lambda)$ равен $\mu-1$ и функции $n(r, \lambda)$ и $N(r, \lambda)$ принадлежат тому же классу (но имеют различные порядки).

Заметим, что в случае $\mu>1$ $n(r, \lambda)$ и $N(r, \lambda)$ одного и того же типа.

В. Функции $T(r, f)$, $m(r, f)$, $n(r, f)$ и $N(r, f)$ означают *характеристику, среднее значение от* $\ln^+|f(re^{i\varphi})|$, *число* и *плотность полюсов* мероморфной функции $f(z)$:

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), \quad m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

$$N(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\,dt + n(0, f)\ln r.$$

Порядок, тип и класс функции $f(z)$ такие же, по определению, как у функции $T(r, f)$.

2. Пусть последовательность $\{\lambda_i\}$ имеет конечный показатель сходимости, и пусть для некоторого $h > 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|)^{h-1} < \infty. \tag{1.4}$$

Опишем около каждой из точек λ_i (начиная с некоторого i), как около центра, два концентрических круга K_i и L_i радиусов $(1 - |\lambda_i|)^h$ и $2(1 - |\lambda_i|)^h$. Множество точек всех замкнутых кругов $\overline{K}_i$ состоит из связных компонент (континуумов), которые назовем „*облаками*“.

Предложение 1. *Каждое „облако“ образовано конечным числом кругов $\overline{K}_i$ и содержит конечное число точек λ_i.*

Концентрические с центром $z = 0$ окружности L_i' и L_i'', касающие окружность L_i, отсекают на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ отрезок H_i (отрезок H_i назовем в дальнейшем круговой проекцией круга L_i) эвклидовой длины $4(1 - |\lambda_i|)^h$ и неэвклидовой длины (единичный круг рассматривается как гиперболическая плоскость)

$$D(H_i) = \int\limits_{|\lambda_i| - 2(1 - |\lambda_i|)^h}^{|\lambda_i| + 2(1 - |\lambda_i|)^h} \frac{dr}{1 - r^2} \leqslant K(1 - |\lambda_i|)^{h-1},$$

где K — постоянная, независящая от i.

Из (1.4) и последнего неравенства следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(H_i) < \infty. \tag{1.5}$$

Следовательно, неэвклидова длина круговой проекции любого „облака“ ограничена, и „облако“ состоит поэтому из конечного числа кругов: в противном случае „облако“ простиралось бы, в силу $\lim|\lambda_i| = 1$, до самой окружности $|z| = 1$, и неэвклидова длина ее круговой проекции оказалась бы бесконечной.

Определение. *Окружность $|z| = r$, $r < 1$, непересекающую ни одного круга L_i*, назовем „*окружностью U*“.

Предложение 2. *Для любого $\rho < 1$ имеется „окружность U“, радиус которой r удовлетворяет неравенству $\rho < r < 1$.*

Множество точек круговых проекций H_i состоит из неперекрывающихся отрезков N_i, которые в совокупности, в силу (1.5), не покрывают целиком интервала $(\rho, 1)$. Следовательно, имеются „окружности U“, как угодно близкие к единичной.

Предложение 3. *Если r, $r>r_0$ — радиус некоторой „окружности U“, то имеется другая, „окружность U“*, радиус которой больше r но меньше $r+\frac{1-r}{2}$.

Это следует из (1.5) и из того, что неэвклидова длина отрезка $\left[r,\ r+\frac{1-r}{2}\right]$ не меньше $\ln 3$.

Из предложения 3 непосредственно следует:

Предложение 4. *Если R — наибольший модуль точек данного „облака“, достаточно близкого к единичной окружности, то наименьший модуль точек того же „облака“ не меньше $R-(1-R)$.*

Из определения „окружности U“ и построения „облаков“ легко следует:

Предложение 5. *Если R — наибольший модуль точек данного „облака“, то расстояние между этим „облаком“ и любой „окружности U“ не меньше $(1-R)^h$.*

3. Предложение 6. *Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция с полюсами в точках $\{\lambda_i\}$. Если порядок функции $f(z)$ равен α, то для любого $\varepsilon<0$ при $|z|=r>r_0=r_0(\varepsilon)$*

$$|f(z)|<\exp\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\alpha+\varepsilon} \tag{1.6}$$

вне „облаков“, образованных для последовательности полюсов $\{\lambda_i\}$.

Из формулы Пуассона — Иенсена следует, что

$$\ln|f(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\gamma})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\gamma-\Theta)}d\gamma+k_0\ln\frac{\rho}{r}+$$
$$+\sum_{|\lambda_i|<\rho}\ln\left|\frac{\rho^2-\bar\lambda_i z}{z-\lambda_i}\right|\leqslant m(\rho,f)\frac{\rho+r}{\rho-r}+k_0\ln\frac{1}{r}+$$
$$+n(\rho,\lambda)\max_i\left[\ln\frac{2}{|z-\lambda_i|}\right],\qquad z=re^{i\Theta},\quad r<\rho<1.$$

Пусть

$$r+\frac{1-r}{4}\leqslant\rho\leqslant r+\frac{1-r}{2}.$$

Так как точка z лежит вне „облаков“, то

$$\max_i\left[\ln\frac{2}{|z-\lambda_i|}\right]\leqslant\ln\frac{2^{h+1}}{(1-r)^h}<\frac{1}{(1-r)^\varepsilon},$$

где $\varepsilon\to0$ при $r\to1$.

Далее имеем

$$\frac{\rho+r}{\rho-r}m(\rho,f)\leqslant\frac{8}{1-r}T(\rho,f)\leqslant\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1+\varepsilon}}$$

и

$$n(\rho,\lambda)\leqslant\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1+\varepsilon}},\qquad \varepsilon\to0\quad\text{при}\quad r\to1;$$

Из всех этих оценок следует неравенство (1.6).

4. Предложение 7. *Обозначим*

$$I(r,\ \mu)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{|1-z|^{\mu}}\,d\varphi,\qquad z=re^{i\varphi},\qquad \mu\geqslant 0,\qquad r<1,$$

и

$$U(\alpha,\ r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^{+}\frac{1-\alpha}{|1-z|}\,d\varphi,\qquad z=re^{i\varphi},\qquad 0<\alpha<1,\qquad r<1.$$

Имеют место оценки

$$\begin{cases} I(r,\ 1)\leqslant K_1\ln\dfrac{1}{1-r}, & \\ I(r,\ \mu)\leqslant K_{\mu}, & \mu<1,\\ I(r,\ \mu)\leqslant K_{\mu}\left(\dfrac{1}{1-r}\right)^{\mu-1}, & \mu>1,\end{cases}\tag{1.7}$$

и

$$U(r,\ \alpha)<1-\alpha.\tag{1.8}$$

Пусть ds — дифференциал длины дуги окружности $|z|=r$. Тогда для $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$

$$d\varphi=\frac{ds}{r}\leqslant\frac{d\,|1-z|+|1-z|\ |d\arg(1-z)|}{r}.$$

Следовательно,

$$I(r,\ \mu)=2\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{|1-z|^{\mu}}\leqslant\frac{2}{r}\int\limits_{1-r}^{1+r}\frac{d\,|1-z|}{|1-z|^{\mu}}+\frac{2}{r}\int\frac{|d\arg(1-z)|}{|1-z|^{\mu-1}},$$

где последний интеграл берется по верхней полуокружности $|z|=r$.

Приняв во внимание, что $|1-z|\geqslant 1-r$ и полное изменение $\arg(1-z)$ на полуокружности не превосходит π, получаем

$$I(r,\ \mu)\leqslant\frac{2}{r(\mu+1)}\left[(1-r)^{1-\mu}-(1+r)^{1-\mu}\right]+2\pi(1-r)^{1-\mu},\qquad \mu\neq 1,$$

$$I(r,\ 1)\leqslant\frac{2}{r}\left[\ln(1+r)-\ln(1-r)\right]+2\pi,$$

откуда и следуют оценки (1.7).

Чтобы доказать неравенство (1.8), заметим, что

$$\frac{1-\alpha}{|1-z|}\leqslant\frac{1-\alpha}{|\sin\varphi|}\leqslant\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\alpha}{|\varphi|},\qquad 0\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$U(r,\ \alpha)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln^{+}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\alpha}{\varphi}\right]d\varphi=\frac{1-\alpha}{2}\int\limits_0^{1}\ln\frac{1}{\varphi}\,d\varphi=\frac{1-\alpha}{2}.$$

§ 2. Аналог теоремы Уиттекера

1. По теореме Миттаг-Леффлера для любой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i|<1$, $\lim|\lambda_i|=1$ и любой последовательности рациональных функций вида

$$G(z,\ A_i,\ \lambda_i)=\sum_{l=1}^{k_i}\frac{A_{il}}{(z-\lambda_i)^l},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\tag{2.1}$$

существует бесконечное множество мероморфных в единичном круге функций, имеющих полюсы в точках $\{\lambda_i\}$ и только в них с главными частями (2.1). Очевидно, что порядок такой функции не меньше порядка функции $N(r, \lambda)$. Другими словами, множество порядков мероморфных в единичном круге функций, имеющих главные части (2.1), ограничена снизу. Возникает задача: определить точную нижнюю границу множества этих порядков.

Предположим, что условие (1.4) выполнено и соберем в „облака" точки последовательности $\{\lambda_i\}$. Обозначая „облака" буквами $O_1, O_2, \ldots$, пронумеруем их так, чтобы наибольшие модули R_i точек „облаков" не убывали.

Представим сумму главных частей (2.1), относящихся к группе полюсов $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{i,m_i}$ „облака" O_i, в виде

$$\frac{P_i(z)}{R_i(z)} = \frac{P_i(z)}{\prod\limits_{j=1}^{m_i}(z-\lambda_{ij})^{k_{ij}}} = \sum_{l=1}^{m_i}\sum_{m=1}^{k_{il}} \frac{B_{iem}}{(z-\lambda_{ie})^m \prod\limits_{j=1}^{l-1}(z-\lambda_{ij})^{k_{ij}}}. \tag{2.2}$$

Если

$$k_{i1}+k_{i2}+\ldots+k_{im_i}=s_i, \tag{2.3}$$

то $P_i(z)$ — полином степени s_i-1.

Пусть P_i — наибольший из модулей коэффициентов многочлена $P_i(z)$, B_i — наибольший из чисел $|B_{iej}|$ (i фиксировано) и $N(r, \lambda)$ — функция плотности последовательности $\{\lambda_i\}$ (точка λ_i считается k_i раз). Положим

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+ P_i}{\ln\frac{1}{1-R_i}} = \nu, \quad \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+ B_i}{\ln\frac{1}{1-R_i}} = \nu_1, \quad \lim_{r\to 1} \frac{\ln N(r, \lambda)}{\ln\frac{1}{1-r}} = \mu. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Если точки $\{\lambda_i\}$ находятся в конечном числе некасательных к единичной окружности углов с вершинами на окружности $|z|=1$, то существует мероморфная в единичном круге функция $F(z)$ с главными частями (2.1) порядка*

$$\rho = \max(\nu-1,\ \mu) = \max(\nu_1-1,\ \mu), \tag{2.5}$$

но не существует мероморфной функции с теми же главными частями меньшего порядка [1].

Доказательство. Если приведем правую часть равенства (2.2) к общему знаменателю и примем во внимание, что $|\lambda_i|<1$, то получаем

$$P_i < 2^{s_i} B_i s_i.$$

Из (2.3) следует, что

$$s_i \leqslant n(R_i, \lambda). \tag{2.6}$$

Следовательно,

$$\nu \leqslant \max(\nu_1,\ \mu+1). \tag{2.7}$$

Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция с главными частями (2.1) и пусть ее порядок равен α. Очевидно, что

$$\alpha \geqslant \mu. \tag{2.8}$$

Покажем, что $\alpha \geqslant \nu_1 - 1$.

Функцию $f(z)$ представим в виде (см. (2.2))

$$f(z) = h_i(z) + \frac{P_i(z)}{R_i(z)},$$

где $h_i(z)$ — регулярная в „облаке" O_i функция. Из этого представления и равенства (2.2) следует

$$B_{isj}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_i} f(z)(z-\lambda_{is})^{j-1}\prod_{m=1}^{l-1}(z-\lambda_{im})^{k_{im}}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_i}\frac{P_i(z)}{R_i(z)}(z-\lambda_{il})^{j-1}\prod_{m=1}^{l-1}(z-\lambda_{im})^{k_{im}}dz,$$

где Q_i — контур „облака" O_i.

Длина контура Q_i меньше единицы и на этом контуре $|z-\lambda_{ik}|<1$. Следовательно, $|B_i|\leqslant\max|f(z)|$ и $|B_i|\leqslant\max\frac{|P_i(z)|}{|R_i(z)|}$ при $z\in Q_i$. Отсюда и из предложения 6 (§ 1) следует, что

$$|B_i|\leqslant\exp(1-R_i)^{-(\alpha+1+\varepsilon)},\quad B_i\leqslant\frac{s_iP_i}{(1-R_i)^{h s_i}}.$$

Следовательно

$$\nu_1\leqslant\alpha+1,\quad \nu_1\leqslant\max(\nu,\ \mu+1). \tag{2.9}$$

Из (2.7), (2.8) и (2.9) получаем

$$\max(\nu-1,\ \mu)=\max(\nu_1-1,\ \mu)\leqslant\alpha. \tag{2.10}$$

Таким образом, мы доказали, что порядок мероморфной в единичном круге функции с главными частями (2.1) удовлетворяет неравенству (2.10). Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось построить мероморфную функцию с главными частями (2.1), порядок которой не больше $\rho=\max(\nu-1,\ \mu)$.

Можем (при условиях теоремы) без ограничения общности предположить, что точки λ_i имеют единственную предельную точку $z=1$ и находятся в некасательном к окружности $|z|=1$ угле с вершиной $z=1$. Легко проверить, что и все „облака" находятся также в таком угле (может быть в несколько большем).

Правильная дробь (2.2) представима для z, лежащих вне „облака" O_i, интегралом Коши

$$\frac{P_i(z)}{R_i(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_i}\frac{P_i(\xi)}{R_i(\xi)}\frac{d\xi}{\xi-z}, \tag{2.11}$$

где контур Q_i обходится в отрицательном направлении.

Подставив в интеграл (2.11)

$$\frac{1}{\xi-z}=-\sum_{l=0}^{n_i}\frac{(\xi-1)}{(z-1)^{l+1}}+\frac{(\xi-1)^{n_i}}{(z-1)^{n_i}}\frac{1}{\xi-z}$$

и обозначив

$$a_{k+1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_i}\frac{(\xi-1)^kP_i(\xi)}{R_i(\xi)}d\xi,$$

получаем

$$H_i(z)=\frac{P_i(z)}{R_i(z)}+\sum_{k=1}^{n_i}\frac{a_k}{(z-1)^k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_i}\frac{P_i(\xi)(\xi-1)^{n_i}}{R_i(\xi)(z-1)^{n_i}}\frac{d\xi}{\xi-z} \tag{2.12}$$

(числа n_i будут несколько ниже надлежащим образом определены).

Заметим, что $H_i(z)$ и $\frac{P_i(z)}{R_i(z)}$ имеют в единичном круге одинаковые главные части, и перейдем к оценке модуля $H_i(z)$ на „окружности U“ (определение „окружности U“ см. в § 1).

Для ξ, лежащих на контуре Q_i, и для z, находящихся на любой „окружности U“, имеем

$$|P_i(\xi)|\leqslant s_i P_i, \quad |R_i(\xi)|\geqslant |1-R_i|^{s_i h},$$
$$\frac{1}{|\xi-z|}\leqslant\frac{1}{(1-R_i)^h}. \tag{2.13}$$

Кроме того, ввиду того, что все „облака“ находятся в некасательном угле с вершиной $z=1$,

$$|1-\xi|\leqslant K(1-|\xi|)\leqslant 2K(1-R_i), \qquad \xi\in Q_i, \tag{2.14}$$

где K — постоянная, зависящая только от раствора угла.

Из (2.12), (2.13) и (2.14) следует

$$|H_i(z)|\leqslant\frac{s_i P_i}{(1-R_i)^{hs_i+h}}\,\frac{[2K(1-R_i)]^{n_i}}{|1-z|^{n_i}}. \tag{2.15}$$

Далее $\Big($см. (2.4), (2.5) и (2.6)$\Big)$

$$\varlimsup_{i\to\infty}\frac{\ln s_i}{\ln\frac{1}{1-R_i}}\leqslant\varlimsup_{i\to\infty}\frac{\ln n(R_i,\lambda)}{\ln\frac{1}{1-R_i}}\leqslant\mu+1\leqslant\rho+1$$

и

$$\begin{cases}\dfrac{s_i P_i}{(1-R_i)^{hs_i+h}}\leqslant\exp\dfrac{1}{(1-R_i)^{\rho+1+\varepsilon_i}},\\[2ex] n(R_i,\lambda)\leqslant\dfrac{1}{(1-R_i)^{\rho+1+\varepsilon_i}},\end{cases} \tag{2.16}$$

где

$$\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i=0. \tag{2.17}$$

Если в (2.12) положим

$$\frac{1}{(1-R_i)^{\rho+1+\varepsilon_i}}\leqslant n_i\leqslant C\frac{1}{(1-R_i)^{\rho+1+\varepsilon_i}}, \qquad n_i\geqslant n(R_i,\lambda)\geqslant i, \tag{2.18}$$

где $C>1$, то из оценок (2.15), (2.16) и (2.18) получаем

$$|H_i(z)|\leqslant\frac{[2Ke(1-R_i)]^{n}}{|1-z|^{n_i}}; \tag{2.19}$$

При

$$\frac{2Ke(1-R_i)}{1-|z|}\leqslant\frac{1}{2}$$

имеем в силу (2.18) и (2.19)

$$|H_i(z)|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n_i}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{i}. \tag{2.20}$$

Если же

$$\frac{2K(1-R_i)}{1-|z|}>\frac{1}{2}$$

и ε — любое положительное число, то из (2.17), (2.18) и (2.19) следует, что для достаточно больших i, $i>N_2$, будет $\varepsilon_i<\varepsilon$ и

$$|H_i(z)|\leqslant\max\left\{\left[\frac{2Ke(1-R_i)}{|1-z|}\right]^{\frac{1}{(1-R_i)^{\rho+1+\varepsilon}}},\ 1\right\}.$$

Дифференцированием легко проверить, что

$$\max\left(\frac{re}{x}\right)^{Cx^{\rho}}=e^{k_1 Cr^{\rho}},\quad k_1=\frac{1}{\rho}e^{\rho-1}.$$

Следовательно,

$$|H_i(z)|\leqslant\exp\left[C_1\frac{1}{|1-z|^{\rho+1+\varepsilon}}\right],\qquad i\geqslant N_2,\tag{2.21}$$

где C_1 — некоторая постоянная, независящая от r и i.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(z)=f_1(z)+f(z),$$

$$f_1(z)=\sum_{i=1}^{N_1}G(z,A_i,\lambda_i)+\sum_{i=1}^{N_2}H_i(z),\quad f(z)=\sum_{i=N_2}^{\infty}H_i(z);\tag{2.22}$$

здесь N_1 — число полюсов, невключенных в „облака", и N_2 — число, определенное в (2.21).

Функция $f_1(z)$ — рациональная, и поэтому

$$m(r,f_1)\leqslant C,\qquad r>1.\tag{2.23}$$

Чтобы оценить $m(r,f)$, функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z)=f_2(z)+f_3(z),$$

$$f_2(z)=\Sigma_2 H_i(z),\quad f_3(z)=\Sigma_3 H_i(z),\tag{2.24}$$

где сумма Σ_2 берется по тем i, для которых $i>N_2$ и

$$\frac{2Ke(1-R_i)}{1-|z|}>\frac{1}{2},$$

а сумма Σ_3 — по тем i, для которых $i>N_2$ и

$$\frac{2Ke(1-R_i)}{1-|z|}\leqslant\frac{1}{2}.$$

На „окружности U" из (2.21) имеем

$$\ln|f_2(z)|<\ln n(\bar r,\lambda)+C_1\frac{1}{|1-z|^{\rho+1+\varepsilon}},$$

где $\bar r$ определяется из уравнения

$$\frac{2Ke(1-\bar r)}{1-|z|}=\frac{1}{2},\quad 1-\bar r=\frac{1-|z|}{4Ke}.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.7), выводим

$$m(r,f_2)<\frac{C}{(1-r)^{\rho+\varepsilon}},\tag{2.25}$$

где r — радиус любой „окружности U".

Что касается $f_3(z)$, то в силу (2.20)

$$|f_3(z)|<1.\tag{2.26}$$

Из (2.4), (2.24), (2.25) и (2.26) следует

$$T(r,F)<\frac{C}{(1-r)^{\rho+\varepsilon}},\tag{2.27}$$

если r — радиус „окружности U". Так как $T(r,F)$ — возрастающая функция и для каждого r имеется „окружность U" радиуса ρ, $r<\rho<r+\frac{1-r}{2}$

(предложение 3 § 1), то неравенство (2.27) выполнено (может быть при другом значении C) для всех $r<1$. Таким образом,

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln T(r, F)}{\ln \frac{1}{1-r}} \leqslant \rho.$$

Но порядок функции $F(z)$ $\Big($см. (2.5) и (2.10)$\Big)$ не меньше ρ, следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln T(r, F)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \rho.$$

Следствие 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция с главными частями* (2.1). *Представим ее в виде*

$$f(z)=\sum_{i=1}^{N_1} G(z, A_i, \lambda_i)+\sum_{i=1}^{\infty} H_i(z)+\varphi(z),$$

где $G(z, A_i, \lambda_i)$ и $H_i(z)$ — рациональные функции, определенные в (2.1), (2.12) и (2.18). *Функция $\varphi(z)$, очевидно, регулярна в единичном круге.*

Если все полюсы функции $f(z)$ лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов, то порядок функции $f(z)$ определяется числом $\tau=\max(\rho, \tau)$, где ρ — число, определенное в (2.5), *и τ — порядок функции $\varphi(z)$.*

Следствие 2. Если положить $\Big($см. (2.1)$\Big)$

$$A_i=\max\Big[|A_{i1}|, |A_{i2}|, \ldots, |A_{i, k_i}|\Big]$$

и

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ A_i}{\ln \frac{1}{1-|\lambda_i|}}=\alpha, \tag{2.28}$$

то можно показать $\Big($см. вывод неравенства (2.7)$\Big)$, что $\nu\leqslant\max(\alpha, \mu+1)$. Поэтому имеет место следующее предложение:

Если все точки λ_i находятся в конечном числе некасательных к единичной окружности углов, то существует меромофная в круге $|z|<1$ функция с главными частями (2.1) *порядка ρ, $\mu\leqslant\rho\leqslant\max(\alpha-1, \mu)$* [1].

Указанная оценка для порядка — точная. Чтобы убедится в этом, достаточно рассмотреть случай, когда каждое „облако" содержит только один простой полюс, и применить теорему 1.

2. Обратимся к случаю, когда точки λ_i расположены любым образом в круге. Иными словами, откажемся от условия, что все точки λ_i находятся в конечном числе накасательных углов.

Сохраним обозначения предыдущего пункта. В частности, $\{\lambda_i\}$ — последовательность полюсов, O_i — „облака", $G(z, A_i, \lambda_i)$ и $\frac{P_i(z)}{R_i(z)}$ — рациональные функции, определенные в (2.1) и (2.2), а ν, ν_1 и μ — числа, определенные в (2.4). Кроме того, обозначим через $n_1(r)$ число „облаков", лежащих в круге радиуса r, и

$$\beta=\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\ln n_1(r)}{\ln \frac{1}{1-r}}. \tag{2.39}$$

Теорема 2. *Пусть τ — точная нижняя граница порядков всех мероморфных в единичном круге функции, имеющих главные части $G(z, A_i, \lambda_i)$.*

А. *Если*

$$\rho_1 = \max(\nu_1 - 1,\ \mu), \quad \rho = \max(\nu - 1,\ \mu),$$

$$\sigma = \max[\min(\nu - 1 + \beta,\ \nu),\ \mu], \tag{2.32}$$

то $\rho = \rho_1$ *и*

$$\rho \leqslant \tau \leqslant \sigma. \tag{2.31}$$

Б. *Пусть* η — *произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\rho \leqslant \eta \leqslant \sigma$. *Для произвольно зафиксированных значений неотрицательных чисел* μ, ν *и* β *и фиксированной последовательности* $\{|\lambda_i|\}$ *можно так выбрать главные части* $G(z, A_i, \lambda_i)$, *чтобы соответствующее число* τ *было равно* η *и выполнялись равенства* (2.4) *и* (2.29).

Доказательство. Неравенства

$$\rho = \rho_1 \leqslant \tau$$

устанавливаются таким же образом, как в теореме 1.

Пусть Θ_j — аргумент некоторой точки „облака“ O_j и

$$H_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Q_j} \frac{P_j(z)}{R_j(z)} \frac{(\xi - e^{i\Theta_j})^{n_j}}{(z - e^{i\Theta_j})^{n_j}} \frac{d\xi}{\xi - z}, \tag{2.33}$$

где контур Q_j обходится в отрицательном направлении и n_j — целое число, которое будет определено ниже. Как в теореме 1, можно убедится, что для z, лежащих вне „облака“ O_j, $H_j(z)$ представляет рациональную функцию, имеющую в единичном круге те же главные части, что и рациональная функция $\frac{P_j(z)}{R_j(z)}$. На „окружности U“ имеет место аналогичная (2.15) оценка

$$|H_j(z)| \leqslant \frac{P_j s_j}{(1 - R_j)^{hs_j + h}} \frac{[2K(1 - R_j)]^{n_j}}{|e^{i\Theta_j} - z|^{n_j}}. \tag{2.34}$$

Рассмотрим два случая.

1. Случай $\beta \geqslant 1$. Обозначим

$$\gamma = \max(\nu,\ \mu). \tag{2.35}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$\sigma = \gamma, \tag{2.36}$$

и выберем числа n_j $\Big($см. (2.34)$\Big)$.

Если

$$P_j \geqslant \frac{s_j}{(1 - R_j)^{hs_j + h}},$$

или

$$\frac{P_j s_j}{(1 - R_j)^{hs_j + h}} \leqslant \exp \frac{1}{(1 - R_j)^{\gamma}},$$

то $\Big($см. (2.4)$\Big)$

$$\frac{P_j s_j}{(1 - R_j)^{hs_j + h}} \leqslant \exp \frac{1}{(1 - R_j)^{\gamma + \varepsilon_j}},$$

где $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$.

В этом случае возьмем

$$\frac{1}{(1 - R_j)^{\gamma + \varepsilon_j}} \leqslant n_j \leqslant L \frac{1}{(1 - R_j)^{\gamma + \varepsilon_j}}, \qquad L > 1. \tag{2.37}$$

Для остальных j, т. е. для тех j, для которых

$$P_j < \frac{s_j}{(1-R_j)^{hs_j+h}}$$

и

$$\frac{P_j s_j}{(1-R_j)^{hs_j+h}} > \exp\frac{1}{(1-R_j)^{\gamma}},$$

возьмем

$$5(hs_j+h)\ln\frac{1}{1-R_j} \leqslant n_j \leqslant d(hs_j+h)\ln\frac{1}{1-R_j}, \qquad d>5. \tag{2.38}$$

При таком выборе натуральных чисел n_j имеют место неравенства

$$n_j > h, \quad n_j > \frac{1}{(1-R_j)^{\gamma}}, \quad \frac{P_j s_j}{(1-R_j)^{hs_j+h}} < e^{n_j}. \tag{2.39}$$

Из этих неравенств и из (2.34) следует

$$|H_j(z)| \leqslant \left[\frac{2eK(1-R_j)}{|e^{i\theta_j}-z|}\right]^{n_j}. \tag{2.40}$$

Если

$$\frac{2eK(1-R_j)}{1-|z|} \leqslant \frac{1}{2},$$

то из (2.39) и (2.40) следует

$$|H_j(z)| \leqslant \left[\frac{2eK(1-R_j)}{1-|z|}\right]^{h}. \tag{2.41}$$

Если же

$$\frac{2eK(1-R_j)}{1-|z|} \geqslant \frac{1}{2},$$

то для любого $\varepsilon>0$ и $j>N_0$, $N_0=N_0(\varepsilon)$, при n_j, удовлетворяющих неравенствам (2.37), получаем $\left(\text{ср. с } (2.21)\right)$

$$|H_j(z)| \leqslant \exp\left[c\frac{1}{|z-e^{i\theta_j}|^{\gamma+\varepsilon}}\right], \quad c \text{ — постоянная}, \tag{2.42}$$

а при n_j, удовлетворяющих неравенствам (2.38), —

$$|H_j(z)| \leqslant \max\left\{\left[\frac{2eK(1-R_j)}{|e^{i\theta_j}-z|}\right]^{d(hs_j+h)\ln\frac{1}{1-R_j}}, 1\right\}. \tag{2.43}$$

В последнем случае $\left(\text{см. } (1.8) \text{ и } (2.43)\right)$ имеем

$$m(r, H_j) \leqslant c_1 s_j(1-R_j)\ln\frac{1}{1-R_j}, \quad c_1 \text{ — постоянная}. \tag{2.44}$$

Рассмотрим функции $F(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$, определенные формулами (2.22) и (2.24). Функция $f_1(z)$ — рациональная и поэтому имеет место оценка (2.23).

Из (1.4) и (2.41) получаем

$$|f_3(z)| \leqslant \frac{K}{(1-|z|)^h},$$

где K — постоянная. Следовательно,

$$m(r, f_3) \leqslant (h+1)\ln\frac{1}{1-r} \tag{2.45}$$

для r, достаточно близких к 1.

Что касается $f_2(z)$, то представим ее в виде

$$f_2(z) = \Sigma' H_j(z) + \Sigma^2 H_j(z),$$

где сумма Σ' распространена на значения j, для которых $H_j(z)$ оценивается по (2.42), а Σ^2 — на значения j, для которых $m(r, H_j)$ оценивается по (2.44).

Для Σ' имеем

$$|\Sigma'|<n_1(\bar{r},\ \lambda)\exp C_1\frac{1}{(1-|z|)^{\gamma+\varepsilon}},\quad 1-r=\frac{1-|z|}{4Ke}.$$

Следовательно,

$$m(r,\ \Sigma')\leqslant\frac{C_2}{(1-r)^{\gamma+\varepsilon}}. \tag{2.46}$$

Из (2.44) следует

$$m(r,\ \Sigma^2)\leqslant\ln n_1(\bar{r})+\sum_{R_j\leqslant\bar{r}}c_1s_j(1-R_j)\ln\left(\frac{1}{1-R_j}\right).$$

В силу (2.4) и предложения 4 § 1

$$\sum_{R_j\leqslant\bar{r}}s_j(1-R_j)\ln\frac{1}{1-R_j}\leqslant c\sum_{|\lambda_j|\leqslant\bar{r}}k_j(1-|\lambda_j|)\ln\frac{1}{1-|\lambda_j|}=$$

$$=\int_0^{\bar{r}}(1-t)\ln\frac{1}{1-t}\,dn(t,\ \lambda)=(1-\bar{r})\ln\frac{1}{1-\bar{r}}\,n(\bar{r},\ \lambda)-$$

$$-\int_0^{\bar{r}}[1+\ln(1-t)]\,n(t,\ \lambda)\,dt\leqslant(1-\bar{r})^{-(\mu+\varepsilon_1)}\leqslant(1-r)^{-(\mu+\varepsilon_2)},$$

где $\varepsilon_2\to 0$ при $r\to 1$. Следовательно,

$$m(r,\ \Sigma^2)\leqslant\frac{1}{(1-r)^{\mu+\varepsilon}},\qquad \lim_{r\to 1}\varepsilon=0. \tag{2.47}$$

Таким образом $\big($см. (2.22), (2.23), (2.24), (2.35), (2.45), (2.46) и (2.47)$\big)$

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln T(r,\ F)}{\ln\dfrac{1}{1-r}}\leqslant\gamma. \tag{2.48}$$

Неравенство (2.48) устанавливает нужный результат, ибо $\gamma=\sigma$ $\big($см. (2.36)$\big)$.

2. Случай $0\leqslant\beta<1$. Очевидно, что все выкладки, приведенные при разборе первого случая, остаются в силе (различие с первым случаем в том, что теперь $\gamma\geqslant\sigma$). В частности, имеет место и неравенство (2.48). С другой стороны, если $\mu\geqslant\nu$, то и теперь $\gamma=\sigma$ и нужный результат следует опять из (2.48).

Пусть $\nu>\mu$, $\gamma=\nu$. Нам нужно улучшить оценку (2.46).

Из (1.8), (2.37) и (2.40) следует, что для любого $\varepsilon<0$ начиная с некоторого N, $j>N$,

$$m(r,\ H_j)<C\frac{1}{(1-R_j)^{\nu-1+\varepsilon}},$$

где C — постоянная. Поэтому вместо (2.46) имеем

$$m(r,\ \Sigma')\leqslant\ln n_1(r)+C\sum_{R_j<\bar{r}}{}'\frac{1}{(1-R_j)^{\nu-1+\varepsilon}}. \tag{2.49}$$

Если $1-\nu-\varepsilon>\beta$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-R_j)^{1-\nu-\varepsilon}<\infty.$$

Если же $1-\nu-\varepsilon<\beta$, то

$$\sum_{R_j<\bar r}(1-R_j)^{1-\nu-\varepsilon}=\int_0^{\bar r}(1-t)^{1-\nu-\varepsilon}dn_1(t)=(1-\bar r)^{1-\nu-\varepsilon}n_1(\bar r)+$$

$$+(1-\nu-\varepsilon)\int_0^{\bar r}(1-t)^{-\nu-\varepsilon}n_1(t)<(1-r)^{1-\beta-\nu-\varepsilon}.$$

Таким образом, из (2.49) следует

$$m(r,\ \Sigma')\leqslant\frac{1}{(1-r)^{\max(\nu-1+\beta+\varepsilon,\ \varepsilon)}}.$$

Отсюда и из полученных в предыдущем случае оценок для функций $f_1(z)$, $f_3(z)$ и Σ^2 следует

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln T(r,\ F)}{\ln\dfrac{1}{1-r}}\leqslant\sigma.$$

Остается доказать утверждение Б теоремы.

Если $\sigma=\mu$, то $\big($см. (2.30) и (2.31)$\big)$ $\tau=\mu=\rho=\rho_1$. Если же $\sigma>\mu$, то из последовательности $\{\lambda_i\}$ выбираем подпоследовательность $\{\sigma_i\}$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-|\tau_i|)<\infty$$

и имеющую показатель сходимости, равный $\eta-\rho$. Точки τ_i передвигаем по концентрическим с центром в точке $z=0$ окружностям способом, указанным в лемме 2 работы [2] (стр. 13). Мы получаем последовательность $\{\lambda'_i\}$, состоящую из точек τ'_i, полученных передвижением точек τ_i, и из точек λ_i, невходящих в последовательность $\{\tau_i\}$.

Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция с главными частями

$$G(z,\ A_i,\ \lambda'_i)=\sum_{l=1}^{K_i}\frac{A_{il}}{(z-\lambda'_i)^l}. \tag{2.50}$$

Насчет коэффициентов предположим, что первые коэффициенты A_{i1}, соответствующие полюсам $\lambda'_i=\tau'_i$, достаточно большие:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|A_{i1}|}{\ln\dfrac{1}{1-|\lambda'_i|}}=\nu,\qquad \lambda'_i=\tau'_i, \tag{2.51}$$

а все другие числа A_{ij} настолько малы, что существует мероморфная функция $g(z)$ порядка μ с главными частями $\tilde G(z,\ A_i,\ \lambda'_i)$,

$$\tilde G(z,\ A_i,\ \lambda'_i)=\begin{cases}G(z,\ A_i,\ \lambda'_i), & \text{если}\ \ \lambda'_i\neq\tau'_i,\\ G(z,\ A_i,\ \lambda'_i)-\dfrac{A_{i1}}{z-\lambda'_i}, & \text{если}\ \ \lambda'_i=\tau'_i.\end{cases}$$

Мероморфная функция $\big($напомним, что $f(z)$ имеет по предположению главные части $G(z,\ A_i,\ \lambda'_i)\big)$

$$h(z)=f(z)-g(z)$$

имеет только простые полюсы в точках $\lambda'=\tau'_i$ с вычетами A_{i1}. Функция

$$t(z)=b(z)\,h(z),$$

где $b(z)$ — функция Бляшке с нулями в точках $\lambda'_i=\tau'_i$, регулярна в круге $|z|<1$ и

$$t(\lambda'_i)=A_{i1}b'(\lambda'_i), \qquad \lambda'_i=\tau'_i.$$

В работе [2] (стр. 17) показано, что

$$\varliminf_{i\to\infty}(1-|\lambda'_i|)\,|b'(\lambda'_i)|=c>0.$$

В соединении с (2.51) это дает

$$\varlimsup_{i\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|t(\lambda'_i)|}{\ln\dfrac{1}{1-|\lambda'_i|}}=\nu.$$

Из упомянутой уже леммы работы [2] следует, что порядок функции $t(z)$ не меньше η. То же самое можно сказать о порядке функции $f(z)$. Другими словами, мы доказали, что число τ, соответствующее главным частям (2.50), не меньше η. С другой стороны из доказанного утверждения А теоремы легко следует, что для главных частей (2.50) соответствующее число τ удовлетворяет неравенству $\tau\leqslant\eta$. Таким образом $\tau=\eta$.

Следствие. *Пусть α — число, определенное в равенстве* (2.28) *и* $\varkappa=\max[\min(\alpha-1+\delta,\ \alpha),\ \mu]$, *где μ определено в* (2.4) *и δ — показатель сходимости последовательности различных полюсов* $\{\lambda_i\}$.

Существует мероморфная в круге $|z|<1$ функция с главными частями (2.1), *порядок ρ которой удовлетворяет неравенствам $\mu\leqslant\rho\leqslant\varkappa$. Оценка порядка — точная* [1].

§ 3. Интерполирование регулярных функций

1. **Теорема 3.** *Пусть* $\{\lambda_i\}$, $\lim|\lambda_i|=1$, — *последовательность точек единичного круга, имеющая конечный показатель сходимости, и $q\geqslant1$ — наибольшее целое число, для которого расходится ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-|\lambda_i|)^q.$$

Каноническое произведение

$$\Pi(z,\ \lambda)=z^k\prod_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\bar\lambda_i(\lambda_i-z)}{1-\bar\lambda_i z}\exp\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1-|\lambda_i|^2}{1-\bar\lambda_i z}\right)^{\nu}\right] \qquad (3.1)$$

является регулярной в единичном круге функцией с нулями в точках λ_i и ее порядок и тип совпадают с порядком и типом функции $N(r,\ \lambda)$. Если порядок функции $N(r,\ \lambda)$ не целое число, то $\Pi(z,\ \lambda)$ и $N(r,\ \lambda)$ принадлежат одному и тому же классу [1].

Заметим, что утверждение теоремы о порядке канонического произведения доказано в работе [4].

Доказательство. Обозначим i-тый множитель канонического произведения $\Pi(z, \lambda)$ через $E_i(z)$:

$$E_i(z) = \frac{\bar{\lambda}_i(\lambda_i - z)}{1 - \bar{\lambda}_i z} \exp \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right)^{\nu},$$

и оценим $m(r, E_i)$.

Отметим следующие легко проверяемые неравенства:

$$\left| \frac{\bar{\lambda}_i(\lambda_i - z)}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right| < 1, \quad \mathrm{R} \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} > 0, \quad \text{если} \quad |z| < 1,$$

$$\ln^+ (x_1 . x_2 \ldots x_n) \leqslant \ln^+ x_1 + \ln^+ x_2 + \ldots + \ln^+ x_n.$$

Из этих неравенств следует

$$\ln^+ |E_i(z)| \leqslant \mathrm{R} \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} + \sum_{\nu=2}^{q} \frac{1}{\nu} \left| \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right|^{\nu},$$

$$m(r, E_i) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{R} \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} d\varphi + \sum_{\nu=2}^{q} \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right|^{\nu} d\varphi, \qquad z = re^{i\varphi}.$$

Первый интеграл правой части последнего неравенства является средним значением гармонической функции $\mathrm{R} \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z}$ на окружности $|z| = r$, и поэтому он равен $1 - |\lambda_i|^2$. Для интегралов, стоящих под знаком суммы, применяем оценки (1.7) и получаем:

$$m(r, E_i) \leqslant 1 - |\lambda_i|^2 + K_1 \sum_{\nu=2}^{q} \frac{(1 - |\lambda_i|^2)^{\nu}}{(1 - |\lambda_i| r)^{\nu-1}} < K(1 - |\lambda_i|), \tag{3.2}$$

где K_1 и K — некоторые постоянные, независящие от r и i.

Этой оценкой будем пользоваться, если $|\lambda_i| \leqslant \rho$, где

$$1 - r = 4(1 - \rho), \qquad r = |z|. \tag{3.3}$$

Если $\rho < |\lambda_i| < 1$, то

$$\left| \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right| \leqslant \frac{2(1 - \rho)}{1 - r} = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, имеет место очевидное тождество

$$\frac{\bar{\lambda}_i(\lambda_i - z)}{1 - \bar{\lambda}_i z} = 1 - \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z}.$$

Следовательно, при $|z| = r$ и $|\lambda_i| \geqslant \rho$

$$E_i(z) = \exp \left[- \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right)^{\nu} \right],$$

$$\ln |E_i(z)| \leqslant \frac{2}{q+1} \left| \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right|^{q+1}. \tag{3.4}$$

Применяем еще раз неравенства (1.7) и получаем

$$m(r, E_i) \leqslant K_2 \frac{(1 - |\lambda_i|)^{q+1}}{(1 - r)^q}, \tag{3.5}$$

где K_2 — постоянная.

Из условия теоремы: $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|\lambda_i|)^{q+1}<\infty$ и неравенства (3.4) следует, что произведение $\Pi(z, \lambda)$ сходится равномерно внутри единичного круга. Далее, из (3.1), (3.2) и (3.5) имеем

$$T(r, \Pi)=m(r, \Pi)\leqslant K\sum_{i=1}^{n(\rho, \lambda)}(1-|\lambda_i|)+\frac{K_2}{(1-r)^q}\sum_{i=n(\rho, \lambda)}^{\infty}(1-|\lambda_i|)^{q+1}. \quad (3.6)$$

Представим входящие в последнем неравенстве суммы в виде интегралов:

$$\sum_{i=1}^{n(\rho, \lambda)}(1-|\lambda_i|)=\int_0^{\rho}(1-t)\,dn(t, \lambda)=(1-\rho)\,n(\rho, \lambda)+\int_0^{\rho}n(t, \lambda)\,dt,$$

$$\sum_{i=n(\rho, \lambda)}^{\infty}(1-|\lambda_i|)^{q+1}=\int_{\rho}^{1}(1-t)^{q+1}\,dn(t, \lambda)=-(1-\rho)^{q+1}n(\rho, \lambda)+$$

$$+(q+1)\int_{\rho}^{1}(1-t)^q n(t, \lambda)\,dt.$$

Отсюда и из (3.6) следует

$$T(r, \Pi)\leqslant K(1-\rho)\,n(\rho, \lambda)+K\int_0^{\rho}n(t, \lambda)\,dt+K_3\frac{1}{(1-r)^q}\int_{\rho}^{1}(1-t)^q n(t, \lambda)\,dt, \quad (3.7)$$

где $K_3=K_2(1+q)$.

Заметим, что

$$\int_0^{\rho}n(t, \lambda)\,dt\leqslant\int_0^{\rho}\frac{n(t, \lambda)}{t}\,dt=N(\rho, \lambda), \quad (3.8)$$

и оценим рост интеграла

$$\int_{\rho}^{1}(1-t)^q n(t, \lambda)\,dt.$$

Пусть, для определенности, $n(r, \lambda)$ — функция нормального типа порядка μ:

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{\mu}n(r, \lambda)=\tau, \qquad 0<\tau<\infty. \quad (3.9)$$

Число μ совпадает с показателем сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$; следовательно,

$$q\leqslant\mu<q+1 \quad (3.10)$$

($\mu\neq q+1$, в противном случае функция $n(r, \lambda)$ была бы функцией минимального типа). Из (3.9) и (3.10) следует, что для некоторого $K_4>\tau$

$$n(r, \lambda)\leqslant\frac{K_4}{(1-r)^{\mu}},$$

$$\int_{\rho}^{1}(1-t)^q n(t, \lambda)\,dt\leqslant K_4\int_{\rho}^{1}(1-t)^{q-\mu}\,dt\leqslant K_5(1-\rho)^{q+1-\mu}. \quad (3.11)$$

Из (3.7), (3.8) и (3.11) получаем

$$T(r, \Pi) \leqslant K(1-\rho)\, n(\rho, \lambda) + KN(r, \lambda) + \frac{K_6}{(1-\rho)^{\mu-1}}.$$

Так как $N(r, \lambda)$ — функция нормального типа порядка $\mu-1$ $\left(\text{в силу (3.9)}\right)$, то

$$T(r, \Pi) \leqslant \frac{K_7}{(1-r)^{\mu-1}}.$$

Другими словами порядок и тип функции $\Pi(z, \lambda)$ не превосходит порядок и тип функции $N(r, \lambda)$. Следовательно порядок и тип функции $\Pi(z, \lambda)$ равны порядку и типу функции $N(r, \lambda)$.

Осталось доказать утверждение теоремы о классе функции $\Pi(z, \lambda)$. Достаточно доказать, что если функция $N(r, \lambda)$ принадлежит классу сходимости, то и $\Pi(z, \lambda)$ принадлежит классу сходимости.

Пусть функция $N(r, \lambda)$ принадлежит классу сходимости порядка $\mu-1$, $q<\mu<q+1$ (μ — не целое число), т. е. сходятся интегралы

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\mu-2} N(r, \lambda)\, dr < \infty, \qquad \int\limits_0^1 (1-r)^{\mu-1} n(r, \lambda)\, dr < \infty. \tag{3.12}$$

Из (3.3), (3.7) и (3.8) имеем

$$\int\limits_0^\alpha (1-r)^{\mu-2} T(r, \Pi)\, dr \leqslant K_7 \int\limits_0^\alpha (1-\rho)^{\mu-1} n(\rho, \lambda)\, d\rho +$$

$$+ K_8 \int\limits_0^{\alpha_1} (1-\rho)^{\mu-2} N(\rho, \lambda)\, d\rho +$$

$$+ K_9 \int\limits_0^{\alpha_1} \left[(1-\rho)^{\mu-2-q} \int\limits_\rho^1 (1-t)^q n(t, \lambda)\, dt\right] d\rho, \tag{3.13}$$

где $\alpha<1$, $\alpha_1<1$.

Оценим последний интеграл правой части. Интегрированием по частям получаем

$$\int\limits_0^{\alpha_1} \left[(1-\rho)^{\mu-2-q} \int\limits_\rho^1 (1-t)^q n(t, \lambda)\, dt\right] d\rho = -\frac{1}{q+1-\mu} \int\limits_0^1 (1-t)^q n(t, \lambda)\, dt +$$

$$+ \frac{(1-\alpha_1)^{\mu-1-q}}{q+1-\mu} \int\limits_{\alpha_1}^1 (1-t)^q n(t, \lambda)\, dt + \frac{1}{q+1-\mu} \int\limits_0^{\alpha_1} (1-\rho)^{\mu-1} n(\rho, \lambda)\, d\rho. \tag{3.14}$$

Из (3.12), (3.13) и (3.14) следует, что интеграл

$$\int^1 (1-r)^{\mu-2} T(r, \Pi)\, dr$$

сходится, т. е. функция $\Pi(z, \lambda)$ принадлежит классу сходимости порядка $\mu-1$.

Следствие. *Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция с нулями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и полюсами $\beta_1, \beta_2, \ldots$. Функцию $f(z)$ можно представить в виде*

$$f(z)=\frac{\Pi(z, \alpha)}{\Pi(z, \beta)} \exp g(z),$$

где $g(z)$ — регулярная в единичном круге функция. Порядок и тип функции $f(z)$ равны наибольшему из порядков и типов функций $\exp g(z)$, $\Pi(z, \alpha)$ и $\Pi(z, \beta)$.

2. Пользуясь теоремой 3, легко получить результаты по интерполированию регулярных в единичном круге функций, соответствующие результатам из § 2. В качестве примера приведем предложение, соответствующее следствию 2 из теоремы 1.

Пусть $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i|<1$, $\lim|\lambda_i|=1$, — последовательность, имеющая конечный показатель сходимости μ,

$$A_{i0}, A_{i1}, \ldots, A_{i, k_i-1}, \qquad i=1, 2, \ldots,$$

— некоторая таблица чисел,

$$\gamma_{i0}+\gamma_{i1}(z-\lambda_i)+\ldots+\gamma_{i, k_i-1}(z-\lambda_i)^{k_i-1}$$

— совокупность первых k_i членов разложения в степенной ряд функции $\frac{(z-\lambda_i)^{k_i}}{\Pi(z, \lambda)}$, где $\Pi(z, \lambda)$ — каноническое произведение с k_i раз кратными нулями в точках λ_i и

$$\gamma=\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+ L_i}{\ln\frac{1}{1-|\lambda_i|}},$$

где L_i обозначает наибольший модуль чисел

$$L_{ij}=\gamma_{i0}A_{ij}+\gamma_{i1}A_{i, j-1}+\ldots+\gamma_{ij}A_{i0}, \qquad j=1, 2, \ldots, k_i-1.$$

Теорема 4. *Если точки λ_i лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов, то существует регулярная в круге $|z|<1$ функция, разложение которой по степеням $z-\lambda_i$ начинается с многочлена*

$$A_{i0}+A_{i1}(z-\lambda_i)+\ldots+A_{i, k_i-1}(z-\lambda_i)^{k_i-1}, \qquad i=1, 2, 3, \ldots, \tag{3.15}$$

и порядок которой не превосходит наибольшего из чисел μ и $\gamma-1$. Эта оценка порядка — точная.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(z)$ мероморфную в круге $|z|<1$ функцию, имеющую главные части

$$\sum_{j=1}^{k_i} \frac{L_{i, k_i-j}}{(z-\lambda_i)^j}, \qquad i=1, 2, \ldots.$$

Пусть $f(z)=\varphi(z)\pi(z, \lambda)$. Разложение функции $f(z)$ по степеням $z-\lambda_i$ начинается с многочлена (3.15) (см. [2] стр. 26). По следствию 2 из теоремы 1 можно считать, что порядок функции $\varphi(z)$ не больше $\max(\mu, \gamma-1)$. То же самое можно сказать, пользуясь теоремой 3, и о порядке функции $f(z)$.

§ 4. Интерполирование мероморфных функций

В § 2 мы построили мероморфные в единичном круге функции, имеющие главные части (2.1). Притом мы требовали, чтобы искомая мероморфная функция помимо заданных полюсов $\{\lambda_i\}$ других полюсов не имела. Полученные в § 2 результаты показывают, что рост таких функций существенно зависит от плотности последовательности $\{\lambda_i\}$ и также от роста коэффициентов A_{ij} главных частей. Покажем, что если не требовать, чтобы совокупность полюсов исчерпывалась заданными точками $\{\lambda_i\}$, то можно построить мероморфную в единичном круге функцию, рост которой зависит только от плотности последовательности $\{\lambda_i\}$, но не зависит от роста коэффициентов A_{ij}.

Теорема 5. *Для любой данной последовательности комплексных чисел* $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i|<1$, $\lim|\lambda_i|=1$, *и для произвольной конечной по строкам таблицы комплексных чисел*

$$a_n^{(-l_n)},\ a_n^{(-l_n+1)},\ \ldots,\ a_n^{(-1)},\ a_n^{(0)},\ a_n^{(1)},\ \ldots,\ a_n^{(k_n-l_n-1)},$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots,\qquad 0\leqslant l_n\leqslant k_n,$$

можно построить такую мероморфную в единичном круге функцию $f(z)$, *лорановское разложение которой в окрестности каждой из точек* λ_n *начинается с группы членов*

$$\sum_{i=-l_n}^{k_n-l_n-1} a_n^{(i)}(z-\lambda_n)^i,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\tag{4.1}$$

что ее порядок и тип будут, соответственно, не выше чем порядок и тип функции $N(r,\lambda)$ (точка λ_n считается k_n раз кратной точкой).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(1-|\lambda_n|)<\infty$, *то можно построить функцию ограниченного вида, лорановские разложения которой начинаются с групп членов* (4.1) [1].

Доказательство. Можно ограничиться случаем, когда $l_n=0$. В самом деле, пусть $l_n>0$, $f(z)$ — функция, лорановские разложения которой начинаются с членов (4.1), и $\tilde{\Pi}(z,\lambda)$ — каноническое произведение с l_n раз кратными нулями в точках λ_n. По данным (4.1) можно вычислить k_n первых членов тейлоровских разложений в окрестностях точек λ_n функции $\varphi(z)=\tilde{\Pi}(z,\lambda)f(z)$. Задача отыскать функцию $f(z)$ свелась, таким образом, к отысканию функции $\varphi(z)$, регулярной в точках λ_n.

Пусть $\Pi(z,\lambda)$ — каноническое произведение с k_n раз кратными нулями в точках λ_n и

$$S_{nm}(z)=\gamma_{n0}+\gamma_{n1}(z-\lambda_n)+\ldots+\gamma_{n,m-1}(z-\lambda_n)^{m-1}$$

— совокупность первых m членов тейлоровского разложения функции

$$\frac{(z-\lambda_n)^{k_n}}{\Pi(z,\lambda)}.$$

Функция

$$\psi_n(z)=\frac{\Pi(z,\lambda)}{(z-\lambda_n)^{k_n}}\sum_{i=1}^{k_n} a_n^{(k_n-i)}S_{ni}(z)\tag{4.2}$$

имеет в точке λ_m, $m \neq n$, $m=1, 2, \ldots$, нуль, кратность которого не меньше k_m, а в точке λ_n ее тейлоровское разложение начинается с группы членов

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} a_n^{(i)} (z-\lambda_n)^i.$$

В сказанном легко убедиться, заметив, что

$$a_n^{(i)} (z-\lambda_n)^i \frac{\Pi(z, \lambda)}{(z-\lambda_n)^{k_n}} \frac{(z-\lambda_n)^{k_n}}{\Pi(z, \lambda)} = a_n^{(i)} (z-\lambda_n)^i, \tag{4.3}$$

и k_n первых членов разложения в окрестности точки λ_n функции

$$a_n^{(i)} (z-\lambda_n)^i \frac{\Pi(z, \lambda)}{(z-\lambda_n)^{k_n}} S_{n, k_n-i}(z)$$

такие же, как у функции (4.3).

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность настолько малых положительных чисел, что на „окружностях U“ (определение „окружностей U“ см. в § 1) выполнялись неравенства

$$\varepsilon_n |\psi_n(z)| \leqslant \frac{|\Pi(z, \lambda)|}{2^n}, \quad \frac{\varepsilon_n |S_{nk_n}(z)|}{|z-\lambda_n|^{k_n}} < \frac{1}{2^n}. \tag{4.4}$$

Функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(z, \lambda)}{(z-\lambda_n)^{k_n}} \varepsilon_n S_{nk_n}(z)$$

является регулярной в единичном круге, и в окрестности точки λ_n имеет разложение

$$\varphi(z) = \varepsilon_n + c_{nk_n} (z-\lambda_n)^{k_n} + \ldots. \tag{4.5}$$

Кроме того, на „окружностях U“

$$|\varphi(z)| \leqslant |\Pi(z, \lambda)|. \tag{4.6}$$

Функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda_n) \psi_n(z)$$

является в силу (4.4) также регулярной в единичном круге, и на „окружностях U“

$$|F(z)| \leqslant |\Pi(z, \lambda)|. \tag{4.7}$$

Из (4.2) и (4.5) следует, что функция

$$f(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)} \tag{4.8}$$

мероморфна в единичном круге, и ее тейлоровские разложения по степеням $z-\lambda_n$ начинаются с групп членов (4.1) (напомним, что мы положили $l_n = 0$).

Из (4.6), (4.7) и теоремы 3 следует, что порядок и тип функций $F(z)$ и $\varphi(z)$ не выше, соответственно, чем порядок и тип функции $N(r, \lambda)$. То же самое можно сказать и о порядке и типе функции $f(z)$ (см. (4.8)).

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 18. III. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Нафталевич. ДАН СССР 88, № 2, 205-208, (1953).
2. А. Г. Нафталевич. Уч. Записки Вильнюсского ун-та 8, матем. физ., 5, 5-27 (1956).
3. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.-Л., Гостехиздат (1941).
4. Цудзи. РЖМат, 7835 (1957).
5. J. M. Whittaker. Proc. London Math. Soc., 40, 255-272, (1935).

MEROMORFINIŲ VIENETINIAME SKRITULYJE FUNKCIJŲ INTERPOLIAVIMAS

A. NAFTALEVIČIUS

(Reziumė)

Tegu duota vienetinio skritulio taškų seka $\{\lambda_n\}$ ir bet kuri kompleksinių skaičių lentelė $\{a_n^i\}$, $n=1, 2, \ldots, l_n \leqslant i \leqslant k_n - l_n - 1$. Iš gerai žinomos Mitag-Leflerio teoremos seka, kad egzistuoja meromorfinės vienetiniame skritulyje funkcijos, kurių Lorano eilutės taško $z=\lambda_n$ aplinkoje prasideda nariais (4.17).

Darbe nagrinėjamas tokių meromorfinių funkcijų augimas.

ÜBER DIE INTERPOLATION DER IM EINHEITSKREISE MEROMORPHER FUNKTIONEN

A. NAFTALEWITSCH

(Zusammenfassung)

Es sei $\{\lambda_n\}$, $\lim|\lambda_n|=1$, eine im Kreise $|z|<1$ gelegene Punktmenge und $\{a_n^{(i)}\}$, $n=1, 2, 3, \ldots, -l_n \leqslant i \leqslant k_n - l_n - 1$, eine beliebig gegebene Tabelle der komplexen Zahlen.

Aus dem bekannten Mittag-Lefflerschen Satz folgt, dass es meromorphe Funktionen gibt, welche in der Umgebung des Punktes λ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, als die mit den Gliedern (4.1) (S. 32) beginnende Laurentreihen darstellbar sind.

In der Arbeit wird das Wachstum solcher Funktionen untersucht.

Dieselbe Frage wurde im Falle der in der ganzen komplexen Ebene meromorphen Funktionen von J. M. Whittaker [5] u. a. behandelt.

Die meisten im Beitrag angeführten Resultate sind in [1] ohne Beweise formuliert.
