I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1961

О СКОРОСТИ СТРЕМЛЕНИЯ К ПРЕДЕЛУ НУЛЕЙ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДА ТЭЙЛОРА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Э. НЕЧЮШКИТЕ, Ш. СТРЕЛИЦ

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots - \tag{1}$$

целая функция конечного порядка ρ и типа σ (в частности $f(z)$ может быть минимального порядка или конечного порядка минимального или максимального типов). Пусть $a \neq 0$ — m-кратный нуль функции $f(z)$. Рассмотрим последовательнотъ $\{z_n\}$ нулей частичных сумм $S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ряда (1), сходящуюся к a: $S_n(z_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

В настоящей заметке изучаем скорость стремления к нулю выражения $|z_n - a|$. Имеет место следующая

теорема. Для того, чтобы ряд (1) был целой функцией конечного порядка ρ и типа σ, необходимо и достаточно выполнения равенств:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{|z_n - a|}}{n \ln n} = \frac{1}{\rho m} \tag{2}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{\rho}{m}} \sqrt[n]{|z_n - a|} = a^{\frac{1}{m}} (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho m}}. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем очевидное равенство:

$$f(z) = (z-a)^m g(z) = (z-a)^m (\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots) =$$
$$= \left[z^m - a\binom{m}{1} z^{m-1} + \dots + (-1)^m a^m\right](\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots). \tag{4}$$

Сравнение выражений (1) и (4) приводит к равенству

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = (z-a)^m \sum_{\nu=0}^{n-m} \alpha_\nu z^\nu - R_n(z),$$

где

$$R_n(z) = \left[\binom{m}{1}\alpha_{n-m+1} a - \binom{m}{2}\alpha_{n-m+2} a^2 + \dots + (-1)^{m-1}\alpha_n a^m\right] z^n +$$
$$+ \left[-\binom{m}{2}\alpha_{n-m+1} a^2 + \binom{m}{3}\alpha_{n-m+2} a^3 + \dots + (-1)^{m-1}\alpha_{n-1} a^m\right] z^{n-1} +$$
$$+ \left[\binom{m}{3}\alpha_{n-m+1} a^3 + \binom{m}{4}\alpha_{n-m+2} a^4 + \dots + (-1)^{m-1}\alpha_{n-2} a^m\right] z^{n-2} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ (-1)^{m-1} a^m \alpha_{n-m+1} z^{n-m+1} = z^{n-m+1} P_n(z). \tag{5}$$

Полагая $z=z_n$, найдем:

$$(z_n-a)^m\sum_{\nu=0}^{n-m}\alpha_\nu z_n^\nu+z_n^{n-m+1}\Big(A_0^n(z_n-a)^{m-1}+$$
$$+A_1^n(z_n-a)^{m-2}+\ldots+A_{m-1}^n\Big)=0, \qquad (6)$$

где

$$A_j^n=\frac{1}{(m-j-1)!}P_n^{(m-j-1)}(a); \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$$

— коэффициенты Тэйлора в разложении полинома $P_n(z)$ по степеням $z-a$. Числа A_j^n, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ зависят от $\alpha_{n-m+1},\ \alpha_{n-m+2},\ \ldots,\ \alpha_n$ и являются линейными суммами последних с независимыми от n постоянными коэффициентами. Поэтому, ввиду того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}A_j^n=0$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$. Полагая

$$\sum_{\nu=0}^{n-m}\alpha_\nu z_n^\nu=B_0^n; \quad A_j^n z_n^{n-m+1}=B_{j+1}^n; \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

перепишем уравнение (6) в следующем виде:

$$B_0^n(z-a)^m+B_1^n(z-a)^{m-1}+\ldots+B_m^n=0. \qquad (7)$$

Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ является последовательностью коэффициентов ряда Тэйлора целой функции, то

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n-m+j}z_n^{n-m+1}=0; \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Принимая во внимание сказанное выше о коэффициентах A_j^n, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}B_{j+1}^n=\lim_{n\to\infty}A_j^n z_n^{n-m+1}=0; \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1.$$

При n достаточно большом $\left|\sum\limits_{j=0}^{n-1}\alpha_j z_n^j\right|$ близко к $g(a)\neq 0$, т. е.

$$\left||g(a)|-\left|\sum_{j=0}^{n-m}\alpha_j z^j\right|\right|<\frac{|g(a)|}{2}, \qquad n>N$$

и

$$0<\frac{|g(a)|}{2}<\left|\sum_{j=0}^{n-m}\alpha_j z^j\right|<\frac{3|g(a)|}{2}. \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что все корни $\eta_{1n},\ \eta_{2n},\ \ldots,\ \eta_{mn}$ уравнения

$$B_0^n\eta^m+B_1^n\eta^{m-1}+\ldots+B_m^n=0 \qquad (9)$$

стремятся к нулю при возрастании n в бесконечность:

$$\lim_{n\to\infty}\max_j|\eta_{jn}|=0.$$

В самом деле, при любом j

$$|B_0^n\eta_{jn}^m|=|B_1^n\eta_{jn}^{m-1}+\ldots+B_m^n|\leqslant m\max_{j=1,\,2,\,\ldots,\,m}|B_j^n|\max(1,\ |\eta_{jn}|^{m-1}). \qquad (10)$$

Предположение, что $|\eta_{jn}|>1$, $n>N$ приводит к противоречию, т. к. тогда

$$|B_0^n||\eta_{jn}|^m \leqslant m \cdot \max_{j=1,2,\ldots,m} |B_j^n||\eta_{jn}|^{m-1}$$

и

$$|B_0^n||\eta_{jn}| \leqslant m \cdot \max_{j=1,2,\ldots,m} |B_j^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поэтому любой корень уравнения (9) при $n>N$ удовлетворяет неравенству $|\eta_{jn}|<1$, а тогда из неравенства (10) при любом $j=1, 2, \ldots, m$

$$|B_0^n||\eta_{jn}|^m \leqslant m \cdot \max_{j=1,2,\ldots,m} |B_j^n| \to 0, \quad n\to\infty,$$

что мы и утверждали $\left(B_0^n \neq 0 \text{ в силу } (8)\right)$.

Легко подсчитать, что имеют место соотношения

$$A_j^n = D_1^j \alpha_{n-m+1} + D_2^j \alpha_{n-m+2} + \ldots + D_m^j \alpha_n; \qquad j=0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

где D_ν^j зависят только от j но не зависят от n. Образуем степенные ряды с коэффициентами A_j^n. Имеем:

$$h_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_j^\nu z^\nu = \tilde{H}_0^j + \tilde{H}_1^j z + \ldots + \tilde{H}_m^j z^m +$$

$$+ D_1^j \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_{n-m+1} z^n + D_2^j \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_{n-m+2} z^n + \ldots + D_n^j \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_n z^n =$$

$$= H_0^j + H_1^j z + \ldots + H_m^j z + (D_1^j z^{m-1} + D_2^j z^{m-2} + \ldots + D_m^j) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n =$$

$$= \tilde{P}_j(z) + Q_j(z) g(z); \qquad j=0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

где $\tilde{P}_j(z)$ и $Q_j(z)$ — полиномы порядка не выше m с коэффициентами, которые от n не зависят. Это соображение показывает, что ряды $h_j(z)$, $j=0, 1, 2, \ldots, m-1$, являются целыми функциями такого же порядка и типа, как и функции $g(z)$, следовательно и $f(z)$. Таким образом, зная порядок роста последовательности A_j^n, мы тем самим определим рост функции $f(z)$ и наоборот.

Для каждого фиксированного n упорядочим каким либо образом корни η_{jn}; $j=1, 2, \ldots, m$ уравнения (9) (в каждом уравнении независимым от других способом; например, для данного n упорядочение проводится по величине модулей, для $n+1$ по величине аргументов). Пусть индекс j и является номером места, занимаемого корнем η_{jn} во множестве корней данного уравнения. Составим m последовательностей $\{\eta_{jn}\}$, $j=1, 2, \ldots, m$. Из (9) заключаем, что

$$\ln\frac{1}{|\eta_{1n}|} + \ln\frac{1}{|\eta_{2n}|} + \ldots + \ln\frac{1}{|\eta_{mn}|} = \ln\frac{1}{|B_m^n|} = \ln\frac{1}{|A_m^n|} + (n-m+1)\ln|z_n|.$$

При n достаточно большом $\frac{1}{|\eta_{jn}|}>1$, $j=1, 2, 3, \ldots, m$, и из последнего равенства следует

$$\sum_{j=m}^{m} \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|\eta_{jn}|}}{n\ln n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|A_j^n|}}{n\ln n} = \frac{1}{\rho}; \tag{11}$$

С другой стороны из (9) получим

$$|B_0^n||\eta_{jn}|^m \leqslant |B_1^n|+|B_2^n|+\ldots+|B_m^n| =$$

$$= |z_n^{n-m+1}|\Big(|A_0^n|+|A_1^n|+\ldots+|A_{m-1}^n|\Big) \tag{12}$$

и

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|\eta_{jn}|}}{n\ln n} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|A_0^n|+|A_1^n|+\ldots+|A_{m-1}^n|}}{n\ln n} = \frac{1}{m\rho} \tag{13}$$

$\Big($по предыдущему $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_j^n|z^n$ — целая функция одинакового порядка и типа как и $f(z)\Big)$. Неравенства (11) и (13) показывают, что при любом j

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|\eta_{jn}|}}{n\ln n} = \frac{1}{m\rho}.$$

В качестве η_{1n} можем взять корень уравнения z_n-a, а поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|z_n-a|}}{n\ln n} = \frac{1}{m\rho}. \tag{13}$$

Так как наши рассуждения обратимы, то отсюда следует, что равенство (14) также достаточно для того, чтобы функция $f(z)$ была целой порядка ρ.

Пусть теперь $0<\rho<\infty$. Из (12) найдем, что

$$n^\rho \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{m}|\eta_{jn}|} = n^\rho\sqrt[n]{|B_m^n|} = n^\rho\sqrt[n]{A_m^n}\,|z_n|^{\frac{n-m+1}{n}}$$

и

$$\prod_{j=1}^{m} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{\rho}{m}} \sqrt[n]{|\eta_{jn}|} \geqslant a \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^\rho \sqrt[n]{A_m^n} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{15}$$

Из неравенства (12) получаем:

$$n^\rho\sqrt[n]{|\eta_{jn}|^m}\sqrt[n]{|B_0^n|} \leqslant n^\rho \sqrt[n]{\sum_{j=0}^{m-1}|A_j^n|}\;|z_n|^{\frac{n-m+1}{n}}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{\rho}{m}}\sqrt[n]{|\eta_{jn}|} \leqslant a^{\frac{1}{m}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^\rho \sqrt[n]{\sum_{j=0}^{m-1}|A_j^n|}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}(\rho e\sigma)^{\frac{1}{\rho m}}.$$

Следовательно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{\rho}{m}} \sqrt[n]{|\eta_{jn}|} = (\rho e \sigma)^{\frac{1}{m\rho}} a^{\frac{1}{m}}.$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (15) и возможностью замены $|\eta_{jn}|$ на $|z_n - a|$ дает

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{\rho}{m}} \sqrt[n]{|z_n - a|} = a^{\frac{1}{m}} (\rho e \sigma)^{\frac{1}{m\rho}}.$$

Нетрудно видеть, что и на этот раз наши рассуждения обратимы.

Теорема доказана

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 19. III. 1961

SVEIKOSIOS FUNKCIJOS TEILORO IŠDĖSTYMO DALINIŲ SUMŲ NULINIŲ TAŠKŲ KONVERGAVIMO GREIČIO KLAUSIMU

E. NEČIUŠKYTĖ ir Š. STRELICAS

(R e z i u m ė)

Įrodoma

teorema. Tegu $z = z_s$ yra Teiloro eilutės

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (z-a)^m g(z), \qquad g(0) \neq 0,\ z_s \to a,\ s \to \infty$$

dalinės sumos $S_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nulinė vieta. Funkcija $f(z)$ yra baigtinės eilės ρ ir tipo σ tada ir tik tada, kai

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \frac{1}{|z_n - a|}}{n \ln n} = \frac{1}{m\rho}$$

ir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{\rho}{m}} \sqrt[n]{|z_n - a|} = a^{\frac{1}{m}} (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho m}}.$$

ZUR KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT VON NULLSTELLEN TEILWEISER SUMMEN DER TAYLORSCHEN REIHE EINER GANZEN FUNKTION

E. NETSCHUSCHKITE und S. STRELIZ

(Z u s a m m e n f a s s u n g)

Wir beweisen den

Satz. Es sei z_n eine Nullstelle der teilweisen Summe $S_n(z)$ der taylorschen Reihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Die Funktion $f(z)$ ist eine ganze von endlicher Ordnung ρ und Typus σ dann und nur dann, wenn

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{|z_n - a|}}{n \ln n} = \frac{1}{m\rho}$$

und

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{\frac{\rho}{m}} \sqrt[n]{|z_n - a|} = a^{\frac{1}{m}} (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho m}}.$$