I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1—2

1961

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. УЖДАВИНИС

Числовая функция $F(m)$, областью определения которой служит множество натуральных чисел, называется аддитивной, если для любой пары взаимно простых m, n

$$F(mn)=F(m)+F(n),$$

если, кроме того, для всех целых положительных степеней простых чисел p^α

$$F(p^\alpha)=F(p),$$

то ее называют сильно аддитивной.

Пусть n — целое положительное число. Будем обозначать через $\nu_n\{\ldots\}$ частоту целых положительных чисел m, не превосходящих n и удовлетворяющих условиям, которые всякий раз будут указаны в скобках. Через p, q будем обозначать простые числа и через $\vartheta(p)$ — число несравнимых решений сравнения $g(m)\equiv 0 \pmod p$, где $g(m)$ — любой целочисленный полином.

Пусть $F(m)$ — вещественная аддитивная функция,

$$A(u)=\sum_{p\leqslant u}\frac{F(p)\vartheta(p)}{p},\quad B^2(u)=\sum_{p\leqslant u}\frac{F^2(p)\vartheta(p)}{p},\quad D^2(u)=\sum_{p^\alpha\leqslant u}\frac{F^2(p^\alpha)\vartheta(p)}{p^\alpha},$$

причем суммы берутся по всем простым числам $p\leqslant u$ или соответственно по всем натуральным степеням простых чисел $p^\alpha\leqslant u$.

В частности, в этой статье будет доказано, что

1°. если $D(n)\to\infty$ и $\max\limits_{p^\alpha\leqslant n}|F(p^\alpha)|=o\big(D(n)\big)$ при $n\to\infty$, то

$$\nu_n\left\{\frac{F\big(|g(m)|\big)-A(n)}{D(n)}<x\right\}\to G(x) \tag{1}$$

при $n\to\infty$;

2°. если $B(n)\to\infty$ и $\max\limits_{p\leqslant n}|F(p^\alpha)|=o\big(\alpha^k B(n)\big)$ (k — произвольная постоянная, независящая от p) при $n\to\infty$, то

$$\nu_n\left\{\frac{F\big(|g(m)|\big)-A(n)}{B(n)}<x\right\}\to G(x) \tag{2}$$

при $n \to \infty$. Здесь $g(m)$ — любой неприводимый примитивный целочисленный полином, не имеющий целых положительных корней, и

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{3}$$

Естественно поставить вопрос об оценке быстроты сходимости в отношениях (1) и (2) к предельному закону (3). Как известно, самые общие результаты при решении этого вопроса принадлежат И. Кубилюсу [1 — 3]. В частности, он показал, что если сильно аддитивная функция $F(m)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$B(n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty; \qquad \frac{1}{B(n)} \max_{p \leq n} |F(p)| \leq \mu_n,$$

где μ_n не возрастает и стремится к 0 при $n \to \infty$, то

$$\nu_n \left\{ \frac{F(m) - A(n)}{B(n)} < x \right\} = G(x) + O\left\{ \mu_n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \ln^2 \frac{1}{\mu_n} + 1 \right) \right\}, \tag{4}$$

равномерно относительно $n > n_0$ и x.

В настоящей статье мы попытаемся получить разложение вида (4) для законов распределения значений аддитивных функций от целочисленных полиномов, подчиненных условиям 1° или 2°. Основной результат работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция, подчиненная условиям:*

$$D(n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty; \qquad \frac{1}{D(n)} \max_{p^\alpha \leq n} |F(p^\alpha)| \leq \mu_n, \tag{5}$$

где μ_n не возрастает и стремится к 0 при $n \to \infty$; $g(m)$ — неприводимый примитивный целочисленный полином, не имеющий целых положительных корней;

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Тогда при $n > n_1$ для всех x (n_1 не зависит от x)

$$\nu_n \left\{ \frac{F(|g(m)|) - A(n)}{D(n)} < x \right\} = G(x) + O\left\{ \mu_n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \ln^2 \frac{1}{\mu_n} + 1 \right) \right\} \tag{6}$$

равномерно относительно $n > n_1$ и x.

Доказательство. Пусть $n > n_1$, где n_1 — достаточно большое число. Положим

$$r = r(n) = n^{\mu_n}.$$

Очевидно, что $\ln r(n) = o(\ln n)$ при $n \to \infty$. Кроме того,

$$D^2(n) = \sum_{p^\alpha \leq n} \frac{F^2(p^\alpha)\,\vartheta(p)}{p^\alpha} \ll D^2(n)\, \mu_n^2 \ln \ln n,$$

отсюда

$$\mu_n \ll \frac{1}{\ln \ln n}. \tag{7}$$

Далее,

$$D^2(n)-D^2(r)=\sum_{r<p^\alpha\leqslant n}\frac{F^2(p^\alpha)\vartheta(p)}{p^\alpha}\ll D^2(n)\mu_n^2\ln\frac{1}{\mu_n}. \tag{8}$$

Теперь через q будем обозначать простые числа, подчиненные условию $n_0<q\leqslant r$, где $n_0=\max(|D|,\ 2s)$ $\big(D$ и s — соответственно дискриминант и степень полинома $g(m)\big)$. Пусть

$$h_n(m)=\frac{F\big(|g(m)|\big)}{D(n)},\quad h_n(m)_r=\frac{1}{D(n)}\sum_q F^{(q)}\big(|g(m)|\big),$$

где $F^{(q)}(m)=F(q^{\beta_q(m)})$, $\beta_q(m)=\min\big(\alpha_q(m);\ \gamma_q\big)$; $\alpha_q(m)$ — целое неотрицательное число такое, что $q^{\alpha_q(m)}\,\|\,m$ и $\gamma_q=\left[\frac{\ln r}{\ln q}\right]$.

В дальнейшем нам для доказательства понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $g(m)$ — неприводимый примитивный целочисленный полином степени s; $r=r(n)$ — функция от n, подчиненная условиям $r>2$, $\ln r(n)=o(\ln n)$ при $n\to\infty$; B, b — натуральные числа, делящиеся на простые числа, бóльшие n_0, причем $Bb\leqslant\sqrt[4]{n}$; $\mathfrak{P}$ — любой набор простых чисел, бóльших n_0 и не превосходящих $r(n)$, где $n_0=\max(|D|,\ 2s)$ $\big(D$ — дискриминант полинома $g(m)\big)$. Тогда число натуральных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям*

$$\begin{cases} g(m)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,Bb),\\ g(m)\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,bp)\quad (p\in\mathfrak{P},\ p/B),\end{cases}$$

равно

$$\frac{n}{Bb}\prod_{p\backslash Bb}\vartheta(p)\prod_{p\in\mathfrak{P}}\left(1-\frac{\nu(p)}{p}\right)\left\{1+O\left(e^{-c_1\frac{\ln n}{\ln r}\ln\frac{\ln n}{\ln r}}\right)\right\},$$

где

$$\nu(p)=\begin{cases}0, & \text{если } p/B,\\ 1, & \text{если } p/B,\ p/b,\\ \vartheta(p), & \text{если } p/Bb.\end{cases}$$

Оценка равномерна по $Bb\leqslant\sqrt[4]{n}$ и $\mathfrak{P}$.

Лемма 2. *Пусть $g(m)$ — неприводимый примитивный целочисленный полином; $2<r(n)\leqslant n$, $u>2$, $\{b\}$ — множество натуральных чисел, в канонические разложения которых входят лишь простые числа, не превосходящие $r(n)$. Тогда число натуральных $m\leqslant n$, для которых $g(m)$ делится хотя бы на одно из чисел $b\geqslant u$, равно*

$$O\left(n\frac{\ln r}{\ln u}\right).$$

Оценка равномерна по n, u, r и множеству $\{b\}$.

Первая лемма доказывается при помощи решета методом А. А. Бухштаба [4], доказательство которой опускаем. С менее точной оценкой

$O\left(\frac{\ln r}{\ln n}\right)$ остаточного члена, которой нам достаточно, она доказана, например, в [5]. Вторая лемма доказана также в [5].

Эти две леммы и методы работы [3] (гл. 2) позволяют доказать, что при $r=n^{\mu_n}$ равномерно по y

$$\nu_n\{h_n(m)_r<y\}=\Phi_r(y)+O(\mu_n),$$

где $\Phi_r(y)$ — функция распределения суммы независимых случайных величин $\sum\limits_q \xi_{nq}$, а ξ_{nq} принимает значения $\frac{F(q^\alpha)}{D(n)}$ с вероятностями $\pi(q^\alpha)$ ($\alpha=0, 1, \ldots, \gamma_q$). Здесь

$$\pi(q^\alpha)=\begin{cases} 1-\frac{\vartheta(q)}{q}, & \text{если } \alpha=0,\\ \frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}\left(1-\frac{1}{q}\right), & \text{если } 1\leqslant\alpha<\gamma_q,\\ \frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}, & \text{если } \alpha=\gamma_q.\end{cases}$$

Среднее значение случайной величины $\sum\limits_q \xi_{nq}$ равно

$$\sum_{q^\alpha\leqslant r}\frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)},$$

ее дисперсия согласно (8)

$$\sum_{q^\alpha\leqslant r}\frac{F^2(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D^2(n)}-\sum_{q\leqslant r}\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\frac{F(p^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right)^2=\sum_{p^\alpha\leqslant r}\frac{F^2(q^\alpha)\vartheta(p)}{D^2(n)p^\alpha}+O(\mu_n^2)=$$

$$=\frac{1}{D^2(n)}\left(D^2(n)+D^2(r)-D^2(n)\right)+O(\mu_n^2)=1+O\left(\mu_n^2\ln\frac{1}{\mu_n}\right).$$

Отсюда и из (5) немедленно следует, что для суммы случайных величин $\sum\limits_q \xi_{nq}$ выполнено условие Линдеберга. Поэтому

$$\Phi_r\left(x+\sum_{q^\alpha\leqslant r}\frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right)\to G(x),$$

при $n\to\infty$ равномерно по x.

Далее, сумма третьих абсолютных центральных моментов случайных величин ξ_{nq} равна

$$\sum_{q\leqslant r}\sum_{\alpha=0}^{\gamma_q}\left|\frac{F(q^\alpha)}{D(n)}-\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right|^3\pi(q^\alpha)=\sum_{q\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\left|\frac{F(q^\alpha)}{D(n)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right|^3\pi(q^\alpha)+\sum_{q\leqslant r}\left|\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right|^3\left(1-\frac{\vartheta(q)}{q}\right)\ll$$

$$\ll\frac{1}{D^3(n)}\left(\sum_{q^\alpha\leqslant r}|F(q^\alpha)|^3\frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}+\sum_{q\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}F^2(q^\alpha)\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}|F(q^\alpha)|\frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}\right)\frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{q\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}|F(q^\alpha)|\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\frac{|F(q^\alpha)|\vartheta(q)}{q^\alpha}\right)^2\frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}+\sum_{q\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_q}\frac{|F(q^\alpha)|\vartheta(q)}{q^\alpha}\right)^3\frac{\vartheta(q)}{q^\alpha}\right)+$$

$$+\mu_n^3 \ll \frac{1}{D^3(n)} \sum_{p^\alpha \leqslant r} \frac{|F(p^\alpha)|^3 \vartheta(p)}{p^\alpha} + \mu_n^3\Big(1+\sum_{p \leqslant r} \frac{1}{(p-1)^2} + \sum_{p \leqslant r} \frac{1}{(p-1)^3} +$$

$$+\sum_{p \leqslant r} \frac{1}{(p-1)^4}\Big) \ll \frac{\mu_n}{D^2(n)} \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{F^2(p^\alpha)\vartheta(p)}{p^\alpha} + \mu_n^3 \ll \mu_n.$$

На основании вышеупомянутых соображений можно применить известные результаты А. Берри и К. Г. Эссена ([6], [7]), что дает

$$\Phi_r\Big(x + \sum_{q^\alpha \leqslant r} \frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\Big) - G(x) \ll \mu_n,$$

причем оценка равномерна относительно x. Следовательно, равномерно по n и x

$$\nu_n\Big\{\Big(h_n(m)_r - \sum_{q^\alpha \leqslant r} \frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}\Big) < x\Big\} - G(x) \ll \mu_n. \qquad (10)$$

Наша цель теперь — заменить в последнем соотношении $h_n(m)_r$ на $h_n(m)$ и

$$\sum_{q^\alpha \leqslant r} \frac{F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)}{D(n)}$$

на

$$\frac{A(n)}{D(n)}.$$

Имеем:

$$A(n) - \sum_{q^\alpha \leqslant r} F(q^\alpha)\pi(q^\alpha) = \sum_{p \leqslant n_0} \frac{F(p)\vartheta(p)}{p} + \sum_{r<p \leqslant n} \frac{F(p)\vartheta(p)}{p} -$$

$$- \sum_{\substack{q^\alpha \leqslant r \\ \alpha > 1}} F(q^\alpha)\pi(q^\alpha) \ll 1 + D(n)\mu_n\Big(\ln\frac{1}{\mu_n} + 1\Big),$$

или

$$\Big|A(n) - \sum_{q^\alpha \leqslant r} F(q^\alpha)\pi(q^\alpha)\Big| < c_2 D(n)\mu_n \ln\frac{1}{\mu_n}, \qquad (11)$$

где c_2 и в дальнейшем c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 — положительные числа, не зависящие от n.

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{m=1}^{n} \Big(F\big(|g(m)|\big) - \sum_q F^{(q)}\big(|g(m)|\big)\Big)^l,$$

где

$$l = 2\Big[\ln\frac{1}{\mu_n}\Big].$$

Из тождества

$$F\big(|g(m)|\big) - \sum_q F^{(q)}\big(|g(m)|\big) = \sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ p^\alpha \leqslant n^{1/l}, p \leqslant n_0}} F(p^\alpha) + \sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ p^\alpha \leqslant n^{1/l}, p > n_0}} F(p^\alpha) +$$

$$+ \sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ p^\alpha > n^{1/l}}} F(p^\alpha) - \sum_{\substack{q^\alpha \| g(m) \\ q^\alpha \leqslant r}} F(q^\alpha) = \sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ r < p^\alpha \leqslant n^{1/l}, p > n_0}} F(p^\alpha) + \eta_n(m),$$

где $|\eta_n(m)| \leqslant c_3 l \mu_{|g(n)|} D\left(|g(n)|\right)$, следует:

$$S = \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{i!\,(l-i)!} \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ r < p^\alpha \leqslant n^{1/l},\, p > n_0}} F(p^\alpha) \Big)^i \eta_n^{l-i}(m) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{i!\,(l-i)!} \left(c_3 l \mu_{|g(n)|} D\left(|g(n)|\right)\right)^{l-i} \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ r < p^\alpha \leqslant n^{1/l},\, p > n_0}} |F(p^\alpha)| \Big)^i. \quad (12)$$

Подсчитаем теперь

$$S_1 = \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{p^\alpha \| g(m) \\ r < p^\alpha \leqslant n^{1/l},\, p > n_0}} |F(p^\alpha)| \Big)^i = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geqslant \dots \geqslant i_k \geqslant 1}} \frac{i!}{i_1! \dots i_k!} \times$$

$$\times \sum'_{\substack{p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k} \\ p_1^{\alpha_1} \| g(m), \dots, p_k^{\alpha_k} \| g(m)}} F^{i_1}(p_1^{\alpha_1}) \dots F^{i_k}(p_k^{\alpha_k}),$$

где штрих указывает, что положительные степени простых чисел $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_t^{\alpha_t}$ являются различными, каждый из которых $r < p_t^{\alpha_t} \leqslant n^{1/l}$, $p_t > n_0$, и что суммирование ведется по всем возможным различным перестановкам $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_t^{\alpha_t}$ в $F^{i_1}(p_1^{\alpha_1}) \dots F^{i_t}(p_t^{\alpha_t})$. Отсюда выводим, что

$$S_1 \leqslant D^i(n)\, \mu_n^i \sum_{k=1}^{i} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geqslant \dots \geqslant i_k \geqslant 1}} \frac{i!}{i_1! \dots i_k!} \sum'_{\substack{p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k} \\ p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \leqslant n}} \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}} + 1 \right) \times$$

$$\times \vartheta(p_1) \dots \vartheta(p_k) \leqslant n D^i(n)\, \mu_n^i \sum_{k=1}^{i} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geqslant \dots \geqslant i_k \geqslant 1}} \frac{i!}{i_1! \dots i_k!} \times$$

$$\times \sum'_{\substack{p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k} \\ p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \leqslant n}} 2\, \frac{\vartheta(p_1) \dots \vartheta(p_k)}{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}}.$$

Внутренняя сумма Σ' не превосходит

$$\leqslant \left(c_4 \ln \frac{1}{\mu_n} \right)^k,$$

следовательно,

$$S_1 \leqslant n \left(c_4 i D(n)\, \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n} \right)^i \leqslant n \left(c_4 l D(n)\, \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n} \right)^i \leqslant n \left(c_5 D(n)\, \mu_n \ln^2 \frac{1}{\mu_n} \right)^i. \quad (13)$$

Кроме того,

$$D^2\left(|g(n)|\right) \ll D^2(n) + \mu_{|g(n)|}^2 D^2\left(|g(n)|\right),$$

$$\mu_{|g(n)|} \leqslant \mu_n, \quad (14)$$

следовательно,

$$D^2\left(|g(n)|\right) \ll D^2(n). \quad (15)$$

Далее, подставляя (13), (14), (15) в (12), имеем:

$$S \ll n \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{(l-1)!\,i!} \left(c_6 l D(n) \mu_n\right)^{l-i} \left(c_5 D(n) \mu_n \ln^2 \frac{1}{\lambda_n}\right)^i \leqslant$$

$$\leqslant n \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{i!\,(l-1)!} \left(c_7 D(n) \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n}\right)^{l-i} \left(c_5 D(n) \mu_n \ln^2 \frac{1}{\mu_n}\right)^i =$$

$$= n\left(c_7 D(n) \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n} + c_5 D(n) \mu_n \ln^2 \frac{1}{\mu_n}\right)^l < \left(c_8 D(n) \mu_n \ln^2 \frac{1}{\mu_n}\right)^l.$$

Из этой оценки заключаем, что при

$$\tau = 3c_8 D(n) \mu_n \ln^2 \frac{1}{\mu_n}$$

имеет место оценка

$$\nu_n\left\{\left|F\left(|g(m)|\right) - \sum_q F^{(q)}\left(|g(m)|\right)\right| \geqslant \tau\right\} \ll 3^{-l} \ll \mu_n^2.$$

Отсюда и из (11) легко выводим:

$$\nu_n\left\{\left(h_n(m)_r - \sum_{q^\alpha \leqslant r} \frac{F(q^\alpha)\,\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right) < x - \varepsilon\right\} \leqslant \nu_n\left\{\left(h_n(m) - \frac{A(n)}{D(n)}\right) < x\right\} + O(\mu_n^2) \leqslant$$

$$\leqslant \nu_n\left\{\left(h_n(m)_r - \sum_{q^\alpha \leqslant r} \frac{F(q^\alpha)\,\pi(q^\alpha)}{D(n)}\right) < x + \varepsilon\right\},$$

где

$$\varepsilon = (c_2 + 3c_8)\,\mu_n \ln^2 \frac{1}{\mu_n} = o(1).$$

Беря теперь, что $|x| < \mu_n^{-\frac{1}{2}}$, имеем ($|\Theta| \leqslant 1$):

$$\left|G(x \pm \varepsilon) - G(x)\right| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+\Theta\varepsilon)^2} \ll \varepsilon e^{-\frac{1}{2}x^2};$$

Тогда в силу (10) получаем, что

$$\nu_n\left\{\frac{F\left(|g(m)|\right) - A(n)}{D(n)} < x\right\} = G(x) + O\left(\varepsilon e^{-\frac{1}{2}x^2} + \mu_n^2 + \mu_n\right) =$$

$$= G(x) + O\left\{\mu_n\left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \ln^2 \frac{1}{\mu_n} + 1\right)\right\}.$$

Теорема доказана для $|x| < \mu_n^{-\frac{1}{2}}$.

Остается рассмотреть случай $|x| \geqslant \mu_n^{-\frac{1}{2}}$. Нетрудно показать, что

$$\sum_{m=1}^{n} \left(h_n(m) - \frac{A(n)}{D(n)}\right)^2 \ll n,$$

откуда

$$\nu_n\left\{\left|h_n(m) - \frac{A(n)}{D(n)}\right| \geqslant |x|\right\} \ll \frac{1}{x^2} \leqslant \mu_n.$$

Поэтому

$$\nu_n\left\{\left(h_n(m) - \frac{A(n)}{D(n)}\right) < -|x|\right\} \ll \mu_n,$$

$$\nu_n\left\{\left(h_n(m) - \frac{A(n)}{D(n)}\right) < |x|\right\} = 1 + O(\mu_n).$$

С другой стороны

$$G(-|x|) = 1 - G(|x|) \ll \frac{1}{|x|} e^{-\frac{1}{2}x^2} \leqslant \sqrt{\mu_n}\, e^{-\frac{1}{2\mu_n}} \ll \mu_n.$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается и следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $F(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция, подчиненная условиям: $F(p^\alpha)=O\left(\alpha^k\,|F(p)|\right)$ ($k\leqslant 1$ — произвольная постоянная, не зависящая от p);*

$$B(n)\to\infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{B(n)}\max_{p\leqslant n}|F(p)|\leqslant\mu_n \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где μ_n не возрастает и стремится к 0 при $n\to\infty$; $g(m)$ — любой неприводимый примитивный целочисленный полином, не имеющий целых положительных корней. Тогда при $n>n_1$ для всех x (n_1 не зависит от x)

$$\nu_n\left\{\frac{F\left(|g(m)|\right)-A(n)}{B(n)}<x\right\}=G(x)+O\left\{\mu_n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln^2\frac{1}{\mu_n}+1\right)\right\}$$

равномерно относительно $n>n_1$ и x.

В качестве примеров рассмотрим следующие функции:

$\omega(m)$ — число различных простых делителей;

$\Omega(m)$ — число всех простых делителей m, причем кратные делители считаются столько раз, какова их кратность;

$\tau_k(m)$ — число представлений m в виде произведения k множителей, причем порядок множителей учитывается;

$\tau(m)=\tau_2(m)$ — число делителей m.

Теперь пусть $g(m)$ — любой неприводимый примитивный целочисленный полином, не имеющий целых положительных корней. Известно, что

1. для функций $\omega(m)$ и $\Omega(m)$

$$A(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta(p)}{p}=\ln\ln n+O(1),$$

$$B^2(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta(p)}{p}\sim\ln\ln n.$$

2. для функции $\log_k\tau_k(m)$

$$\tau_k(p^\alpha)=\binom{k+\alpha-1}{k-1},$$

$$A(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\log_k\tau_k(p)\,\vartheta(p)}{p}=\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta(p)}{p}=\ln\ln n+O(1),$$

$$B^2(n)\sim\ln\ln n.$$

Из теоремы 2 легко получаем:

$$\nu_n\left\{\frac{\omega\left(|g(m)|\right)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}<x\right\}=G(x)+O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}(\ln\ln\ln n)^2+1\right)\right\},$$

$$\nu_n\left\{\frac{\Omega\left(|g(m)|\right)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}<x\right\}=G(x)+O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}(\ln\ln\ln n)^2+1\right)\right\},$$

$$\nu_n\left\{\tau_k\left(|g(m)|\right)<k^{\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}}\right\}=G(x)+O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}(\ln\ln\ln n)^2+1\right)\right\}.$$

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
16. III. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Кубилюс. Об одном классе аддитивных арифметических функций, распределенных асимптотически по нормальному закону. Труды физ.-техн. ин-та АН Лит. ССР, **2**, 5—14, 1956.
2. И. П. Кубилюс. Некоторые исследования по вероятностной теории чисел, докторская диссертация. Ин-т физ и матем. АН Лит. ССР, 1956.
3. И. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Госполитнаучиздат Лит. ССР, Вильнюс, 1959.
4. А. А. Бухштаб. Об асимптотической оценке числа чисел арифметической прогресии, не делящихся на «относительно» малые простые числа. Матем. сб., **28**, 165—184, 1951.
5. Р. Уждавинис. О совместном распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Труды АН Лит. ССР, сер. Б, № 2(18), 9—29, 1959.
6. A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc., **49**, 122—136, 1941.
7. C. G. Essen. Fourier analysis of distribution funktions. Acta math., **77**, 1—125, 1945.

KAI KURIOS ADITYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ RIBINĖS TEOREMOS

R. UŽDAVINYS

(Reziumė)

Funkcija $f(m)$, definuota natūrinių skaičių aibėje, yra vadinama adityvine, jei kiekvienai reliatyviai pirminių skaičių porai m, n

$$f(mn)=f(m)+f(n).$$

Straipsnyje įrodomos dvi teoremos adityvinių aritmetinių funkcijų reikšmių pasiskirstymo klausimu, kai tų funkcijų argumentai prabėga polinomų su sveikais koeficientais reikšmes.

1 teorema. *Tegul $f(m)$ — reali adityvinė funkcija.*

$$D(n)\to\infty,\qquad \frac{1}{D(n)}\max_{p^{\alpha}\leqslant n}|f(p^{\alpha})|\leqslant\mu_n,$$

kai $n\to\infty$ (μ_n — nedidėjanti funkcija ir $\mu_n\to 0$, kai $n\to\infty$); $g(m)$ — pirminis polinomas su sveikais koeficientais be kartotinių šaknų; $N_n(x)$ — skaičius natūrinių skaičių $m\leqslant n$, patenkinančių nelygybę $f\left(|g(m)|\right)<A(n)+xD(n)$. Tada visiems $n>n_1$ ir x galioja pareinamybė

$$\frac{1}{n}N_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+O\left\{\mu_n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln^2\frac{1}{\mu_n}+1\right)\right\}.$$

Papildomojo nario įvertinimas yra tolygus $n>n_1$ ir x atžvilgiu (n_1 nepriklauso nuo x).

EINIGE GRENZWERTSÄTZE FÜR ADDITIVE ZAHLENTHEORETISCHE FUNKTIONEN

R. UŽDAVINYS

(Zusammenfassung)

Eine additive Funktion $F(m)$ ist durch die Eigenschaft

$$F(mn) = F(m) + F(n), \qquad (m, n) = 1,$$

definiert.

Es werden im gegebenen Artikel zwei Sätze über die Verteilung der Werte von Funktionen $F(m)$, deren Argumente die Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind, bewiesen.

Satz 1. Es sei $F(m)$ eine additive reelle Funktion, die den Bedingungen

$$\frac{1}{D(n)} \max_{p^\alpha \leqslant n} |F(p^\alpha)| \leqslant \mu_n, \qquad D(n) \to \infty,$$

unterworfen sind. μ_n ist nicht wachsende Funktion und $\mu_n \to 0$ für $n \to \infty$. Es sei ferner $N_n(x)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen m, $1 \leqslant m \leqslant n$, für die

$$F\Big(|g(m)|\Big) < A(n) + xD(n),$$

wo $g(m)$ ein irreduzibles Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und ohne ganze positive Nullstellen ist. Dann gilt

$$\frac{1}{n} N_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + O\left\{\mu_n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \ln^2 \frac{1}{\mu_n} + 1\right)\right\},$$

gleichmässig für alle $n > n_1$ und alle x (n_1 ist von x unabhängig).