I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

К ВОПРОСУ О РОСТЕ НЕОДНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. СТРЕЛИЦ

В работе [1] рассматривались решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, принадлежащих классу A_0 и растущих быстрее любой степенной функции. Для связности изложения приведем некоторые определения и результаты, имеющиеся в упомянутой статье.

Определение 1 (функций класса A_0). Пусть ω — связная риманова поверхность над областью $g: R_0 \leqslant |z| < \infty$, обладающая следующими свойствами.

1. *Все точки ветвления поверхности ω конечного порядка.*

2. *Над каждой конечной областью $D \subset g$ поверхность ω распадается на счетное (или конечное) множество конечнолистных связных поверхностей $\left\{ \omega_\nu \right\}$ без общих точек, причем число точек ветвления на каждой из них конечно.*

Однозначные аналитические функции $f(P)$ на поверхности ω, $P \in \omega$ принадлежат классу A_0, если

в каждой конечной области $D \subset g$ множество ветвей функции $f(P)$, определенных на соответствующих поверхностях ω_ν, равномерно ограничено, т. е. *существует постоянная $M(D)$ такая, что $\left|f(P)\right| \leqslant M(D)$, $P \in \omega_\nu$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots$*

Нетрудно видеть, что ветвь $w_\nu = f_\nu(P)$ функции $f(P)$, определенная на поверхности ω_ν, удовлетворяет неприводимому алгебраическому уравнению с аналитическими относительно z коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{n_\nu} g_{j\nu}(z)\, w^{n_\nu - j} = 0,$$

причем $g_{0\nu} \neq 0$ при $z \in D$, так что можно полагать $g_{0\nu}(z) \equiv 1$.

Определение 2. $S(z) = \operatorname*{Sup}_n \left| f(P_z^n) \right|$,

где $\left\{ P_z^n \right\}$ — множество всех точек поверхности ω, лежащих над точкой z.

Определение 3. $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} S(z)$.

Пусть ω_ν — связная часть поверхности ω, лежащая над кольцом $R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2$.

Определение 2'. $S_\nu(z) = \sup \left| f(P_z^n) \right|$,

где $\left\{ P_z^n \right\}$ — *множество всех точек поверхности* ω_ν, *лежащих над точкой* z.

Определение 3'. $M_\nu(r) = \sup\limits_{|z|=r} S_\nu(z)$.

Через $K(r)$ и $K_\nu(r)$ обозначаем соответственно выражения $\dfrac{rM'(r)}{M(r)}$ и $\dfrac{rM'_\nu(r)}{M_\nu(r)}$.

Определение 4. *Действительная кривая* $g = g(x)$; $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ *называется алгеброидной дугой, если функция* $g(x)$ *аналитична внутри отрезка* $[x_1, x_2]$, *а на концах может иметь лишь алгебраические особенности,* т. е. *в концевых точках* $x = x_j$, $j = 1, 2$ *имеют место разложения*

$$g(x) = g(x_j) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^j (x - x_j)^{\frac{n}{p_j}}, \quad j = 1, 2,$$

где $p_j \geqslant 1$ — *целые числа.*

Определение 5. *Число* $\rho = \overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{\ln M(r)}{\ln r}$ *называется показателем роста функции* $f(z)$.

Определение 6. *Точка* $\zeta = r_0 e^{i\varphi_0}$ *называется стационарной точкой функции* $f(z)$, *если координаты* (r_0, φ_0) *являются решением уравнения*

$$\frac{\partial |\tilde{f}(z)|}{\partial \varphi} = 0, \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\tilde{f}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - \zeta)^{\frac{n}{p}}$, $p \geqslant 1$ — *соответствующий элемент функции* $f(z)$.

Основные результаты, относящиеся к функции $M(r)$, которыми пользуемся ниже, собраны в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $f(z) \in A_0$ *и* $M(r) \not\equiv \mathrm{const}$. *Существует монотонно неубывающая последовательность монотонных, непрерывных и логарифмически выпуклых от* $\ln r$, *состоящих из конечного числа алгеброидных дуг, функций* $M_\nu(r)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *равномерно сходящаяся к функции* $M(r)$ *на каждом конечном отрезке* $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. *При этом для каждой функции* $M_\nu(r)$ *существует кривая* $\varphi_\nu(r)$, *состоящая из конечного числа алгеброидных дуг, такая, что* $\left| f_\nu(re^{i\varphi_\nu(r)}) \right| = M_\nu(r)$, *где* $f_\nu(P)$ — *соответствующим образом выбранная конечнолистная ветвь функции* $f(z)$.

Последовательность $M'_\nu(r)$ *сходится почти всюду к* $M'(r)$ *и почти всюду* $\lim\limits_{\nu \to \infty} K_\nu(r) = K(r)$, *причем функции* $K(r)$ *и* $K_\nu(r)$ *можно считать монотонно возрастающими всюду на каждом отрезке, где они естественно определены.*

В [1] расматривались функции $f(z)$ класса A_0, для которых $M(r)$ росли быстрее любой степенной функции от r, т. е. для которых $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = \infty$.

В предлагаемой вниманию заметке исследуем решения класса A_0 дифференциальных уравнений первого и второго порядков, у которых $\lim\limits_{r\to\infty} K(r)=\rho<\infty$.

§ 1. О степенном росте решений класса A_0 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

1. Пусть $w=w(z)$ — решение класса A_0 дифференциального уравнения

$$F(z, w, w')=F^*\left(z, \frac{zw'}{w}, w\right)=\sum_{j=0}^{n} A_j\left(z, \frac{zw'}{w}\right) w^{n-j}=0, \tag{1}$$

где $A_j(z, \eta)$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$ — полиномы от z и η. Пусть далее функция $K(r)$, соответствующая рассматриваемому решению $w(z)$, удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to\infty} K(r)=\rho>0$, $\rho<\infty$. Нашей целью является определение возможных значений числа ρ. Заметим, что при выполнении выдвинутого условия $M(r)\sim r^{\rho}$.

Возьмем ветвь $w_\nu(P)$, $P\in\omega_\nu$ функции $w(z)\in A_0$ со свойствами, описанными выше в теореме, и рассмотрим ее значения в стационарных точках максимума, т. е. в точках $\zeta_\nu=re^{i\varphi_\nu(r)}$, в которых $\max\limits_{|z|=r}\left| w_\nu(P_z)\right|=M_\nu(r)=$ $=\left| w_\nu(re^{i\varphi_\nu(r)})\right|$. В [1] доказано, что

$$\frac{\zeta_\nu w_\nu'(\zeta_\nu)}{w_\nu(\zeta_\nu)}=K_\nu(r) \tag{2}$$

и что

$$\zeta_\nu\left(\frac{\zeta_\nu w_\nu'(\zeta_\nu)}{w_\nu(\zeta_\nu)}\right)'=\frac{rK_\nu'(r)}{1+ir\varphi_\nu'(r)}. \tag{3}$$

В указанных точках ζ_ν уравнение (1) дает

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(\zeta_\nu, K_\nu) w_\nu^{n-j}=0. \tag{4}$$

Так как $\lim\limits_{\nu\to\infty} K_\nu(r)=K(r)$ (см. теорему) и так как функции $K_\nu(r)$ и $K(r)$ возрастают, причем $\lim\limits_{r\to\infty} K(r)=\rho<\infty$, то последовательность $\left\{ K_\nu(r)\right\}$ ограничена в совокупности. Решим алгебраическое уравнение

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(z, a)\eta^{n-j}=0, \tag{5}$$

где $a>0$ — фиксированное число, в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$. Положим

$$A_j(z, a)=b_{0j}(a) z^{n_j}+b_{1j}(a) z^{n_j-1}+\cdots, \quad j=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, все функции $b_{ij}(a)$, $i=0, 1, 2, \ldots, n_j$; $j=0, 1, 2, \ldots, n$ — полиномы от a. Пусть a — значение, отличное от корней уравнения $b_{0j}(a)=0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$. В этих условиях старшие члены степенных разложений корней уравнения (5) в окрестности $z=\infty$ имеют вид

$$\eta_m=c_m(a) z^{\gamma_m}+\cdots, \tag{6}$$

причем степени ν_m от значений a, имея ввиду принятые выше предосторожности, не зависят. Таким образом, при $b_{0j}(a) \neq 0$ уравнение (5) можем переписать в следующем виде:

$$\left|A_0(z, a)\right| \prod_{m=0}^{n} \left|\eta - c_m(a)\, z^{\nu_m}\left(1 + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right| = 0. \tag{7}$$

Уравнение (4) можем переписать в виде (7), если там положить $a = K_\nu$, $z = \zeta_\nu$ и $\eta = w_\nu(\zeta_\nu)$. Имеем

$$0 = \prod_{m=0}^{n} \left| w_\nu - c_m(K_\nu)\, \zeta_\nu^{\nu_m}\left(1 + 0\left(\frac{1}{\zeta_\nu}\right)\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{m=0}^{n} \left| M_\nu - \left|c_m(K_\nu)\right| r^{\nu_m}\left(1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right|,$$

где $\left|\zeta_\nu\right| = r$.

В полученном неравенстве перейдем к пределу при $\nu \to \infty$, заметив, что $c_m(a)$ — непрерывная функция от a:

$$\prod_{m=0}^{n} \left| M - \left|c_m(K)\right| r^{\nu_m}\left(1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right| = 0.$$

Так как $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = \rho$, то последнее равенство может быть сведено к виду

$$\prod_{m=0}^{n} \left| M - \left|c_m\left(\rho + o(1)\right)\right| r^{\nu_m}\left(1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right| = 0. \tag{8}$$

Отсюда немедленно приходим к выводу, что $M(r)$ равно одному из значений

$$\left|c_m(\rho)\right|\left(1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right) r^{\nu_m}.$$

Поэтому, если устремить r в бесконечность, то $M(r)$ при $r \to \infty$ может иметь своими предельными значениями только числа ν_m, $m = 1, 2, \ldots, n$. Но для определенного решения $w = w(z)$ всегда существует предел $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \rho$, что вытекает из равенства

$$\lim_{r \to \infty} K(r) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \lim_{r \to \infty} \frac{r M'(r)}{M(r)} = \rho.$$

Таким образом, мы пришли к выводу: если $b_{0j}(\rho) \neq 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, то ρ может быть равен только одному из значений ν_m, $m = 1, 2, \ldots, n$, причем всегда $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \rho$.

Заметим, что если все корни уравнений $b_{0j}(\rho) = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ комплексные, то только эти значения ν_m могут служить показателями роста изучаемого класса решений $w(z)$. Из наших рассуждений также следует, что когда $b_{0j}(\nu_m) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$ всегда $\lim\limits_{\to \infty} \frac{M(r)}{r^{\nu_m}} = \left|c(\nu_m)\right|$.

В случае $b_{0j_k}(\nu)_m = 0$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, то возможно как $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{M(r)}{r^{\nu_m}} = 0$, так и $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \frac{M(r)}{r^{\nu_m}} = \infty$, хотя $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \nu_m$. Это положение ниже проиллюстрируем примерами.

2. Пусть теперь λ — действительный корень уравнений $b_{0j_k}(\lambda) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, $\lambda \neq \nu_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Может ли такое число λ служить показателем роста для решений уравнения (1)? Ниже укажем на необходимые условия возникновения такой возможности и проиллюстрируем примером.

Допустим, что $w(z) \in A_0$ — решение уравнения (1) с показателем роста λ. Это означает, что $M(r) = r^{\lambda + \varepsilon(r)}$ с $\varepsilon(r) \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Так как последовательность $\left\{ M_\nu(r) \right\}$ сходится к $M(r)$ равномерно, то и $M_\nu(r) = r^{\lambda + \varepsilon(r)}$. В силу этого $\left| w_\nu^{n-j} z^{n_j} \right| = r^{n_j + \lambda(n-j) + \varepsilon_j(r)}$, $\varepsilon_j(r) \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Определив $\mu = \max\limits_j \left(n_j + \lambda(n-j)\right)$, разделим уравнение (7) на r^μ. Пусть $b_{0j_q}(K_\nu)$, $q = 1, 2, \ldots, p$ — коэффициенты у степеней $z^{n_{j_q}} w^{n-j_q}$, для которых $n_{j_q} + \lambda(n - j_q) = \mu$. Покажем, что $p = 1$. В самом деле, допустим, что $p > 1$. Тогда λ необходимо равна одному из чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ (выражение az^λ будет тогда и только тогда старшим членом разложения корня уравнения (5) в окрестности бесконечно удаленной точки, когда существует несколько равных значений $l = n_i + \lambda(n-i)$, причем это значение $l = \max\left(n_j + \lambda(n-j)\right)$.

Так как по нашему предположению $\lambda \neq \nu_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, то $p = 1$. Поэтому, разделив уравнение (7) на $r^{\mu + \varepsilon(r)}$, получим

$$b_{0j_1}\left(\lambda + o(1)\right) = o(1); \quad K = \lambda + o(1). \tag{9}$$

Следовательно, число $\lambda \neq \nu_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$ только тогда может быть показателем роста решения $w = w(z)$, если существует только одно число n_l среди чисел $n_1, n_2, \ldots, n_n$ такое, что $n_l + \lambda(n-l) > n_j + \lambda(n-j)$, $l \neq j$ и $b_{0l}(\lambda) = 0$.

3. Нетрудно привести примеры, которые растут как r^λ, где λ — иррациональное число. Достаточно взять, например, возрастающую последовательность рациональных чисел $\left\{ \lambda_n \right\}$, $\lambda_n \to \lambda$, $n \to \infty$ и образовать функцию $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}(z+n)^{\lambda_n}$. Нетрудно видеть, что соответствующая функция $M(r) \sim r^\lambda$. Вопросом о том, существуют ли такие решения уравнения класса A_0, здесь не займемся. Но можно построить уравнения исследуемого класса, обладающие решениями в некотором смысле близкими к функциям класса A_0. Если проследим за рассуждениями, проведенными в [1] и в настоящей заметке, то увидим, что полученные оценки применимы и для решений, являющихся функциями класса A_0 в некоторой бесконечной облас-

ти g, если только максимумы соответствующих функций $S(z)$ на дугах окружностей $|z|=r$, принадлежащих g, достигаются внутри области (в стационарных точках), или если исследовать рост функций вдоль кривой стационарных точек, принадлежащей области g и уходящей в бесконечность. Покажем точность наших оценок, именно на примерах такого рода.

а) Функция $w=\sqrt{z}\ln z$ является решением уравнения

$$\left(\frac{zw'}{w}-\frac{1}{2}\right)^2 w^2 - z = \left(\frac{zw'}{w}-\frac{1}{2}\right)^2\left[w-\left(\frac{zw'}{w}-1\right)^{-1}\sqrt{z}\right]\times$$
$$\times\left[w+\left(\frac{zw'}{w}-1\right)^{-1}\sqrt{z}\right]=0.$$

Функция $\sqrt{z}\ln z$ в области g, полученной из плоскости z разрезом вдоль отрицательной полуоси, однозначна. Выберем ветвь функции из условий $\sqrt{1}=1$, $\ln 1=0$. Очевидно,

$$\frac{\ln\max\limits_{|z|=r}|\sqrt{z}\ln z|}{\ln r}=\frac{\frac{1}{2}\ln r+\ln\max\limits_{|z|=r}|\ln z|}{\ln r},\quad z\in g$$

и так как $\max\limits_{|z|=r}|\ln z|<\sqrt{\ln^2 r+4\pi^2}$, то $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\ln\max\limits_{|z|=r}|\sqrt{z}\ln z|}{\ln r}=\dfrac{1}{2}$. Но такой же рост получаем вдоль действительной полуоси, являющейся кривой стационарных точек. Для этих значений наши раннее проведенные выкладки остаются в силе. Из данного уравнения следует:

$$M-\frac{1}{K-\frac{1}{2}}\sqrt{r}=0,\ \lim_{r\to\infty}K(r)=\frac{1}{2},\ \nu_1=\nu_2=\frac{1}{2},\ b_{00}\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

при этом $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sqrt{r}\ln r}{\sqrt{r}}=\infty$.

б) Функция $w=\dfrac{\sqrt{z}}{\ln z}$ является решением уравнения

$$w^2-z\left(\frac{zw'}{w}-\frac{1}{2}\right)^2=\left[w-\sqrt{z}\left(\frac{zw'}{w}-\frac{1}{2}\right)\right]\left[w+\sqrt{z}\left(\frac{zw'}{w}-\frac{1}{2}\right)\right]=0.$$

Как и выше, и в этом случае применимы наши правила. Из уравнения следует $\nu_1=\nu_2=\frac{1}{2}$, $b_{02}\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Так как рост исследуемого решения равен $\frac{1}{2}$, то $K(r)\to\frac{1}{2}$; при этом $\lim\limits_{r\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{r}}{\ln r}:\sqrt{r}\right)=0$.

в) Функция $w=z^\alpha+z$, $\alpha>1$ является решением уравнения

$$z^4w'^4-2\alpha^2z^2w^2w'^2-4(\alpha-1)^2z^4w'^2-4\alpha(\alpha-1)^3z^3w+\alpha^4w^4=0.$$

Очевидно, $\max\limits_{|z|=r}|z^\alpha+z|=r^\alpha+r$ достигается в стационарных точках $z=r$. Поэтому применима вся наша теория. Обозначая $\dfrac{zw'}{w}=K_0$, найдем из рассматриваемого уравнения

$$(K_0^4-2\alpha^2K_0^2+\alpha^4)w^4-4(\alpha-1)^2K_0^2w^2-4\alpha(\alpha-1)^3z^3w=0,$$
$$b_{00}(\lambda)=\lambda^4-2\alpha^2\lambda^2+\lambda^4\quad\text{и}\quad b_{00}(\lambda)=0\quad\text{при}\quad\lambda=\alpha\quad\text{и}\quad\lambda=-\alpha.$$

При этом $4\alpha > 2\alpha + 2$ и $4\alpha > 3\alpha + 1$, т. к. $\alpha > 1$. Согласно доказанному, только в этом случае возможно решение с показателем роста α, что в данном случае и имеет место. При $\alpha < 1$, α не может являться показателем роста, т. к. тогда $4\alpha < 2\alpha + 2$, $4\alpha < 3\alpha + 1$. При $\alpha = 1$ дифференциальное уравнение вырождается в $z^2 w'^2 - w^2 = 0$ и $K^2 \equiv 1$.

Остальные возможные степени роста получаем, решая уравнение $\eta^3 + + z^2\eta + z^3 = 0$. В окрестности $z = \infty$ имеем три ветви $\eta_j = A_j z + \cdots$, $j = 1, 2, 3$. Отсюда $\rho = 1$.

4. Рассмотрим наконец случай $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) \leqslant 0$. Теперь $M(r)$ растет медленнее любой положительной (сколь угодно малой) степени от r. Разложим уравнение (1) относительно степеней z:

$$\sum_{j=0}^{p} B_j\left(\frac{zw'}{w},\ w\right) z^{m-j} = 0.$$

Так как $\left|\frac{w}{z^\beta}\right| \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$ при $\beta > 0$, то

$$B_0\left(\frac{zw'}{w},\ w\right) = 0\left(\frac{1}{r^\gamma}\right),\ \gamma > 0. \tag{10}$$

Если $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = -a^2 < 0$, то из $\frac{rM'}{M} < -a^2$ следует $M < \frac{c}{r^{a^2}}$ и $M(r) \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Решим алгебраическое уравнение $B_0(\lambda,\ 0) = 0$. Если существует отрицательные корни этого уравнения, то они и являются возможными значениями $-a^2$, в противном случае решения исследуемого типа отсутствуют.

Допустим, что $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = 0$. Как и раньше, $K(r) < 0$ при $r < \infty$ и поэтому $M(r)$ убывает. Следовательно, $M(r)$ функция ограниченная. Верхняя грань функции $M(r)$ может равнятся только одному чз модулей корней уравнения $B_0(0,\ \lambda) = 0$. Иными словами, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ корни уравнения $B_0(0,\ \lambda) = 0$, то $\lim\limits_{r \to \infty} M(r)$ может равняться (в предположении существования ограниченных решений уравнения (1) лишь одному из чисел $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_p|$.

§ 2. О степенном росте решений класса A_0 обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

5. Будем искать рост решений класса A_0 (в предположении их существования), растущих как степенные функции, уравнения

$$F(z,\ w,\ w',\ w'') = F^*\left(z,\ w,\ \frac{zw'}{w},\ z\left(\frac{zw'}{w}\right)'\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} A_j\left(z,\ w,\ \frac{zw'}{w}\right) z^{n-j}\left(\frac{zw'}{w}\right)'^{\,n-j} = 0, \tag{11}$$

где $A_j(z,\ w,\ \eta)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ — алгебраические полиномы по совокупности переменных z, w и η.

Рассмотрим сначала случай $\lim\limits_{r\to\infty} K(r)=\rho>0$, $\rho<\infty$. Используя формулы (2) и (3) в стационарных точках $\zeta_\nu = re^{i\varphi_\nu(r)}$ для ветви $w_\nu(z)$ решения, найдем

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} A_j(\zeta_\nu, w_\nu, K_\nu)\, r^{n-j} \frac{K_\nu'^{\,n-j}}{(1+ir\varphi_\nu')^{n-j}}\right| = \left|A_n(\zeta_\nu, w_\nu, K_\nu)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{m} B_j(\zeta_\nu, K_\nu)\, w_\nu^{m-j}\right|. \tag{12}$$

Положим $B_j(\zeta_\nu, K_\nu) = b_{0j}(K_\nu)\,\zeta_\nu^{n_j} + \cdots$. Пусть полином слева в равенстве (12) является степени λ по совокупности переменных w_ν, K_ν и K_ν' и степени μ по ζ_ν. Из (12) очевидным образом следует неравенсто

$$r^{\mu}(M_\nu + K_\nu + rK_\nu')^{\lambda} \geqslant \left|\sum_{j=0}^{m} B_j(\zeta_\nu, K_\nu)\, w_\nu^{m-j}\right|.$$

Допустим, что ρ не является корнем ни одного из уравнений $b_{0j}(x)=0$, $j=0, 1, 2, \ldots, m$. Тогда (см. § 1) разложим полином $\sum\limits_{j=0}^{m} B_j(\zeta_\nu, K_\nu)\, w_\nu^{n-j}$ на множители в окрестности бесконечно удаленной точки, считая K_ν параметром. Имеем

$$(M_\nu + K_\nu + rK_\nu')^{\lambda} \geqslant \frac{|B_0(\zeta_\nu, K_\nu)|}{r^{\mu}} \prod_{j=1}^{m} \left| w_\nu - \sigma_j(K_\nu)\, \zeta_\nu^{\lambda_j}\left(1+O\left(\frac{1}{\zeta_\nu}\right)\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant C(K_\nu)\, r^{n_0-\mu} \prod_{j=1}^{m} \left| M_\nu - \left|\sigma_j(K_\nu)\right| r^{\lambda_j}\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right|.$$

Извлечем из обоих частей последнего неравенства корень степени λ и проинтегрируем:

$$\int_{r_0}^{r} (M_\nu + K_\nu + rK_\nu')\, dr \geqslant \int_{r_0}^{r} C^{\frac{1}{\lambda}}(K_\nu)\, r^{\frac{n_0-\mu}{\lambda}} \times$$

$$\times \left[\prod_{j=2}^{m} \left| M_\nu - \left|\sigma_j(K_\nu)\right| r^{\lambda_j}\left(1+0\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right|\right]^{\frac{1}{\lambda}} dr.$$

Перейдем в найденном неравенстве к пределу при $\nu\to\infty$, помятуя, что $\sigma_j(x)$ — непрерывная функция от x, и получим:

$$r\left[M(r)+2K(r)\right] \geqslant \int_{r_0}^{r} C^{\frac{1}{\lambda}}(K)\, r^{\frac{n_0-\mu}{\lambda}} \left[\prod_{j=1}^{m} \left| M - \left|b_j(K)\right| r^{\lambda_j}\left(1+0\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right|\right]^{\frac{1}{\lambda}} dr,$$

при этом воспользовались тем, что ввиду возрастания $M(r)$ и $K(r) \int\limits_{r_0}^{r} M dr <$ $< r M(r)$, и $\int\limits_{r_0}^{r} K d r < r K(r)$, $\int\limits_{r_0}^{r} r K_\nu' dr < r K_\nu(r)$. Заметим еще, что $K(r) <$ $< M(r)$ и $M(r) + 2K(r) < 3M(r)$, так что

$$r M(r) \geqslant D_0 \int\limits_{r_0}^{r} C^{\frac{1}{\lambda}}(K) r^{\frac{n_0-\mu}{\lambda}} \left[\prod_{j=1}^{m} \left| M - \left| \sigma_j(K) \right| r^{\lambda_j} \left(1 - 0\left(\frac{1}{r}\right)\right) \right| \right]^{\frac{1}{\lambda}} dr. \quad (13)$$

Заметим сейчас, что при достаточно больших r можно в (13) положить $K = \rho + o(1)$ и $\sigma_j(K) = \sigma_j\left(\rho + o(1)\right)$.

Если $\frac{n_0-\mu}{\lambda} \geqslant 0$ и $m > \lambda$, то как и в [1] найдем, что $M(r)$ растет как $\left| \sigma_j(\lambda_j) \right| r^{\lambda_j}$. При $\frac{n_0-\mu}{\lambda} < 0$ наше заключение будет верно только при достаточно малых значений $\frac{\mu - n_0}{\lambda}$. Предположим, что $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \rho \neq \lambda_j$; $j = 1, 2, \ldots, m$ (предел всегда существует). При достаточно больших $r >$ $> r_0 > R_0(\varepsilon)$ $r^{\rho-\varepsilon} < M(r) < r^{\rho+\varepsilon}$. Будем считать, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m$. Пусть $\rho > \lambda_1$. Тогда из (14)

$$r^{\rho+\varepsilon+1} \geqslant H \int\limits_{r_0}^{r} r^q dr = \tilde{H} r^{q+1} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{q+1} \right),$$

где $q = \frac{n_0 - \mu + m(\rho - \varepsilon)}{\lambda}$. Последнее неравенство противоречиво при $\lambda\rho <$ $< n_0 - \mu + m\rho$ или

$$\rho > \frac{\mu - n_0}{m - \lambda}. \quad (14а)$$

Допустим теперь, что $0 < \lambda_{p+1} < \rho < \lambda_p$. Тогда аналогично предыдущему неравенство (14) окажется противоречивым при

$$\lambda\rho < n_0 - \mu + (m - p)\rho + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p.$$

В частности, если $\rho < \lambda_l$, λ_l — наименьшее положительное число среди $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то

$$\lambda\rho < n_0 - \mu + (m - l)\rho + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l.$$

Из последних двух неравенств имеем

$$(m - \lambda - p)\rho > \mu - n_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p); \quad 1 < p \leqslant l.$$

Если $m - \lambda - p \leqslant 0$, то и

$$\mu - n_0 < \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p. \quad (14б)$$

Если же $m - \lambda - p > 0$, то

$$\rho > \frac{\mu - n_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p)}{m - \lambda - p}. \quad (14в)$$

Пусть $\mu - n_0 \leqslant \lambda_l$. Тогда ни при каком значении $\rho \neq \lambda_j$ неравенство (14) не может иметь место. В самом деле, (14а) показывает, что $\rho > \lambda_1$ невозможно, так как уже при $\rho > \frac{\lambda_l}{m-\lambda}$ (14) противоречиво. Далее, если $\lambda_{p+1} < \rho < \lambda_p$, то в случае (14б) (14) не выполняется даже при $\mu - n_0 < \lambda_1$, а если справедливо (14б), то даже для отрицательных ρ (14) ложно.

Итак при $\mu - n_0 \leqslant \lambda_l$ необходимо ρ равно одному из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$. Если $\mu - n_0 > \lambda_l$, то это заключение может оказаться неверным, что видно из следующего примера.

Функция $w = z + 1$ удовлетворяет уравнению

$$z^5 (z+1)^2 \left(\frac{zw'}{w}\right)' = w^5 - \left[(z+1)^5 - z^5\right].$$

Как легко видеть, в этом случае $\lambda = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{4}{5}$, $n_0 = 0$, $\mu = 7$, $\mu - n_0 = 7 > \frac{4}{5}$. Для указанного выше решения $\rho = 1 \neq \lambda_j = \frac{4}{5}$.

Замечание. В [1], где исследовались решения, растущие быстрее любой степенной функции: $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = \infty$, предполагалось $n_0 > \mu$. Можно и там этот результат уточнить таким же образом, как это сделано выше, полагая $\mu - n_0 \leqslant \lambda_l$.

6. В предыдущем пункте предполагали, что $b_{0j}(\lambda_i) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Если $b_{0j_k}(\lambda_i) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, то возможно $\frac{M(r)}{r^{\lambda_i}} \to 0$ или ∞. Пусть α; $\alpha \neq \lambda_j$; $j = 1, 2, \ldots, m$ — корень уравнений $b_{0j_k}(\alpha) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$. Рассмотрим вопрос о том, в каких случаях число α может быть показателем роста решения. Выкладки § 1 здесь не применимы, так как $\sigma_j(K)$ в (14) могут стремится к нулю и в бесконечность при стремлении $K(r)$ к α. Перепишем (14), воспользуясь (13) в виде

$$rM_\nu(r) \geqslant D_0 \int\limits_{r_0}^{r} r^{-\frac{\mu}{\lambda}} \left| \sum_{j=0}^{m} B_j(\zeta_\nu, K_\nu) \right|^{\frac{1}{\lambda}} M_\nu^{\frac{m-j}{\lambda}} \, dr, \tag{15}$$

где $D_0 > 0$ — некоторая постоянная. Как и в § 1 $M_\nu \sim r^\rho$ и $\left| w_\nu^{m-j} r^{n_j} \right| = r^{n_j + (m-j)\alpha + \varepsilon_j(r)}$, где $\varepsilon_j(r) \to 0$, $r \to \infty$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Так как $\alpha \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то по предыдущему (§ 1) $\max(n_j + (m-j)\alpha)$ достигается только при одном значении $j = s$. Выносяя за скобки под интегралом выражение $r^{n_s + (m-s)\alpha + \varepsilon_s(r)}$, найдем:

$$r^{1+\alpha+\varepsilon(r)} > D_0 \int\limits_{r_0}^{r} r^{[-\mu + n_s + (m-s)\alpha + \varepsilon_s(r)]\frac{1}{\lambda}} \left| b_{0s}(\alpha) + o(1) \right| dr >$$

$$\frac{n}{i} > \tilde{D}_0 \left| b_{0s}(\alpha) + o(1) \right| r^{[n_s + (m-s)\alpha - \mu + \varepsilon_0(r)]\frac{1}{\lambda} + 1}, \quad \varepsilon_0(r) \to 0, \ r \to \infty. \tag{16}$$

При условии $\mu - n_0 \leqslant \lambda_l$ неравенство (16), как это следует из п. 5, противоречиво, если только $b_{0s}(\alpha) + o(1)$ не стремится к нулю при $r \to \infty$.

Следовательно, для того, чтобы число α; $\alpha \neq \lambda_j$, $j=1, 2, \ldots, m$, могло быть показателем роста решения, необходимо, чтобы $\max\limits_j (n_j+(m-j)\alpha)$ достигался при одном только значении $j=s$ и чтобы $b_{0s}(\alpha)=0$.

7. Остается еще рассмотреть случай $\lim\limits_{r\to\infty} K(r) \leqslant 0$.

Пусть $\lim\limits_{r\to\infty} K(r) = -a^2$. В этом случае $\lim\limits_{r\to\infty} M(r)=0$, $\int\limits_{r_0}^{r} K'(r)\,dr \leqslant K(r) - K(r_0)$ $\left(K(r)\text{ возрастает}\right)$ и поэтому $\int\limits_{r_0}^{r} K'(r)\,dr < \varepsilon$ при $r_0 > R_0(\varepsilon)$. Так как $K'(r) \geqslant 0$, то отсюда следует, что множество точек E, в которых $K'(r) > \frac{1}{r}$ имеет ограниченную логарифмическую меру. Переписав уравнение (13) по степеням z и разделив его затем на z^l, имея ввиду сказанное выше, получим, что на множестве $(r, \infty)-E$ при $z=\zeta_\nu$

$$C_0\left(w_\nu,\ K_\nu, \frac{rK'_\nu}{1+ir\varphi'_\nu}\right)=o(1),$$

где l — степень функции $\Phi(z, \alpha, \beta, \gamma)$ в уравнении (13) по z, а $C_0(\alpha, \beta, \gamma)$ — коэффициент этого разложения при z^l. Значение $-a^2$ получается как отрицательные корни уравнения $C_0(0, \rho, 0)=0$. К последнему равенству придем, переходя к пределу при $\nu\to\infty$, а затем при $r\to\infty$, и имеет место на множестве $(r, \infty)-E$. Этот предел, очевидно, является вместе с тем и общим пределом для $K(r)$.

Наконец, предположим, что $\lim\limits_{r\to\infty} K(r)=0$. В этом случае $M(r)$ ограничена. Пределы для $M(r)$ при $r\to\infty$ сейчас определяются, как модули корней уравнения $C_0(\alpha, 0, 0)=0$.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
29. II. 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. И. Стрелиц. О росте неоднозначных решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, Математический сборник, т. 53 (95): 2, 1961 (159—194).

PIRMOS IR ANTROS EILĖS PAPRASTŲJŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ NEVIENAREIKŠMIŲ SPRENDINIŲ AUGIMO KLAUSIMU

Š. STRELICAS

(*Reziumė*)

Šis straipsnis yra darbo [1] tęsinys. Jame nagrinėjamas pirmos ir antros eilės paprastųjų diferencialinių lygčių nevienareikšmių sprendinių augimas (pagal atitinkamą augimo apibrėžimą), kurių Rimano paviršių išsišakojimo taškai yra vien tik algebrinio pobūdžio. Šiame darbe nurodomas metodas sprendinių augimui nustatyti tuo atveju, kai sprendiniai auga ne greičiau kaip laipsninė funkcija.

ZUR FRAGE DES ANWACHSENS MEHRDEUTIGER LÖSUNGEN GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER UND ZWEITER ORDNUNG

S. STRELIZ

(Zusammenfassung)

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit [1], wo wir das Anwachsen, geeigneter Definition gemäfs, mehrdeutiger analytischer Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, deren Riemannsche Flächen stets Algebraische Windungspunkte. behalten, betrachteten. Vorausgesetzt, es bestehen Lösungen erwähnter Natur, legen wir eine Methode zur Berechnung der Größe des Anwachsens solcher Lősungen, die nicht rascher als eine Potenzfunktion wachsen, dar.