ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
I LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1—2
1961

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВИМАНА-ВАЛИРОНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ш. СТРЕЛИЦ

В настоящей работе мы обобщаем теоремы Вимана-Валирона для целых функций многих комплексных переменных, доказанные А. А. Гольдбергом и И. Ф. Битляном [1] и нами [3]. Важным в нашем обобщении является способ исчерпания пространства. Мы рассмотрим исчерпания, проводимые областями, ограниченными гиперповерхностями различных типов, среди которых особое место занимают гиперповерхности, близкие к полицилиндрам и полицилиндры. Теорему А. А. Гольдберга и И. Ф. Битляна мы доказываем иным путем нежели это сделано в [1], следуя в основном схеме Вимана-Валирона.

§ 1

1. Рассмотрим семейство круговых замкнутых гиперповерхностей $S(R)$ зависящих от параметра R, обладающих тем свойством, что точка $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принадлежит гиперповерхности $S(R)$ тогда и только тогда, когда точка $\left(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}, \ldots, \frac{z_n}{R}\right)$ принадлежит гиперповерхности $S(1)$ и $(z_1 e^{i\alpha}, z_2 e^{i\alpha}, \ldots, z_n e^{i\alpha}) \in S(R)$ в месте с $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ при любом действительном α. [1]. В этом § мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — *целая трансцендентная функция. Представим эту функцию в диагональный ряд:*

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n), \tag{1.1}$$

где $A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — *однородный полином степени* s. *Обозначим*

$$A_s = \max \left| A_s(z_1, z_1, \ldots, z_n) \right|, \ (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in S(1). \tag{2.1}$$

Через $\nu(R)$ *и* $\mu(R)$ *мы обозначаем центральный индекс и максимальный член ряда*

$$h(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s \tag{3.1}$$

соответственно. Пусть $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ *— точка, в которой модуль функции* $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *достигает максимум на гиперповерхности* $S(R)$. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}+\cdots+\zeta_n \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{(j)} F(\zeta)}{\nu^j(R)\, F(\zeta)}=1, \tag{4.1}$$

причем переходя к пределу следует, быть может, пропустить множество интервалов конечной логарифмической меры.

В слелующих пунктах этого § мы докажем сформулированную выше теорему.

2. Пусть

$$f(z)=f(z,\ t_1, t_2, \ldots, t_m)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)\, z^k - \tag{1.2}$$

целая функция при любом наборе чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ из заданной замкнутой действительной области $\bar{D}$. Предположим, что каждая функция $a_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ограничена в $\bar{D}$. Обозначим

$$\tilde{A}_k=\operatorname{Sup}\left|a_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)\right| \tag{2.2}$$

и

$$\tilde{h}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k z^k. \tag{3.2}$$

Пусть наконец функция $\tilde{h}(z)$ — целая трансцендентная. Обозначим тогда максимальный член ряда (3.2) через $\tilde{\mu}(R)$, а центральный индекс того же ряда через $\tilde{\nu}(R)$.

Ниже мы обобщаем оценки, получаемые в методе Вимана-Валирона таким образом, чтобы они были равномерными в области $\bar{D}$. Мы изложим здесь только такие выкладки, которые отличаются от аналогичных в методе Вимана-Валирона, при этом мы будем отсылать за справками к работе [2].

Полагая $\frac{z-z_0}{z_0}=u$ и

$$\begin{aligned} f(z)&=f(z_0)+uz_0 f'(z_0)+\frac{u^2}{2!}\, z_0^2 f''(z_0)+\cdots= \\ &=\left(\frac{z}{z^0}\right)^n \left(f(z_0)+uf_1(z_0)+\cdots+u^q f_q(z_1)+u^{q+1}\psi(z, z_0)\right)= \\ &=(1+u)^n\left[f(z_0)+uf_1(z_0)+\cdots+u^q f_q(z_0)+u^{q+1}\psi(z, z_0)\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

нетрудно получить следующие равенства:

$$z_0^j f^{(j)}(z_0)=n(n-1)\cdots(n+j-1)f(z_0)+jn(n-1)\cdots(n-j+1)f_1(z_0)+$$
$$+\cdots+nj!\, f_{j-1}(z_0)+j!\, f_j(z_0);\quad j=1, 2, 3, \ldots$$

$$\psi(z, z_0)=\sum_{p=-n}^{\infty} a_{n+p}(t_1, t_2, \ldots, t_m)\, z_0^{n+p} R_p(u),$$

где

$$R_p(u) = \frac{p(p-)\cdots(p-q)}{(q+1)!} + \frac{p(p-1)\cdots(p-q-1)}{(q+1)!} u + \cdots$$

(см. [2]). Нетрудно найти равномерную оценку в замкнутой области $\bar{D}$ для $|\psi(z, z_0)|$. В самом деле, т. к. по определению $|a_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)| \leqslant A_n$, то в согласии с изложенным в [2]

$$|\psi(z, z_0)| < C(q)\left[\sum_{p=0}^{\infty} A_{n+p}|z_0|^{n+p}\left(1+|u|\right)^p + \sum_{p=0}^{\infty} A_{n-p}|z_0|^{n-p}\left(1-|u|\right)^{-p}\right] <$$

$$< H(\alpha, q)\,\tilde{\mu}(R)\left[\tilde{\nu}(R)\right]^{(q+2)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{2.5}$$

где $|z_0| = r$; $0 < \alpha < 1$, $H(\alpha, q)$ от r не зависит; $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < \tilde{\nu}^{\frac{\alpha}{2}-1}(r)$. Пусть $\beta = \frac{q+2}{q+1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, где $q>0$ достаточно большое целое число, что $\beta < 1$. Выберем на окружности $|z| = r$ точки z_λ; $\lambda = 1, 2, \ldots, q$ такие, что

$$|u_\lambda| = \left|\frac{z_\lambda - z_0}{z_0}\right| = \frac{\lambda D}{\tilde{\nu}^\beta};\ \tilde{\nu} = \tilde{\nu}(r).$$

Из (4.2) тогда вытекает система равенств

$$\sum_{j=1}^{q} f_j(z_0) u_\lambda^j = \left(\frac{z_0}{z_\lambda}\right)^n f(z_\lambda) - u_\lambda^{q-1}\psi(z_\lambda, z_0).$$

Из этой системы, точно таким же путем как и в [2] следует неравенство

$$|f_j(z_0)| < K\left(\tilde{\mu}(r) + \tilde{M}(r)\right)\nu^{j\beta}(r), \tag{6.2}$$

где $\tilde{M}(r) = \max\limits_{|z|=r}\left|f(z, t_1, t_2, \ldots, t_m)\right|$, $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \bar{D}$, $K > 0$ — постоянное.

Соотношения (5.2) и (6.2) доказывают справедливость излагаемой ниже леммы.

Лемма. *Имеет место равномерная в замкнутой области $\bar{D}$ оценка*

$$\left|\left(\frac{z}{\tilde{\nu}}\right)^j f^{(j)}(z, t_1, t_2, \ldots, t_m) - f(z, t_1, t_2, \ldots, t_m)\right| < \tilde{K}\tilde{\nu}^{\beta-1}\left(\tilde{\mu}(r) + \tilde{M}(r)\right), \tag{7.2}$$

верная для всех r, за исключением, быть может, множества интервалов оси r конечной логарифмической меры.

3. Рассмотрим снова целую трансцендентную функцию

$$u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

где по прежнему $A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — однородные полиномы степени s, $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$. Функция

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s\left(\frac{z_1}{R} e^{-i\varphi}, \frac{z_2}{R} e^{-i\varphi}, \ldots, \frac{z_n}{R} e^{-i\varphi}\right) z^s; \quad z = Re^{i\varphi}$$

является целой в любой точке гиперповерхности $S(R)$, причем по теореме Коши

$$\max_{S(R)} \left| A_s\left(\frac{z_1}{R} e^{-i\varphi}, \frac{z_2}{R} e^{-i\varphi}, \ldots, \frac{z_n}{R} e^{-i\varphi}\right)\right| =$$

$$= \max_{S(R)} \left|A_s\left(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}, \ldots, \frac{z_n}{R}\right)\right| \leqslant \max_{\substack{|z|=R \\ \left(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}, \ldots, \frac{z_n}{R}\right) \in S(1)}} \left|f(z)\right| = M(R, F), \tag{1.3}$$

где $M(R, F) = \max\limits_{S(R)} \left| F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \right|$.

В обозначениях теоремы 1 из (1.3) вытекает неравенство

$$\mu(R) \leqslant M(R, F). \tag{2.3}$$

4. Для функции $f(z)$ (см. п. 2) справедлива оценка (7.2). Для рассматриваемой функции параметрами служат переменные $\frac{r_j}{R}$ и φ_j — координаты точек $\frac{z_j}{R}$ гиперповерхности $S(1)$. Таким образом из (7.2) и (2.3) при $|z| = R$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{z^j f^j(z)}{\nu^j(R)} - f(z)\right| < \tilde{K}\left(\mu(R) + M(R, F)\right) \nu^{\beta-1}(R) \leqslant 2\tilde{K} M(R, F)\, \nu^{\beta-1}(R), \tag{1.4}$$

где $\tilde{K} > 0$ — некоторая постоянная от R не зависящая, и поэтому, если $z = \varsigma$ — точка максимума функции $\left|f(z)\right|$ на окружности $\left|z\right| = R$ при $\left(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}, \ldots, \frac{z_n}{R}\right) \in S(1)$, то, т. к. $\nu(R) \to \infty$, $R \to \infty$, за исключением множества интервалов ограниченной логарифмической меры на оси R,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{\nu^j(R) f(\zeta)} = 1. \tag{2.4}$$

Определим оператор

$$D_1 f(z) = z f'(z); \quad D_2 f(z) = D_1\left(D_1 f(z)\right)$$

и вообще

$$D_n f(z) = D_1\left(D_{n-1} f(z)\right).$$

Нетрудно показать с помощью полной математической индукции, что

$$D_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k f^{(k)}(z),$$

где α_k — некоторые положительные постоянные, причем $\alpha_n = 1$. Тогда в соответствии с (2.4)

$$\lim_{R\to\infty} \frac{D_j f(\zeta)}{\nu^j(R) f(\zeta)} = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\zeta^j f^{(j)}(\zeta)}{\nu^j(R) f(\zeta)} + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\alpha_k}{\nu^{j-k}(R)} \frac{\zeta^k f^{(k)}(\zeta)}{\nu^k(R) f(\zeta)}\right) = 1, \tag{3.4}$$

где при переходе к пределу исключается множество интервалов оси R конечной логарифмической меры.

Но

$$D_j f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^j A_m \left(\frac{z_1}{R} e^{-i\varphi}, \frac{z_2}{R} e^{-i\varphi}, \ldots, \frac{z_n}{R} e^{-i\varphi} \right) z^m =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m^j A_m(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{(j)} F(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Обозначив сейчас через $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — точку, в которой функция $|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ достигает максимум на гиперповерхности $S(R)$, придем к искомому соотношению

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \zeta_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{(j)} F(\zeta)}{\nu^j(R)\, F(\zeta)} = 1,$$

где при переходе к пределу следует исключить указанное выше множество

§ 2

5. Пусть функции

$$r_j = R\, \rho_j(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}); \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad (v_1, v_2, \ldots v_{n-1}) \in \bar{G} \qquad (1.5)$$

определяют в пространстве $2n$ переменных $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$; $x_j^2 + y_j^2 = r_j^2$ замкнутую гиперповерхность $S(R)$, причем, если в двух точках границы области G равенство (1.5) определяют две совпадающие точки, то мы их отождествляем. Предположим далее, что при возрастании параметра R в бесконечность, области, ограниченные гиперповерхностями $S(R)$ исчерпывают пространство.

Допустим сейчас, что на гиперповерхности $S(1)$ в пространстве $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ существует замкнутая область $\bar{D}(1)$ такая, что максимум модуля любой целой функции всегда достигается в точках, принадлежащих области $\bar{D}(1)$. Иными словами

$$\max_{S(R)} \left| F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \right| = \max_{\bar{D}(R)} \left| F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \right|,$$

какая бы не была целая функция $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Здесь $\bar{D}(R)$ есть подобная $\bar{D}(1)$ область на гиперповерхности $S(R)$ с коэффициентом подобия R. То, что, если указанным свойством обладает область $\bar{D}(1) \subseteq S(1)$, то этим же свойством обладает и область $\bar{D}(R) \subseteq S(R)$ при любом R доказывается тем, что гиперповерхность $S(R)$ круговая (см. п. 1).

Такой пример дает поверхность в пространстве двух переменных (r, ρ), определяемая равенством

$$(r-2)^2 + (\rho - 2)^2 = 3; \quad r \geqslant 0; \quad \rho \geqslant 0.$$

В самом деле, в четверть плоскости $r \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$ написанное уравнение определяет дугу $\sigma(1)$ окружности с максимумом в точке $r = 2$ и наиболее правой точкой при $\rho = 2$. Пусть $F(z, w)$ — целая функция и $(\bar{r}, \bar{\rho})$ — точка с абсциссой $\bar{r}$, удовлетворяющей неравенству $0 \leqslant \bar{r} \leqslant 2$ (или ординатой $\bar{\rho}$ с $0 \leqslant \bar{\rho} \leqslant 2$). Очевидно, на замкнутой дуге $\sigma(1)$; $2 \leqslant r \leqslant 2+\sqrt{3}$ найдется точка с той же ординатой $\bar{\rho}$, но с большей абсциссой (или с общей абсциссой $\bar{r}$, но с большей ординатой). Поэтому

$$\max_{S(1)} \left| F(z,\ w) \right| = \max_{\sigma(1)} \left| F(z,\ w) \right|$$

(гиперповерхностями $S(R)$ будут гиперповерхности, определяемые уравнением $(r-2R)^2+(\rho-2R)^2=3R^2$; $r \geqslant 0$; $\rho \geqslant 0$). Мы предполагаем в общем случае, обсужденном выше, что точки области $\bar{D}(R)$ определяются значениями переменных $(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1})$ из некоторой замкнутой подобласти $\bar{G}_0 \subseteq \bar{G}$ (возможно и $\bar{G}_0 \equiv \bar{G}$).

Наряду с системой (1.5) введем в расмотрение определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_n \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \rho_n}{\partial v_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial v_{n-1}} & \frac{\partial \rho_2}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \rho_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix}$$

и алгебраические дополнения Δ_j; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ к членам ρ_j первой строки.

Мы требуем выполнение следующих условий в замкнутой области $\bar{G}_0$.

1) *Функции* ρ_j; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *непрерывны в* $\bar{G}_0$ *и имеют внутри* G_0 *непрерывные частные производные первого порядка.*

2) $0 \leqslant \frac{\rho_j \Delta_j}{\Delta} \leqslant 1$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

3) *Система уравнений* $\frac{\rho_j \Delta_j}{\Delta}=B_j$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *имеет в* $\bar{G}_0$ *единственное решение при* $B_j \geqslant 0$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j=1$

$$v_j = v_j(B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n);\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{3.5}$$

4) $\rho_j(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}) \geqslant \alpha > 0$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

5) *Подставим функции* (3.5) *в систему* (1.5). *В результате этой подстановки получим систему функций*

$$f_j(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}) = \rho_j\Big(v_1(B_1,\ B_2,\ \ldots, B_{n-1}),\ \ldots,\ v_{n-1}(B_1, B_2,\ \ldots, B_{n-1})\Big). \tag{4.5}$$

Мы требуем, чтобы функции $f_j(B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1})$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *были непрерывными и имели непрерывные частные производные по всем переменным в замкнутом симплексе* $B_j \geqslant 0$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j=1$.

6) *Всякая функция* $k(\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n)=\rho_1^{j_1}\,\rho_2^{j_2}\ldots\rho_n^{j_n}$ *с положительными показателями* $j_m>0$; $m=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *получает максимальное значение внутри области* G.

7. *Квадратичная форма*

$$H=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{f_j}\frac{\partial f_j}{\partial B_k}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_k}\right)\eta_j\eta_k$$

является положительно определенной в любой точке замкнутого симплекса $B_j\geqslant 0;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ \sum_{j=1}^{n-1}B_j\leqslant 1.$

6. Займемся сейчас выяснением вопроса корректности условий, изложенных в п. 5. Имеются два момента, требующих обсуждения

а. Зависят ли функции $f_j(B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1});\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ от параметризации функций $\rho_j=\rho_j(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1});\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

б. Является ли квадратная форма H инвариантной относительно нумерации функций f_j, т. е. будет ли форма H положительно определенной независимо от выбора данной функции среди системы $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ в качестве вычитаемой функции f_n по определению формы H в п. 5.

Покажем сначала, что функции $f_j(B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1})$ характерны для данной поверхности и от параметризации функций $\rho_k=\rho_k(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1})$ не зависят. Пусть

$$v_j=v_j(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1}) \tag{1.6}$$

система функций, имеющих непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным в области G_0', которая отображает область $\bar{G}_0'$ в $\bar{G}$ гомеоморфно. Обозначим

$$\tilde{\rho}_j=\tilde{\rho}_j(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1})=$$
$$=\rho_j\Big(v_1(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1}),\ \ldots,\ v_{n-1}(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1})\Big),\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и через $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}_j$ — соответствующие определители, построенные для системы функций $\tilde{\rho}_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Легко подсчитать, что

$$\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}=\frac{\tilde{\rho}_j\tilde{\Delta}_j}{\tilde{\Delta}}=B_j;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

причем в тех точках, где определители $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}_j$ одновременно обращаются в нуль, мы отношение $\frac{\tilde{\rho}_j\tilde{\Delta}_j}{\tilde{\Delta}}$ определяем по непрерывности. Так как система $\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}=B_j;\ j=1,\ \ldots,\ n,$ имеет единственное решение $v_k=v_k(B_1,\ldots,B_{n-1})$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ при любом наборе чисел, удовлетворяющих условиям $B_j\geqslant 0;\ j=1,\ \ldots,\ n;\ \sum_{j=1}^{n}B_j\leqslant 1$, то в силу (1.6) система уравнений

$$\frac{\tilde{\rho}_j\tilde{\Delta}_j}{\tilde{\Delta}}=B_j$$

также имеет единственное решение при тех же значениях B_k. Очевидно, что после подстановки этого решения в функции $\tilde{\varphi}_j$ мы получим прежние функции $f_j(B_1, B_2 \ldots, B_{n-1})$; $j=1, 2, \ldots, n$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса инвариантности формы H (вопрос б.). Имеем

$$H=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{f_j}\frac{\partial f_j}{\partial B_k}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_k}\right)\eta_j\eta_k.$$

Преобразуем эту форму так, чтобы в каждом слагаемом вычиталась логарифмическая производная от функции f_1 (что, очевидно не уменьшает общности), причем, естественно, в таком случае в форме H должно отсутствовать переменное B_1.

Для этой цели заменим переменное B_1 из соотношения

$$B_1=1-B_2-B_3-\cdots-B_n.$$

Мы полагаем

$$\tilde{f}_j(B_2, B_3, \ldots, B_n)=f_j(1-B_2-B_3-\cdots-B_n, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1});$$
$$j=1, 2, \ldots, n.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{\partial f_j}{\partial B_1}=-\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial B_1};\quad \frac{\partial f_j}{\partial B_k}=\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial B_k}-\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial B_n};\quad k\neq 1;\ j=1, 2, \ldots, n.$$

Подставив последние выражения в форму H мы должны получить форму подобную исходной относительно функций $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n$. Простые вычисления дают:

$$H=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{f_j}\frac{\partial f_j}{\partial B_k}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_k}\right)\eta_j\eta_k=\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{f_j}\frac{\partial f_j}{\partial B_k}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_k}\right)\eta_j\eta_k+$$
$$+\eta_1\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial B_k}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_k}\right)\eta_k+\eta_1\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_j}{\partial B_1}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_1}\right)\eta_j+$$
$$+\eta_1^2\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial B_1}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_1}\right)=\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde{f}_j}\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_k}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_n}\right)\eta_j\eta_k+\eta_1\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde{f}_1}\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde{f}_1}\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_k}+\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_n}\right)\eta_k+$$
$$+\eta_1\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde{f}_j}\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_n}\right)\eta_j+\eta_1^2\left(\frac{1}{\tilde{f}_n}\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde{f}_1}\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial B_n}\right).$$

Введем сейчас замену

$$\eta_1=-(\eta_2+\eta_3+\cdots+\eta_n),$$

что, очевидно, не влияет на определенность формы. Имеем:

$$H=\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_j}\frac{\partial\tilde f_j}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde f_j}\frac{\partial\tilde f_j}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_k}+\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}\right)\eta_j\eta_k-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_j}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_j}\frac{\partial\tilde f_j}{\partial B_k}\right)\eta_j\eta_k-\eta_n\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_j}\frac{\partial\tilde f_j}{\partial B_n}\right)\eta_j+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_k}+\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}\right)\eta_j\eta_k-$$

$$-\eta_n\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_k}+\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}\right)\eta_k+$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}+\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_n}\right)\eta_j\eta_k+\eta_n\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_n}\eta_j\right)+$$

$$+\eta_n\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\tilde f_n}\frac{d\tilde f_n}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_n}\right)\eta_k+\eta_n^2\left(\frac{1}{\tilde f_n}\frac{\partial\tilde f_n}{\partial B_n}-\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_n}\right)=$$

$$=\sum_{j-2}^{n}\sum_{k-2}^{n}\left(\frac{1}{\tilde f_j}\frac{\partial\tilde f_j}{\partial B_k}-\frac{1}{\tilde f_1}\frac{\partial\tilde f_1}{\partial B_k}\right)\eta_j\eta_k.$$

Последнее выражение и доказывает наше утверждение.

7. При условиях п. 5 имеет место следующая теорема Вимана-Валирона, обобщающая наше предложение из [3]. В дальнейшем изложении мы сохраняем обозначения §§ 1, 2.

Теорема 2. *Пусть* $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — *точка, в которой модуль целой трансцендентной функции* $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *достигает максимум на гиперповерхности* $S(R)$, *удовлетворяющей условиям п. 5*: $\max\limits_{S(R)}\left|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right|=\max\limits_{\overline{D}(R)}\left|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right|=\left|F(\zeta)\right|$. *Тогда*

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta_1^{i_1}\zeta_2^{i_2}\cdots\zeta_n^{i_n}\dfrac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}F(\zeta)}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\cdots\partial z_n^{i_n}}}{[\nu(R)]^{i_1+i_2+\cdots+i_n}F(\zeta)}-\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}\right)^{i_j}\right)=0,$$

где при переходе к пределу следует, быть может, пропустить множество интервалов оси R конечной логарифмической меры.

Здесь выражения $\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}$ *вычисляются в точке* $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$, *определяющей точку* ζ.

В следующих пунктах этого § мы докажем эту теорему.

8. Вывод теоремы 2 во многом повторяет выкладки, проведенные нами при доказательстве теоремы, сформулированной в [3]*. Мы здесь остановимся на основной трудности, которая встречается при доказательстве

* Полное доказательство этой теоремы будет опубликовано в „Математическом сборнике".

упомянутой теоремы*. Указанная трудность заключается в оценке выражения

$$\sigma = \sum_{i=[\nu^{k}]}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_p=i} \sum_{j=(1-\gamma)i}^{(1+\gamma)i} \sum_{i_{p+1}+\cdots+i_n=j} 1 \times$$

$$\times \left| a_{\lambda_1-i_1\ldots\lambda_p-i_p\,\lambda_{p+1}+i_{p+1}\ldots\lambda_n+i_n} \right| \rho_1^{\lambda_1-i_1}\ldots\rho_p^{\lambda_p-i_p}\rho_{p+1}^{\lambda_{p+1}+i_{p+1}}\ldots$$

$$\ldots\rho_n^{\lambda_n+i_n} R^{\nu-i+j}(i+j)^{q+1}(1-|u|)^{-j}(1+|u|)^{j}, \tag{1.8}$$

где $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=\nu$; $|u|<\frac{D}{\nu^{\beta}}$; $\beta=\frac{q+2}{q+1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)<1$; $0<\alpha<1$, $k=1-\frac{\alpha}{2}$, $\gamma>0$ — постоянное число, которое можно выбрать произвольно малым.

Найдем

$$\max_{S(1)} k(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) = \max_{\overline{G_0}} \rho_1^{j_1}\rho_2^{j_2}\cdots\rho_n^{j_n}.$$

По условию 6) п. 5 в точке максимума

$$\frac{\partial k}{\partial v_j} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{j_i}{\rho_i}\frac{\partial\rho_j}{\partial v_i}=0;\quad j=1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.8}$$

Кроме того

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i\Delta_i=\Delta. \tag{3.8}$$

Система (2.8) является однородной относительно выражений $\frac{j_i}{\rho_i}$, причем число уравнений на одно меньше числа неизвестных. Поэтому в согласии с (2.8) $\frac{j_1}{\rho_1}:\frac{j_2}{\rho_2}:\cdots:\frac{j_n}{\rho_n}=\Delta_1:\Delta_2:\ldots\Delta_n$ и по (3.8) тогда

$$C\sum_{k=1}^{n} j_k=\Delta;\quad j_p=C\Delta_p\rho_p;\quad p=1, 2, \ldots, n,$$

где постоянное $C>0$ вычисляется при значениях $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, удовлетворяющих системе (2.8). В этих предположениях обозначим

$$\frac{\rho_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{j_k}{j_1+j_2+\cdots+j_n}=\tilde{B}_k>0,$$

причем, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{B}_k=1.$$

Допустим сейчас, что выражение k имеет вид

$$k(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_l)=\rho_1^{j_1}\rho_2^{j_2}\cdots\rho_l^{j_l};\quad l<n.$$

---

* Полное доказательство этой теоремы будет опубликовано в „Математическом сборнике".

Рассмотрим новую функцию

$$k^* = \rho_{l+1}\,\rho_{l+2}\cdots\rho_n\,k(\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_l) = \rho_1^{j_1}\,\rho_2^{j_2}\cdots\rho_l^{j_l}\,\rho_{l+1}\cdots\rho_n.$$

Легко видеть, что

$$\max_{S(1)} k^* \geqslant \min_{S(1)}(\rho_{l+1}\,\rho_{l+2}\cdots\rho_n)\max_{S(1)} k(\rho_1,\ \rho_2,\ldots,\rho_l) \geqslant C\max_{S(1)} k(\rho_1,\ \ldots\ \rho_l). \quad (4.8)$$

В этом случае

$$\frac{j_1}{\rho_1}:\frac{j_2}{\rho_2}:\cdots:\frac{j_l}{\rho_l} = \tilde{\Delta}_1:\tilde{\Delta}_2:\cdots:\tilde{\Delta}_l,$$

где определители $\tilde{\Delta}_j$ вычислены, как алгебраические дополнения определителя Δ в точке, в которой достигается максимум функции k^*. При этом

$$\tilde{B}_p = \frac{j_p}{j_1+j_2+\cdots+j_l+t};\quad p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l;\quad t=n-l. \qquad (5.8)$$

Ниже, в случае, когда не все j_k положительны, мы будем пользоваться последними значениями $\tilde{B}_p$.

Таким образом, если все $j_k>0$, то

$$\max_{S(1)} k(\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n) = \prod_{p=1}^{n}\left[f_p(\tilde{B}_1,\ \tilde{B}_2,\ \ldots,\ \tilde{B}_{n-1})\right]^{j_p}; \qquad (6.8)$$

если же не все $j_k>0$, то по предыдущему

$$\max_{S(1)} k(\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_l) < \tilde{C}\prod_{p=1}^{n}{}'\left[f_p(\tilde{B}_1,\ \tilde{B}_2,\ \ldots,\ \tilde{B}_{n-1})\right]^{j_p}, \qquad (7,8)$$

где $\tilde{C}>0$ — некоторая постоянная от j_p не зависящая, причем штрих указывает, что произведение берется лишь для положительных j_p, фигурирующих в исследуемом выражении. Значения $\tilde{B}_p$ здесь совпадают со значениями (5.8).

Введя в (1.8) вместо функций $\rho_j(v_1, v_2,\ldots, v_{n-1})$ выражения $f_j(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})$ будем иметь:

$$\sigma = \sum_{i=[\nu^{k}]}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p}\ \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_p=i}\ \sum_{j=(1-\gamma)i}^{(1+\gamma)i}\ \sum_{i_{p+1}+\cdots+i_n=j} 1\times$$

$$\times\left|a^{\lambda_1-i_1\cdots\lambda_p-i_p\,\lambda_{p+1}+i_{p+1}\cdots\lambda_n+i_n}\right|\prod_{k=1}^{p}\left[f_k(B_1,\ \ldots,\ B_{n-1})\right]^{\lambda_k-i_k}\times$$

$$\times\prod_{k=p+1}^{n}\left[f_k(B_1,\ \ldots,\ B_{n-1})\right]^{\lambda_k+i_k}(i_1+i_2+\cdot+i_n)^{q+1}R^{\nu-i+j}\times$$

$$\times(1-|u|)^{-i}(1+|u|)^{+j}.$$

Проведенная замена верна в точках замкнутой области $\tilde{D}(1)$, где достигается $\max\limits_{S(1)}\left|F(z_1,\ \ldots,\ z_n)\right|$ (см. п. 5); о них и идет речь в теореме 2.

Положим сейчас $B_j=\frac{\lambda_j}{\nu}$, что возможно, т. к. $\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\nu}=\sum_{j=1}^{n}B_j=1$ (если числа B_j даны, то следовало бы писать $B_j=\frac{\lambda_j+\vartheta_j}{\nu}$, где $\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j=0$ и $|\vartheta_j|<1$, что в дальнейшем не вносит каких либо существенных изменений (см. сноску на стр. 10). Для σ мы находим следующее выражение:

$$\sigma=\sum_{i=[\nu\bar{k}]}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p}\ \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_p=i}\ \sum_{j=(1-\gamma)i}^{(1+\gamma)i}\ \sum_{i_{p+1}+\cdots+i_n=j}\left|a_{\lambda_1-i_1\ldots\lambda_n+i_n}\right|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{p}\left[f_k(\tilde{B}_1,\tilde{B}_2,\ldots,\tilde{B}_{n-1})\right]^{\lambda_k-i_k}\prod_{k=p+1}^{n}\left[f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})\right]^{\lambda_k+i_k}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{p}\left[\frac{f_k(B_1,\ldots,B_{n-1})}{f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})}\right]^{\lambda_k-i_k}\sum_{k=p+1}^{n}\left[\frac{f_k(B_1,\ldots,B_{n-1})}{f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})}\right]^{\lambda_k+i_k}\left(\sum_{j=1}^{n}i_j\right)^{q+1}R^{\nu-i+j}\times$$

$$\times(1-|u|)^{-i}(1+|u|)^{j}. \tag{8.8}$$

Заметим сейчас, что если все $\lambda_k>0$, то

$$\sigma'=\left|a_{\lambda_1-i_1\ldots\lambda_n+i_n}\right|\prod_{k=1}^{p}\left[f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})\right]^{\lambda_k+i_k}\times$$

$$\times\prod_{k=p+1}^{n}\left[f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})\right]^{\lambda_k+i_k}R^{\nu-i+j}\leqslant\mu(R)$$

(см. определение $\mu(R)$ в теореме 1). Если же не все $\lambda_k>0$, то мы умножаем и делим соответствующее выражение на произведение недостающих функций $f_{p_1}f_{p_2}\cdots f_{p_l}$, после чего, пользуясь условием 4 п. 5 и неравенством (7.8), придем к общей оценке

$$\sigma'\leqslant\tilde{C}\mu(R),$$

где $\tilde{C}>0$ — некоторая постоянная от R не зависящая. Поэтому

$$\sigma<\tilde{C}\mu(R)\sum_{i=[\nu\bar{k}]}^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\ \sum_{i_1+\cdots+i_p=i}\ \sum_{j=(1-\gamma)i}^{1(1-\gamma)i}\ \sum_{i_{p+1}+\cdots+i_n=j}\ \prod_{k=1}^{p}\left[\frac{f_k(B_1,\ldots,B_{n-1})}{f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})}\right]^{\lambda_k+i_k}\times$$

$$\times\sum_{k=p+1}^{n}\left[\frac{f_k(B_1,\ldots,B_{n-1})}{f_k(\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_{n-1})}\right]^{\lambda_k-i_k}(i_1+\cdots+i_n)^{q+1}(1-|u|)^{-i}(1+|u|)^{j}. \tag{9.8}$$

Из равенства $\rho_j=f_j(B_1,\ldots,B_{n-1})$ мы имеем

$$\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial\rho_j}{\partial v_s}\frac{\partial v_s}{\partial B_k}=\frac{\partial f_j}{\partial B_k};\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Отсюда следует, что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial B_k} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial B_k} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial v_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial v_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

или, что то же самое:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{\partial f_j}{\partial B_k} = 0; \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial B_k} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{10.8}$$

8. Оценим теперь каждое слагаемое в (9.8):

$$L = \prod_{k=1}^{p} \left[\frac{f_k(B_1, \ldots, B_{n-1})}{f_k(\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_{n-1})}\right]^{\lambda_k - i_k} \prod_{k=p+1}^{n} \left[\frac{f_k(B_1, \ldots, B_{n-1})}{f_k(\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_{n-1})}\right]^{\lambda_k + i_k} (1-|u|^{-i}(1+|u|^{j}. \tag{1.9}$$

Заметим сейчас, что

$$\tilde{B}_j = \begin{cases} \frac{\nu B_j - i_j}{\nu + \bar{\gamma} i + t}; & 1 \leqslant j \leqslant p; \\ \frac{\nu B_j + i_j}{\nu + \bar{\gamma} i + t}; & p < j \leqslant n; \end{cases} \qquad 0 \leqslant t < n; \quad |\bar{\gamma}| \leqslant \gamma.$$

а отсюда

$$\tilde{B}_j - B_j = \begin{cases} -\frac{i_j + B_j(\bar{\gamma}\nu^{\delta} + t)}{\nu(1 + \bar{\gamma}\nu^{\delta-1} + t\nu^{-1})}; & 1 \leqslant j \leqslant p \\ -\frac{-i_j + B_j(\bar{\gamma}\nu^{\delta} + t)}{\nu(1 + \bar{\gamma}\nu^{\delta-1} + t\nu^{-1})}; & p < j \leqslant n, \end{cases}$$

где положено $i = i_1 + i_2 + \cdots + i_p = \nu^{\delta}$; $\delta \geqslant \bar{k}$.

В силу непрерывности всех частных производных $\frac{\partial f_j}{\partial B_k}$; $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ о замкнутом симплексе $B_1 \geqslant 0, \ldots, B_{n-1} \geqslant 0$; $\sum_{j=1}^{n-1} B_j \leqslant 1$ имеем:

$$\sigma_k = -(\lambda_k \pm i_k) \ln \frac{f_k(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_{n-1})}{f_k(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})} =$$

$$= -(\lambda_k \pm i_k) \ln \left[1 + \frac{f_k(\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_{n-1}) - f_k(B_1, \ldots, B_{n-1})}{f_k(B_1, \ldots, B_{n-1})}\right] =$$

$$= -(\lambda_k \pm i_k) \ln \left[\frac{\sum_{s=1}^{p} \frac{1}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial B_s} \left(i_s + B_s(\bar{\gamma}\nu^{\delta} + t)\right) -}{\nu(1 + \bar{\gamma}\nu^{\delta-1} + t\nu^{-1})} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\sum_{s=p+1}^{n} \frac{1}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial B_s} \left(i_s - B_s(\bar{\gamma}\nu^{\delta} + t)\right)}{\nu(1 + \bar{\gamma}\nu^{\delta-1} + t\nu^{-1})} + o\left(\frac{1}{\nu^{1-\delta}}\right)\right] =$$

$$= \frac{(\lambda_k \pm i_k)}{\nu(1+\bar{\gamma}\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1})}\Big[\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big(i_s + B_s(\bar{\gamma}\nu^{\delta}+t)\Big) -$$

$$- \sum_{s=p+1}^{n}\frac{1}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big(i_s - B_s(\bar{\gamma}\nu^{\delta}+t)\Big) + o\Big(\frac{1}{\nu^{s-\delta}}\Big)\Big];$$

$$\tilde{\sigma} = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k = \frac{1}{\nu(1+\bar{\gamma}\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1})}\Big[\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k - i_k)\Big(\sum_{s=1}^{p}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} - \sum_{s=p+1}^{n-1}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_1}\Big) +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{n}(\lambda_k + i_k)\Big(\sum_{s=1}^{p}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} - \sum_{s=p+1}^{n-1}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big) +$$

$$+ (\gamma\nu^{\delta}+t)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{s=1}^{n-1}\frac{B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} + (\bar{\gamma}\nu^{\delta}+t)\Big(\sum_{k=p+1}^{n}i_k - \sum_{k-1}^{p}i_k\Big) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1}\frac{B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big] + o\Big(\frac{1}{\nu^{1-\delta}}\Big).$$

Далее по (10.8):

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{s=1}^{n-1}\frac{B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} = \nu\sum_{k=1}^{n}B_k\sum_{s=1}^{n-1}\frac{B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} = \nu\sum_{s=1}^{n-1}B_s\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} = 0$$

и

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{\nu(1+\bar{\gamma}\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1})}\Big[\sum_{k=1}^{n}i_k\sum_{s=1}^{p}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} - \sum_{s=p+1}^{n-1}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big) -$$

$$- \sum_{k=p+1}^{n}i_k\Big(\sum_{s=1}^{p}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} - \sum_{s=p+1}^{n-1}\frac{i_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big) +$$

$$+ (\gamma\nu^{\delta}+t)\Big(\sum_{k=p+1}^{n}i_k - \sum_{k=1}^{p}i_k\Big)\sum_{s=1}^{n-1}\frac{B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big] + o\Big(\frac{1}{\nu^{1-\delta}}\Big).$$

Положим сейчас $j_k = i_k$; $k < p$; $i_k = -j_k$; $p \leqslant k \leqslant n$. Тогда $(i - j = \bar{\gamma}i)$

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{\nu(1+\bar{\gamma}\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1})}\Big[\sum_{k=1}^{n}j_k\sum_{s=1}^{n-1}j_s\frac{1}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s} +$$

$$+ (\bar{\gamma}\nu^{\delta}+t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{j_k B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big] + o\Big(\frac{1}{\nu^{1-\delta}}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{\nu(1+\bar{\gamma}\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1})}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}j_k j_s + j_n\sum_{s=1}^{n-1}\frac{j_s}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_s} +$$

$$+ (\bar{\gamma}\nu^{\delta}+t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{f_k B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\Big] + o\Big(\frac{1}{\nu^{1-\delta}}\Big).$$

Но $j_1+j_2+\cdots+j_n=\bar{\gamma}\nu^{\delta}$. Поэтому $j_n=\bar{\gamma}\nu^{\delta}-\sum\limits_{k=1}^{n-1} j_k$. Следовательно

$$\tilde{\sigma}=-\frac{1}{\nu(1+\bar{\gamma}\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1})}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{1}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_s}\right)j_k j_s+\right.$$

$$\left.+\bar{\gamma}\nu^{\delta}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{j_s}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_s}+(\bar{\gamma}\nu^{\delta}+t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial_k B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\right]+o\left(\frac{1}{\nu^{1-\delta}}\right).$$

Воспользуемся сейчас положительностью квадратичной формы

$$H=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{1}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}-\frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial B_s}\right)j_k j_s.$$

Найдем минимум формы H при условии

$$j_1+j_2+\cdots+j_p=a;\quad j_{p+1}+j_{p+2}+\ldots+j_{n-1}=-b. \tag{2.9}$$

Пусть при условии (2.9)

$$\min H=\tilde{c}(a,\ b,\ \bar{\gamma}).$$

Тогда при

$$j_1+\cdots+j_p=a\nu^{\delta};\quad j_{p+1}+\cdots+j_{n-1}=-b\nu^{\delta} \tag{3.9}$$

$$\min H=\tilde{c}(a,\ b,\ \gamma)\,\nu^{2\delta}. \tag{4.9}$$

Можно положить $a=1$, а b оценим из следующих соображений. В качестве j_n мы выберем значение, удовлетворяющее неравенству $|j_n|\leqslant|j_{p+l}|$; $l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-p-1$. Но так как

$$j_{p+1}+j_{p+2}+\cdots+j_n=-j=-(1+\bar{\gamma})\,\nu^{\delta},$$

то

$$|j_n|\leqslant\left(\frac{1+\gamma}{n-p}\right)\nu^{\delta}\ \text{ и }\ |j_{p+1}+\cdots+j_{n-1}|=(1+\gamma)\,\nu^{\delta}-|j_n|\geqslant$$

$$\geqslant(1+\bar{\gamma})\left(1-\frac{1}{n-p}\right)\nu^{\delta}$$

($n-p\geqslant 2$, т. к, если $p\geqslant n-1$, то все $j_k>0$ и можно положить $b=0$. При изменении b в интервале $\left(1-\frac{1}{n-p}\right)(1-\gamma)\leqslant b\leqslant(1+\gamma)$ функция $\tilde{c}(a,\ b,\ \gamma)$ имеет положительный минимум $c>0$, т. е. $\tilde{c}(a,\ b,\ \gamma)\geqslant c>0$. Поэтому при условии (3.9) $H(a,\ b,\ \bar{\gamma})\geqslant c\nu^{2\delta}$; $0\leqslant|\bar{\gamma}|\leqslant\gamma$. Далее, в силу непрерывности всех частных производных первого порядка функции f_j; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{j_k B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\right|<C'\sum_{s=1}^{n-1}|j_s|>C\nu^{\delta};\ \left|\sum_{s=1}^{n-1}\frac{B_s}{f_k}\frac{\partial f_k}{\partial B_s}\right|<D.$$

Все эти соображения показывают, что

$$\tilde{\sigma}<-\frac{\nu^{2\delta-1}}{1+\gamma\nu^{\delta-1}+t\nu^{-1}}\left[c-C|\gamma|-D\left(\gamma^2+\frac{t}{\nu^{\delta}}\right)\right].$$

Т. к. число $\gamma > 0$ мы можем произвольно уменьшить, то подберем его таким, чтобы при $R > R_0$

$$c - C\gamma - D\left(\gamma^2 + \frac{n}{\nu(R_0)}\right) > \tilde{K} > 0.$$

Кроме того $1 + \tilde{\gamma}\nu^{\delta-1} > 1 - \gamma$. Поэтому

$$\tilde{\sigma} \leqslant -\frac{\tilde{K}}{1-\gamma}\nu^{2\delta-1} + o\left(\frac{1}{\nu^{\delta-1}}\right) = -\nu^{2\delta-1}\left(\frac{\tilde{K}}{1-\gamma} + \frac{o\left(\frac{1}{\nu^{\delta-1}}\right)}{\nu^{2\delta}-1}\right)$$

и при $R > R_0$ в виду того, что $\nu(R) \to \infty$

$$\tilde{\sigma} < -K\nu^{2\delta-1},$$

где $K > 0$ некоторая новая постоянная. Таким образом

$$\sigma < C'\mu(R)\left[\nu(R)\right]^{q+n+1}\left[\exp\left(-K\nu^{2\delta-1}\right)\right](1-|u|)^{-i}(1+|u|)^{j}.$$

При $|u| < \frac{T}{\nu^\beta}$ имеем

$$(1+|u|)^j < \left(1 + \frac{T}{\nu^\beta}\right)^{(1+\gamma)\nu^\delta} < e^{T(+\gamma)\nu^{\delta-\beta}}.$$

Аналогично

$$(1-|u|)^{-i} < \left(1 + \frac{T}{\nu^{\beta-T}}\right)^{\frac{\nu^\beta - T}{T}\cdot\frac{T\nu^{\delta-\beta}}{1-T\nu^{-\beta}}}.$$

Если $\nu = \nu(R)$ достаточно велико, то

$$(1-|u|)^{-i} < e^{2T\nu^{\delta-\beta}}.$$

Окончательно найдем:

$$\sigma < C'\mu(R)\left[\nu(R)\right]^{q+n+1}\exp\left(-K\nu^{2\delta-1} + 4T\nu^{\delta-\beta}\right).$$

Но всегда

$$2\delta - 1 - \delta + \beta = \delta + \beta - 1 \geqslant 2\bar{k} - 1 > 0\left(\bar{k} = 1 - \frac{\alpha}{2};\ 0 < \alpha < 1\right).$$

Следовательно

$$\sigma < C'\mu(R)\left[\nu(R)\right]^{q+n-1}\exp\left[-K\left(\nu(R)\right)^{2k-1}\left(1 - 4T\nu^{1-2k}(R)\right)\right] < H_0\mu(R),$$

где $H_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Именно эта оценка была существенна для доказательства теоремы в [3]. Этим доказывается также и наша теорема 2 настоящей работы.

Замечание. В случае, когда $n = 2$, можно нетрудно освободиться от условия $\rho_j \geqslant \alpha > 0$, если потребовать, чтобы производная $\rho_1'(u) > 0$; $a \leqslant u \leqslant b$. Отсюда следует, что если функция $\rho_1(u)$ обращается в нуль, то это возможно лишь когда $u = a$, т. е. $\rho_1(a) = 0$. При $\rho_1(a) = 0$ и $f_1(0) = 0$, а тогда

$$\lim_{B_1 \to 0} \frac{B_1 f_1'(B_1)}{f_1(B_1)} = 1.$$

Далее мы можем писать

$$\ln\left(1-\frac{(i+B_1\nu^{\partial})f_1'(B_1)+o\left(\frac{1}{\nu^{1-\partial}}\right)}{\nu f_1(B_1)}\right)=\ln\left(1-\frac{\left(1+\frac{1}{\nu^{1-\partial}}\right)B_1f_1'(B_1)+o\left(\frac{1}{\nu^{\partial-i}}\right)}{f_1(B_1)}\right).$$

Но $0<\frac{B_1f_1'(B_1)}{f_1(B_1)}$ и для малых B_1: $\frac{B_1}{f_1(B_1)}\sim\frac{1}{f_1'(B_1)}\geqslant C_0>0$, т. е. $\frac{\lambda}{\nu f_1(B_1)}\sim$ $\sim\frac{1}{f_1'(B_1)}$ и $\frac{1}{\nu f_1(B_1)}\sim\frac{1}{\nu^{\partial}f_1'(B_1)}$. Таким образом

$$\frac{o\left(\frac{1}{\nu^{1-\partial}}\right)}{f_1(B_1)}<\frac{o(1)}{\nu^{2-\partial}f_1(B_1)}\sim\frac{o(1)}{\nu^{1-\partial}f_1'(B_1)}\underset{B_1\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Эти соображения приводит без труда к оценке для формы H:

$$H=\frac{1}{f_1}\;\frac{\partial f_1}{\partial B_1}\left(1+\frac{B_2}{B_1}\right)j^2>cj^2;\quad c>0,$$

что и нужно для справедливости теоремы 2.

10. Поверхности, рассмотренные А. А. Темляковым, задаются равенствами:

$$\begin{cases} r=R\rho_1(\tau);\\ \rho=R\rho_2(\tau);\end{cases}\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1;\quad \rho_2(\tau)=e^{-\int\frac{\tau}{1-\tau}d\ln\rho_1(\tau)};\quad \rho_1'(\tau)>0;\quad \rho_1'(0)=0.$$

Мы потребуем, чтобы производная $\rho_1'(\tau)$ была непрерывной в сегменте $0\leqslant\tau\leqslant 1$. Далее

$$\Delta=\begin{vmatrix}\rho_1 & \rho_2\\ \rho_1' & \rho_2'\end{vmatrix}=-\frac{\rho_1'\rho_2}{1-\tau};\quad \frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}=\tau;\quad \frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}=1-\tau. \tag{1.10}$$

Нетрудно проверить, что все условия теоремы 2 выполняются, имея ввиду сделанное в предыдущем п. замечание, легко находим, что теорема Вимана-Валирона имеет в этом случае вид:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta^i\eta^j\dfrac{\partial^{i+j}F(\zeta,\eta)}{\partial z^i\,\partial w^j}}{\nu^{i+j}(R)\,F(\zeta,\eta)}-\tau^i(1-\tau)^j\right)=0,$$

где $F(z, w)$ — целая трансцендентная функция, (ζ, η) — точка максимума функции $|F(z, w)|$ на поверхности А. А. Темлякова (1.10).

§ 3

11. Рассмотрим в пространстве (r_1, r_2, r_3) семейство поверхностей $S(R)$ образуемых следующим образом. Требуемая поверхность состоит из частей трех плоскостей $r_j=R$; $j=1, 2, 3$ от координатных плоскостей до их взаимного пересечения и до кривой пересечения их со сферой

$$(r_1-R)^2+(r_2-R)^2+(r_3-R)^2=a^2R^2 \tag{1.11}$$

и из той части $D_0'(R)$ указанной сферы, которая лежит вне куба $0\leqslant r_j\leqslant R$, $j=1, 2, 3$. Эта поверхность близка к полицилиндру, где „шапку" можно произвольно уменьшить, соответственно уменьшая $a>0$ в равенстве (1.11). Этому семейству поверхностей в пространстве (r_1, r_2, r_3) соответствует семейство гиперповерхностей в 6-имерном пространстве

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3);\quad x_j^2+y_j^2=r_j^2;\quad j=1, 2, 3.$$

На рассматриваемой поверхности $S(R)$ максимум модуля произвольной целой функции $F(z_1, z_2, z_3)$ получается на части $D_0(R) \subset D_0'(R)$, где $D_0(1)$ выражается параметрическими уравнениями (см. п. 5)

$$\begin{aligned} &\rho_1 = 1 + au; \\ &\rho_2 = 1 + au; \qquad (u, v) \in g_0 : u \geqslant 0;\ v \geqslant 0;\ u^2 + v^2 \leqslant 1. \\ &\rho_3 = 1 + a\sqrt{1 - u^2 - v^2}; \end{aligned} \tag{2.11}$$

Проверим выполнения условий п. 5 для этой поверхности.

Вычислим определители Δ, Δ_1, Δ_2 и Δ_3. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + au & 1 + av & 1 + a\sqrt{1 - u^2 - v^2} \\ a & 0 & -\dfrac{au}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \\ 0 & a & -\dfrac{av}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \end{vmatrix} = \rho_1\Delta_1 + \rho_2\Delta_2 + \rho_3\Delta_3$$

и

$$\Delta_1 = \frac{a^2 u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}; \quad \Delta_2 = \frac{a^2 v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}; \quad \Delta_3 = a^2. \tag{3.11}$$

$$\Delta = \frac{a^2}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \left(u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right).$$

Далее

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_1\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{u(1 + au)}{u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2}} = B_1; \\ \dfrac{\rho_2\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{v(1 + av)}{u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2}} = B_2; \\ \dfrac{\rho_3\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{\sqrt{1 - u^2 - v^2}\,(1 + a\sqrt{1 - u^2 - v^2})}{u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2}} = B_3. \end{cases} \tag{4.11}$$

Выполнение условия 1) п. 5 очевидно. Перейдем к условию 2). Т. к. $\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta} \geqslant 0$, то $\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta} \leqslant 1$, $j = 1, 2, 3$. Далее

$$\left.\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right|_{u=1,\ v=0} = 1; \quad \left.\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right|_{u=0} = 0; \quad \left.\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\right|_{u=0;\ v=1} = 1; \quad \left.\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\right|_{v=0} = 0. \tag{5.11}$$

Для проверки условия 3) докажем, что система уравнений (4.11) имеет единственное решение при любых $B_1 \geqslant 0$; $B_2 \geqslant 0$; $B_1 + B_2 \leqslant 1$. Для этого вычислим производные $\dfrac{\partial\left(\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\left(\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right)}{\partial v}$ и $\dfrac{\partial\left(\frac{\rho_3\Delta_3}{\Delta}\right)}{\partial u}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\left(\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right)}{\partial u} = \frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\left(\frac{a}{1 + au} + \frac{u + (v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2})\sqrt{1 - u^2 - v^2}}{(u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2})\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) > 0; \\ &\frac{\partial\left(\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right)}{\partial v} = \frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\left(\frac{\sqrt{1 - u^2 - v^2} - v}{(u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2})\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right); \\ &\frac{\partial\left(\frac{\rho_3\Delta_3}{\Delta}\right)}{\partial u} = -\frac{\rho_3\Delta_3}{\Delta}\left(\frac{u}{(1 + a\sqrt{1 - u^2 - v^2})\sqrt{1 - u^2 - v^2}} + \right. \\ &\left. + \frac{u(u + v + a) + 1 - u^2 - v^2}{(u + v + a + \sqrt{1 - u^2 - v^2})(1 - u^2 - v^2)}\right) < 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Аналогично $\frac{\partial B_2}{\partial v} > 0$, $\frac{\partial B_3}{\partial v} < 0$. Отметим, что эти производные не обращаются в нуль в круге $u^2+v^2<1$ при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$.

Рассмотрим третье уравнение системы (4.11) при условии $B_1+B_2=C<1$. Для краткости обозначим

$$\frac{\rho_3 \Delta_3}{\Delta} = f(u, v) = 1 - C. \tag{7.11}$$

На окружности $u^2+v^2=1$ $f(u, v)=0$, а $f(0, 0)=1$. Соединим произвольную точку дуги окружности $u^2+v^2=1$ с центром $0(0, 0)$ радиусом. Пусть $u=kv$, $k>0$ — уравнение прямой, на которой лежит этот отрезок. Для определения точки на этом радиусе, удовлетворяющей уравнению (7.11), решим уравнение

$$f(kv, v) = 1 - C.$$

Производная $\frac{df}{dv} = k\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$ по предыдущему отрицательна. Поэтому на построенном радиусе функция $f(u, v)$ убывает и, следовательно, существует единственная точка на нем $(\bar{u}, \bar{v})$ такая, что $f(\bar{u}, v) = 1 - C$. Таким образом уравнение (7.11) определяет кривую $u=u(v, C)$ внутри области $u^2+v^2<1$; $u \geqslant 0$; $v \geqslant 0$, которая убывает, т. к производная

$$\frac{du}{dv} = -\frac{f'_v}{f'_u} < 0.$$

На построенной кривой и только на ней лежит точка, являющаяся решениением, если оно существует, системы (4.11) при данных B_1, B_2 с $B_1+B_2<1$. Заметим, что кривая $u=u(v, C)$ определена и при $v=0$ и имеет общую точку с прямой $u=0$. Это означает, что функция $f(u, v)$ отображает кривую $u=u(v, C)$ взаимно однозначно на отрезок прямой $B_1+B_2=C$; $0 \leqslant B_1 \leqslant C$ в плоскости (B_1, B_2). Иными словами, любой паре чисел B_1, B_2 с $B_1+B_2= =C<1$ соответствует единственная точка (u_0, v_0) на кривой $u=u(v, C)$ и тем самим в области $u^2+v^2<1$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Отметим следующее обстоятельство: когда точка P движется по кривой $u=u(v, C)$ против часовой стрелки (т. е. когда u убывает), абсцисса B_1 соответственно движущейся по прямой $B_1+B_2=C$ точки убывает, т. к.

$$\left.\frac{\rho_3 \Delta_3}{\Delta}\right|_{v=0} = \left.\frac{\rho_2 \Delta_2}{\Delta} + \frac{\rho_1 \Delta_1}{\Delta}\right|_{v=0} = C = B_1.$$

Исследуем сейчас подробнее первое из уравнений системы (4.11): $\frac{\rho_1 \Delta_1}{\Delta} = B_1$ при постоянном B_1. На дуге окружности $u^2+v^2=1$; $u \geqslant 0$; $v \geqslant 0$ имеется точка, в которой $\frac{\rho_1 \Delta_1}{\Delta} = B_1$ и $\frac{\rho_2 \Delta_2}{\Delta} = 1 - B_1$, причем по прежнему, при убывании u, когда точка движется по дуге окружности, B_1 убывает. Все эти свойства легко вывести из непрерывности левых частей уравнений системы (4.11) и из свойств семейства кривых $u=u(v, C)$; $0 \leqslant C < 1$. Допустим теперь, что на упомянутой дуге единичной окружности фиксированное значение B_1 достигается функцией $\frac{\rho_1 \Delta_1}{\Delta}$ при $v=v_0$. На отрезке прямой $v=\bar{v}<v_0$ (при любом $\bar{v}$), $0 \leqslant u \leqslant \sqrt{1-\bar{v}^2}$ существует единственная

точка $(\bar u, \bar v)$, в которой $\left.\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right|_{u=\bar u,\, v=\bar v} = B_1$. Действительно, мы показали, что при постоянном v функция $\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}$ возрастает. Кроме того, при $u=0$ и $\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}=0$, а в точке $(\sqrt{1-\bar v^2}, v)$, по сказанному выше $\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}>B_1$. Отсюда вывод, что в интервале $0\leqslant v\leqslant v_0$ уравнение $\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}=B_1$ при постоянном B_1 определяет однозначную непрерывную кривую $\bar u=\bar u(v, B_1)$ (непрерывность вытекает из положительности производной $\frac{\partial\left(\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right)}{\partial u}$). Найденная кривая имеет точку на оси $v=0$, причем ее абсцисса меньше абсциссы точки кривой $u=u(v, C)$ при $B_1<C$, т. к., когда $v=0$, функция $\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}$ возрастает. С другой стороны, точка $(\sqrt{1-v_0^2}, v_0)$ является предельной для кривой $\bar u=\bar u(v, B_1)$. Сказанное означает, что кривая $\bar u=\bar u(v, B_1)$ имеет точки в области $u>0$, $v>0$, $u<u(v, C)$ и точки вне ее в секторе круга $u>0$, $v>0$; $u^2+v^2<1$. Таким образом кривые $u=u(v, C)$ и $\bar u=\bar u(v, B_1)$ имеют одну и только одну общую точку, координаты которой удовлетворяют системе уравнений (4.11). Попутно мы доказали, что система (4.11) имеет единственное решение при любых B_1, B_2 с $B_1+B_2=1$.

12. Пусть система функций

$$u=u(B_1, B_2),\quad v=v(B_1, B_2) \tag{1.12}$$

есть решение системы уравнений (4.11). В этом пункте мы покажем, что функции (1.12) непрерывны в замкнутом симплексе $B_1\geqslant 0$; $B_2\geqslant 0$; $B_1+B_2\leqslant 1$. Для этой цели вычислим якобиан первых двух уравнений системы (4.11). Имеем:

$$J=\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{1+2au}{u(1+au)}-\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\Delta'}{\partial u} & -\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\Delta'}{\partial v} \\ -\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\Delta'}{\partial u} & \frac{1+2av}{v(1+av)}-\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\Delta'}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

где

$$\frac{\partial\Delta'}{\partial u}=\frac{\sqrt{1-u^2-v^2}-u}{\sqrt{1-u^2-a^2}};\quad \frac{\partial\Delta'}{\partial v}=\frac{\sqrt{1-u^2-v^2}-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \tag{3.12}$$

и

$$\Delta'=u+v+a+\sqrt{1-u^2-v^2}.$$

Легко подсчитываем, что

$$J=\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\left(\frac{1+2au}{u(1+au)}\cdot\frac{1+2av}{v(1+av)}-\frac{1}{\Delta'}\,\frac{\partial\Delta'}{\partial u}\cdot\frac{1+2av}{v(1+av)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Delta'}\,\frac{\partial\Delta'}{\partial v}\,\frac{1+2au}{u(1+au)}\right).$$

В п. 11 мы обнаружили, что $\frac{\partial\left(\frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\right)}{\partial u}>0$. Аналогично и $\frac{\partial\left(\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\right)}{\partial v}>0$.

Иначе говоря

$$\frac{1+2au}{u(1+au)} > \frac{1}{\Delta'}\ \frac{\partial\Delta'}{\partial u}; \quad \frac{1+2av}{v(1+av)} > \frac{1}{\Delta'}\ \frac{\partial\Delta'}{\partial v}.$$

Обозначим для простоты

$$\alpha = \frac{1+2au}{u(1+au)}; \quad \beta = \frac{1+2av}{v(1+av)}; \quad \frac{1}{\Delta'}\ \frac{\partial\Delta'}{\partial u} = \tilde{a}, \quad \frac{1}{\Delta'}\ \frac{\partial\Delta'}{\partial v} = \tilde{b}.$$

Если $\frac{\partial\Delta'}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Delta_2}{\partial v} < 0$, то

$$J = \frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\cdot\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\left[(\alpha-\tilde{a})(\beta-\tilde{b})-\tilde{a}\tilde{b}\right] > 0,$$

т. к. $\alpha > \tilde{a}$, $\beta > \tilde{b}$. Также очевидно, что $J > 0$, если $\tilde{a} < 0$ и $\tilde{b} < 0$. Пусть сейчас $\frac{\partial\Delta'}{\partial u} > 0$ и $\frac{\partial\Delta'}{\partial v} > 0$, т. е. одновременно выполняются неравенства

$$u < \sqrt{1-u^2-v^2}; \quad v < \sqrt{1-u^2-v^2}.$$

Отсюда $u^2+v^2 < \frac{2}{3}$ и $u < \frac{2}{3}$, $v < \frac{2}{3}$. Тогда в силу убывания функции

$$\frac{(1+x)(1+2ax)}{x(1+ax)} \left(\left(\frac{(1+x)(1+2ax)}{x(1+ax)}\right)' = -\frac{1+ax(2-ax)+2a^2x^2}{x^2(1+ax^2)} < 0;\ 0 < x < \frac{2}{3}\right)$$

$$(1-u)\alpha > 2; \quad (1+v)\beta > 2$$

в квадрате $0 \leqslant u \leqslant \frac{2}{3}$; $0 \leqslant v \leqslant \frac{2}{3}$ и

$$J = \frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\ \frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\left[\alpha\beta-(\alpha+\beta)+\frac{\alpha u+\beta v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right] >$$

$$> \frac{\rho_1\Delta_1}{\Delta}\cdot\frac{\rho_2\Delta_2}{\Delta}\left[(1+u)\alpha(1+v)\beta-(1+u)\alpha-(1+v)\beta\right] > 0.$$

Непрерывность функции (1.12) при $B_1, B_2 \geqslant 0$; $B_1+B_2 < 1$, сразу вытекает из того, что якобиан системы (4.11) положителен. Пусть сейчас (B_1, B_2) точка на прямой $B_1+B_2=1$. Из третьего уравнения системы (4.11) вытекает, что если $B_1+B_2 \to 1$, то $u^2(B_1, B_2)+v^2(B_1, B_2) = 1-\alpha$; $\alpha \to 0$. Используя это замечание, мы присоединяем к уравнению $u^2+v^2=1-\alpha$ первое из уравнений (4.11) в итоге чего придем к системе

$$u^2+v^2=1-\alpha; \quad u(1+au)=B_1\left((u+v+a(1-\alpha)\right).$$

Последняя же система легко сводится к одному уравнению

$$\left[au^2+(1-B_1)u+B_1a(1-\alpha)\right]^2+\beta_1^2u^2=(1-\alpha)B_1^2.$$

Остается заметить, что корни последнего уравнения суть непрерывные функции коэффициентов, причем коэффициент при наивысшей степени от u равен a^2 и как от α так и от B_1, B_2 не зависит.

13. Подставим найденные функции (1.12) в равенства (2.11). Мы находим функции

$$\rho_1=f_1(B_1, B_2); \quad \rho_2=f_2(B_1, B_2). \tag{1.13}$$

Проверим, что существует непрерывные частные производные от этих функций по всем переменным в замкнутом комплексе $B_1 \geqslant 0$; $B_2 \geqslant 0$; $B_1 + B_2 \leqslant 1$. Очевидно, достаточно показать существование непрерывных частных производных $\frac{\partial u}{\partial B_1}$, $\frac{\partial u}{\partial B_2}$, $\frac{\partial v}{\partial B_1}$, $\frac{\partial v}{\partial B_2}$. Из того, что Якобиан $J > 0$ (см. п. 12) не обращается в нуль при $B_1 \geqslant 0$; $B_2 \geqslant 0$; $B_1 + B_2 < 1$ вытекает непрерывность всех перечисленных производных в указанном множестве. Найдем эти производные (мы останавливаемся на производной $\frac{\partial u}{\partial B_1}$, остальные вычисляются аналогично). Обозначим для удобства $\frac{\rho_1 \Delta_1}{\Delta} = h(u, v)$ и $\frac{\rho_2 \Delta_2}{\Delta} = g(u, v)$. Из равенства $h(u, v) = B_1$, $g(u, v) = B_2$ при $J > 0$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial B_1} = \frac{g'_v}{J} = \frac{\Delta}{\rho_1 \Delta_1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Delta' \frac{1+2av}{v(1+av)} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v}}{\Delta' \frac{1+2av}{u(1+au)} \cdot \frac{1+2av}{v(1+av)} - \frac{\partial \Delta'}{\partial u} \frac{1+2av}{v(1+av)} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v} \frac{1+2au}{u(1+au)}} =$$

$$= \frac{\Delta'}{1+au} \frac{\Delta' \frac{1+2av}{1+av} - v\Delta'_v}{\Delta' \frac{1+2au}{1+au} \cdot \frac{1+2av}{1+av} - u\Delta'_u \frac{1+2av}{1+av} - v\Delta'_v \frac{1+2au}{1+au}}.$$

Пусть (u_0, v_0) — точка, для которой $B_1 + B_2 = 1$. Тогда формулы (3.12) показывают, что $\frac{\partial \Delta'}{\partial u} \to \infty$ при $u \to u_0$, $v \to v_0$, причем

$$\lim_{\substack{n \to u_0 \\ v \to v_0}} \frac{\frac{\partial \Delta'}{\partial u}}{\frac{\partial \Delta'}{\partial v}} = \frac{u_0}{v_0}.$$

Следовательно

$$\lim_{B_1 + B_2 \to 1} \frac{\partial u}{\partial B_1} = \frac{v_0 (1 + av_0) \left[u_0 (1 + au_0) + v_0 (1 + av_0)\right]}{\left[u_0^2 (1 + au_0)(1 + 2av_0) + v_0^2 (1 + av_0)(1 + 2au_0)\right]}.$$

Последний предел выражает тот факт, что раз функции $f_j(B_1, B_2)$; $j = 1, 2$ непрерывны в замкнутом симплексе $B_1 \geqslant 0$; $B_2 \geqslant 0$; $B_1 + B_2 \leqslant 1$, то существует и непрерывна в том же замкнутом симплексе производная $\frac{\partial u}{\partial_1 B}$. Тем же путем мы докажем существование и непрерывность всех других частных производных. Заметим, наконец, что

$$a \frac{\partial u}{\partial B_k} = \frac{\partial f_1}{\partial B_k}; \quad a \frac{\partial v}{\partial B_k} = \frac{\partial f_2}{\partial B_k}; \quad k = 1, 2.^*$$

14. Докажем теперь, что максимум выражения $k(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \rho_1^{j_1} \rho_2^{j_2} \rho_3^{j_3}$ достигается всегда внутри области $u^2 + v^2 < 1$, $u > 0$, $v > 0$. Т. к. производная

$$\frac{\partial k}{\partial u} = k \left(\frac{aj_1}{1+au} - \frac{auj_3}{(1 + a\sqrt{1-u^2-v^2})\sqrt{1-u^2-v^2}} \right)^{**}$$

---

* Из третьего уравнения системы (4.11) в точке B_1^0, B_2^0 с $B_1^0 + B_2^0 = 1$ следует: $\frac{\partial \sqrt{1-u^2-v^2}}{\partial B_1} = \frac{\partial \sqrt{1-u^2-v^2}}{\partial (B_1 + B_2)} = -(a + u_0 + v_0)$, а тогда $\frac{\partial f_3}{\partial B_1} = -a(a + u_0 + v_0)$ и т. д.

** Эсли $u = 0$ мы берем производную $\frac{\partial k}{\partial v}$.

стремится к $-\infty$ при стремлении $u^2+v^2 \to 1$, $u \neq 0$, то функция $k(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ не может достигнуть максимального значения на окружности $u^2+v^2=1$. Это означает, что $\rho_3 \neq 1$ (см. п. 11). В силу симметрии и $\rho_1 \neq 1$, и $\rho_2 \neq 1$. Это доказывает наше утверждение.

15. Остается доказать положительную определенность квадратичной формы (см. п. 5 условие 7)

$$H=\left(\frac{\frac{\partial f_1}{\partial B_1}}{f_1}-\frac{\frac{\partial f_3}{\partial B_1}}{f_3}\right)\eta_1^2+\left(\frac{\frac{\partial f_1}{\partial B_2}}{f_1}-\frac{\frac{\partial f_3}{\partial B_2}}{f_3}+\frac{\frac{\partial f_2}{\partial B_1}}{f_2}-\frac{\frac{\partial f_3}{\partial B_1}}{f_3}\right)\eta_1\eta_2+\left(\frac{\frac{\partial f_2}{\partial B_2}}{f_2}-\frac{\frac{\partial f_3}{\partial B_2}}{f_3}\right)\eta_2^2.$$

Для удобства представим равенства $\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}=B_j$ в симметричной форме следующим образом:

$$\frac{f_1(f_1-1)}{f_1(f_1-1)+f_2(f_2-1)+f_3(f_3-1)}=B_1;$$

$$\frac{f_2(f_2-1)}{f_1(f_1-1)+f_2(f_2-1)+f_3(f_3-1)}=B_2;$$

$$\frac{f_3(f_3-1)}{f_1(f_1-1)+f_2(f_2-1)+f_3(f_3-1)}=B_3.$$

Пусть $f_3>1$. Тогда

$$\frac{f_1(f_1-1)}{f_3(f_3-1)}=\frac{B_1}{1-B_1-B_2};\quad \frac{f_2(f_2-1)}{f_3(f_3-1)}=\frac{B_2}{1-B_1-B_2}. \tag{1.15}$$

Простые вычисления дают:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2f_1-1}{f_1-1}\cdot\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial B_1}-\frac{2f_3-1}{f_3-1}\frac{1}{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial B_1}=\frac{1-B_2}{B_1B_3};\\
&\frac{2f_1-1}{f_1-1}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial B_2}-\frac{2f_3-1}{f_3-1}\frac{1}{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial B_2}=\frac{1}{B_3};\\
&\frac{2f_2-1}{f_2-1}\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial B_1}-\frac{2f_3-1}{f_3-1}\frac{1}{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial B_1}=\frac{1}{B_3};\\
&\frac{2f_2-1}{f_2-1}\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial B_2}-\frac{2f_3-1}{f_3-1}\frac{1}{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial B_2}=\frac{1-B_1}{B_2B_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{21.5}$$

Обозначим:

$$\frac{2f_1-1}{f_1-1}=\alpha;\quad \frac{2f_2-1}{f_2-1}=\beta;\quad \frac{2f_3-1}{f_3-1}=\gamma.$$

Кроме того $(f_1-1)^2+(f_2-1)^2+(f_3-1)^2=a^2$. Продифференцировав последнее равенство частным образом по переменному B_j, получим

$$(f_1-1)\frac{\partial f_1}{\partial B_j}+(f_2-1)\frac{\partial f_2}{\partial B_j}+(f_3-1)\frac{\partial f_3}{\partial B_j}=0. \tag{3.15}$$

Воспользовавшись выражениями (1.15), мы из (3.15) находим:

$$B_1\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial B_j}+B_2\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial B_j}+B_3\frac{1}{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial B_j}=0.$$

Положим

$$\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial B_j}=x_j;\quad \frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial B_j}=y_j;\quad \frac{1}{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial B_j}=z_j;\quad j=1,\ 2.$$

Для определения x_j; y_j; z_j; $j=1$, 2 мы приходим к системе уравнений:

$$\alpha x_1 - \gamma z_1 = \frac{1-B_2}{B_1 B_3};$$

$$\beta y_1 - \gamma z_1 = \frac{1}{B_2};$$

$$B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3 z_1 = 0 \text{ и т. д.}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$x_1 = \frac{1}{T}\left(\gamma \frac{B_2}{B_1} + \beta \frac{1-B_2}{B_1}\right); \; y_1 = \frac{1}{T}(\alpha-\gamma); \; z_1 = \frac{-1}{T}\left(\beta \frac{1-B_3}{B_3} + \alpha \frac{B_2}{B_3}\right),$$

где

$$T = \alpha\beta B_3 + \alpha\gamma B_2 + \beta\gamma B_1.$$

Аналогично

$$x_2 = \frac{1}{T}\left(\gamma \frac{B_1}{B_2} + \alpha \frac{1-B_1}{B_2}\right); \; y_2 = \frac{1}{T}(\beta-\gamma); \; z_2 = \frac{-1}{T}\left(\alpha \frac{1-B_1}{B_3} + \beta \frac{B_1}{B_3}\right).$$

Отсюда мы немедленно очевидным образом, выводим:

$$x_1 - z_1 = \frac{B_1 B_2 \alpha + (1-B_2)^2 \beta + B_2 B_3 \gamma}{B_1 B_3 T};$$

$$y_2 - z_2 = \frac{(1-B_1)^2 \alpha + B_1 B_2 \beta + B_1 B_3 \gamma}{B_2 B_3 T}; \tag{4.15}$$

$$y_1 - z_1 = x_2 - z_2 = \frac{(1-B_1)\alpha + (1+B_2)\beta - B_3\gamma}{B_3 T}.$$

Квадратичная форма после введения в нее выражений (4.15) приобретает вид:

$$H = \frac{1}{B_1 B_2 B_3 T}\left\{\left[B_1 B_2 \alpha + (1-B_1)^2 \beta + B_2 B_3 \gamma\right] B_2 \eta_1^2 + \right.$$

$$+ 2B_1 B_2\left[(1-B_1)\alpha + (1-B_2)\beta - B_3\gamma\right]\eta_1\eta_2 +$$

$$\left. + \left[(1-B_1)^2 \alpha + B_1 B_2 \beta + B_1 B_3 \gamma\right] B_1 \eta_2^2\right\}.$$

Дискриминант этой формы равен

$$D = \frac{1}{(B_1 B_2 B_3 T)^2}\left\{B_1^2 B_2^2\left[(1-B_1)\alpha + (1-B_2)\beta - B_3\gamma\right]^2 - \right.$$

$$\left. - B_1 B_2\left[B_1 B_2 \alpha + (1-E_2)^2 \beta + B_2 B_3 \gamma\right]\left[(1-B_1)^2 \alpha + B_1 B_2 \beta + B_1 B_3 \gamma\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{B_1 B_2 B_3} < 0.$$

Случай $f_3 = 1$, т. е. $B_3 = 0$ мы рассматриваем предельным переходом, т. к. все входящие в форму H выражения непрерывны.

Итак, мы убедились, что для рассматриваемой поверхности, построенной в п. 11, имеют место все условия п. 5, так что на ней верна теорема 2.

16. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая трансцендентная функция и $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — точка, в которой достигается* $\max|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)| =$

$=|F(\zeta)|$ *на полицилиндре* $r_j=R$; $j=1, 2, \ldots, n$. *Имеет место соотношение Вимана-Валирона*

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta_1^{i_1}\ldots\zeta_n^{i_n}\dfrac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}F(\zeta)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}}{[\nu(R)]^{i_1+\cdots+i_n}F(\zeta)}-\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{i_j}\right)=0,$$

где $\alpha_j=\alpha_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j=1$, причем переходя к пределу следует, быть может, пропускать множество интервалов оси R конечной логарифмической меры.

Доказательство мы проведем для случая $n=3$ с помощью поверхности п. 11. Многомерный случай $n>3$ доказывается буквально также, как и случай $n=3$.

Введем следующие обозначения. Гиперповерхность, рассмотренную в п. 11, мы обозначим через $S(R, a)$, полицилиндр $r_j=R$; $j=1, 2, \ldots, n$ через $S(R)$. Коэффициенты функции $h(z, a)$, построенной для гиперповерхности $S(R, a)$ мы обозначим через $A_s(a)$ (определение функции $h(z)$ см. в теореме 1 п. 1), а коэффициенты функции $h(z)$, построенной для полицилиндра $S(R)$ — через A_s. Через $\nu(R, a)$, $\mu(R, a)$ и $\nu(R)$, $\mu(R)$ мы обозначаем центральные индексы и максимальные члены рядов $h(z, a)$ и $h(z)$ соответственно. Итак, по определению

$$h(z, a)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s(a)\,z^s;\quad h(z)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\,z^s.$$

Через $\zeta(a)=\big(\zeta_1(a), \ldots, \zeta_n(a)\big)$ и $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ мы обозначаем точки, в которых модуль целой трансцендентной функции достигает максимум на гиперповерхностях $S(R, a)$ и $S(R)$ соответственно.

Если пространство исчерпывается областями, ограниченными гиперповерхностями, построенными в п. 11, то имеет место теорема 2. Окончательные неравенства, которые непосредственно приводят к определению предела, фигурирующего в теореме 2, имеют вид (см. [2], стр. 211):

$$\left|\frac{\zeta_1^{i_1}(a)\,\zeta_2^{i_2}(a)\,\zeta_3^{i_3}(a)\,\dfrac{\partial^{i_1+i_2+i_3}F\big(\zeta(a)\big)}{\partial z_1^{i_1}\,\partial z_2^{i_2}\,\partial z_3^{i_3}}}{[\nu(R, a)]^{i_1+i_2+i_3}F\big(\zeta(a)\big)}-\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}\right)^{i_j}\right|<C(a)\,\nu^{\beta-1}(R,a), \quad (1.16)$$

где $0<\beta<1$, а функции $\frac{\rho_j\Delta_j}{\Delta}$; $j=1, 2, 3$ вычисляются по формулам системы (4.11) в точке максимума функции $F(z_1, z_2, z_3)$ на гиперповерхности $S(R, a)$, причем указанное неравенство имеет место для всех R, за исключением, быть может, множества интервалов оси R конечной логарифмической меры. Доказательство теоремы 3 мы хотим получить предельным переходом в неравенстве (1.16) при $a\to 0$, т. к. при $a\to 0$ гиперповерхность $S(R, a)$ переходит в пределе в полицилиндр. Надлежит показать, что

$\nu(R, a) \to \nu(R)$, $\zeta(a) \to \zeta$ при стремлении к нулю по некоторой последовательности $a_p \downarrow 0$. Кроме того необходимо показать, что можно подобрать в неравенстве (1.16) постоянную, от a не зависящую. Наконец надо будет убедиться в том, что предельный переход возможен на всей оси R за исключением, быть может, множества интервалов оси R конечной логарифмической меры.

17. Множество предельных точек на полицилиндре $S(R)$ точек $\zeta(a)$, $a > 0$ являются точками ζ, в которых функция $|F(z_1, z_2, z_3)|$ достигает максимум на полицилиндре $S(R)$. В самом деле, пусть ζ^* предельная точка сходящейся последовательности $\zeta(a_p)$ при $a_p \downarrow 0$. Тогда, из того что $\left|F\left(\zeta(a)\right)\right| \geqslant |F(z)|$, где $z = (z_1, z_2, z_3) \in S(R)$, следует неравенство $|F(\zeta^*)| \geqslant |F(z)|$ на полицилиндре $S(R)$ (при этом мы пользуемся тем, что $\left|F\left(\zeta(a)\right)\right| > |F(\zeta)|$). Тем самим доказано стремление последовательности значений параметров u, v к пределу u_0, v_0 соответственно. В пределе выражения $\frac{\rho_j \Delta_j}{\Delta}$; $j = 1, 2, 3$; тогда принимают вид:

$$\frac{\rho_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{u_0}{u_0 + v_0 + \sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}}; \quad \frac{\rho_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{v_0}{u_0 + v_0 + \sqrt{1 - u_0^2 + v_0^2}};$$

$$\frac{\rho_3 \Delta_3}{\Delta} = \frac{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}}{u_0 + v_0 + \sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}}.$$

Постоянная $C(a)$, как это видно из доказательства теоремы 2, зависит от значений производных $\frac{\partial f_j}{\partial B_k}$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$. В нашем конкретном случае мы показали в предыдущих пунктах этого §, что производные $\frac{\partial f_j}{\partial B_k}$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1,2$, являются также непрерывными функциями от $a : 0 \leqslant a \leqslant 1$. Поэтому мы можем считать постоянную C в неравенстве (1.16) от a независящую. В то же время квадратичная форма H остается в пределе положительно определенной.

Покажем сейчас, что $\nu(R, a) \to \nu(R)$ при $a \to 0$. Пусть R — точка непрерывности функции $\nu(R)$. Тогда

$$A_{\nu(R)} R^{\nu(R)} > A_{\nu(R) \pm p} R^{\nu(R) \pm p}; \; p = 0, 1, 2, \ldots; \; \nu \pm p > 0. \tag{2.16}$$

Так как при $a \to 0$ $A_s(a) \to A_s$ и в четырехугольнике $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$; $0 \leqslant a \leqslant 1$, где $[R_1, R_2]$ — сегмент, принадлежащий интервалу непрерывности функции $\nu(R)$, функция

$$A_{\nu(R)}(a) R^{\nu(R)} - A_j(a) R^j$$

равномерно непрерывна при любом фиксированном значении j, то для конечного числа значений индекса p в сегменте $[R_1, R_2]$ при $a < a_0$ справедливо неравенство

$$A_{\nu(R)}(a) R^{\nu(R)} > A_{\nu(R) \pm p}(a) R^{\nu(R) \pm p}; \; \nu(R) \pm p > 0. \tag{3.16}$$

Но $A_j(a)R^j \to 0$ при $j \to \infty$, так, что начиная с некоторого p_0 тем более будет иметь место неравенство (3.16). Это доказывает, что при $\alpha < a_0 \cdot \nu(R, a) = \nu(R)$; $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$.

Наконец заметим, что исключительное множество соответствует разрывам функции $\nu(R)$ (см. [2], стр. 200).

Выберем сейчас сходящуюся последовательность точек $\zeta(a_m)$; $a_m \to 0$ и перейдем к пределу в неравенстве (1.16) при $m \to \infty$. Последующим переходом к пределу при $R \to \infty$ мы завершаем доказательство теоремы 3.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в
редакцию
19. III. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ф. Битлян, А. А. Гольдберг. Теоремы Вимана-Валирона для целых функций многих комплексных переменных. Вестник Ленинградского университета, № 13, серия мат., мех. и астр., выпуск 2, 1959 (27—41).
2. Ж. Валирон. Аналитические функции, М., 1957.
3. Ш. И. Стрелиц. Теорема Вимана-Валирона для целых функций многих комплексных переменных. ДАН, т. 134, № 2, 1960.

VIMANO-VALIRONO TEOREMOS APIBENDRINIMAS DAUGELIO KINTAMŲJŲ SVEIKOSIOMS FUNKCIJOMS

Š. STRELICAS

(*Reziumė*)

Tegu $u = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ yra transcendentinė sveikoji funkcija ir

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

jos diagonalinis išdėstymas, kur $A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ yra homogeniniai s-jo laipsnio polinomai. Pažymėję raide A_s funkcijos $|A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ maksimumą ant paviršiaus $S(R): |z_j| = R;\ j = 1, 2, \ldots, n$, sudarome eilutę

$$h(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s.$$

Tegu toliau $\mu(r)$ ir $\nu(r)$ reiškia eilutės $h(z)$ maksimalinį narį bei centrinį indeksą atitinkamai. Įrodoma

teorema. Egzistuoja

$$\lim_{R \to \infty} \left(\frac{\zeta_1^{i_1} \zeta_2^{i_2} \ldots \zeta_n^{i_n} \dfrac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n} F(\zeta)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_n^{i_n}}}{[\nu(R)]^{i_1+i_2+\ldots+i_n} F(\zeta)} - \prod_{j=1}^{n} \alpha_j^{i_j} \right) = 0,$$

kur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ yra policilindro taškas, kuriame

$$\max_{S(R)} |F(z_1, z_2, \ldots, z_n)| = |F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)| = |F(\zeta)|;\ \alpha_j = \alpha_j(\zeta) \geqslant 0;\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1.$$

Pereinant prie ribos, tenka praleisti intervalų aibę, kurios logaritminis matas yra aprėžtas.

VERALLGEMEINERUNG DES WIMAN-VALIRONSCHEN SATZES FÜR GANZE FUNKTIONEN MEHRERER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN

S. STRELIZ

(Zusammenfassung)

Es sei $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine ganze transzendente Funktion und die Reihe

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n), \tag{1}$$

wo $A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $s=0, 1, 2, \ldots$ — homogene Polynome der Ordnung s sind, die Diagonaldarstellung der Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Wir bezeichnen mit A_s die Größe $\max|A_s(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ auf der geschlossenen Fläche $S(R): |z_j| = R;\ j=1, 2, \ldots, n$ und stellen die Funktion

$$h(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s \tag{2}$$

auf. Es sei dann $\nu(R)$ — der zentrale Index, $\mu(R)$ — das maximale Glied der Reihe (2). Wir beweisen den

Satz. Es gilt die Beziehung

$$\left(\lim_{R\to\infty} \frac{\zeta_1^{j_1}\zeta_2^{j_2}\ldots\zeta_n^{j_n}\dfrac{\partial^{j_1+j_2+\ldots+j_n}F(\zeta)}{\partial z_1^{j_1}\partial z_2^{j_2}\ldots\partial z_n^{j_n}}}{[\nu(R)]^{j_1+j_2+\ldots+j_n}F(\zeta)} - \prod_{i+1}^{n}\alpha_i^{j_i}\right) = 0,$$

wo $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in S(R)$ ein Punkt der Eigenschaft ist, daß

$$|F(\zeta)| = \max_{S(R)} |F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|;\ \alpha_j = \alpha_j(R) \geqslant 0;\ j=1, 2, \ldots, n; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(R) = 1.$$

Beim Grenzübergang sollte eine abzählbare Menge von Intervalen begrenzten logarythmisches Maßes fernbleiben.