II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1962

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В СЛУЧАЕ СХОДИМОСТИ К ЗАКОНУ ПУАССОНА

Б. ГРИГЕЛИОНИС

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с диффузионными процессами и законом Гаусса в применении на практике выводов теории вероятностей кардинальную роль играют пуассоновский процесс и закон Пуассона. Достаточно назвать такие области применения, как ядерная физика, теория надежности сложных систем, телефония. Практически, исходя из некоторых общих предположений и соображений, мы можем судить о структуре наблюдаемых нами случайных величин или процессов. Так как точное аналитическое их описание часто бывает либо очень сложно, либо вообще невозможно, приходится пользоваться теми или иными приближенными формулами. Возникает потребность уточнения предельных теорем. В случае приближения к закону Гаусса такие уточнения довольно широко разработаны. При весьма общих условиях получены асимптотические разложения функций распределения сумм независимых или слабо зависимых случайных слагаемых, а также для функций распределения функционалов от процесса накопления таких сумм. В случае же сходимости к закону Пуассона автору известен только один результат, принадлежащий Ю. В. Прохорову [1], об асимптотическом поведении биномиального распределения и некоторые оценки, полученные И. М. Шапиро [2]. Правда, некоторые соображения и подсчеты, использующие разложения в ряды Шарлье, приведены А. Н. Колмогоровым в [3].

В настоящей работе при довольно широких предположениях дается асимптотическое разложение функции распределения суммы независимых слагаемых в случае сходимости к закону Пуассона. Отсюда легко получается точная оценка быстроты сходимости в виде неравенств с точными константами. Метод доказательства дает возможность получить аналогичные результаты в случае сходимости к более широкому классу безгранично делимых законов.

Для того, чтобы была ясна идея дальнейших построений, приведем некоторые соображения общего характера. Как известно, в основе асимптотического разложения остаточного члена в случае сходимости к закону Гаусса лежит общая идея Чебышева о разложении любой функции $p(x)$ в ряд по функциям Чебышева – Эрмита

$$p(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right].$$

Ввиду того, что коэффициенты c_k оказываются вообще возрастающего вместе с k порядка малости, легко удается сгруппировать члены разложения по их порядку малости.

Однако, как оказалось, аналогичный подход в случае сходимости к другим законам не всегда плодотворен. Так, например, в случае сходимости к закону Пуассона, мы имеем вполне аналогичное чебышевскому разложение любой дискретной функции $p(m)$ в ряд Шарлье

$$p(m) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \Delta^{(k)} \left[e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \right],$$

где символ $\Delta^{(k)}$ означает k-ую конечную разность. За исключением отдельных случаев, такой подход не приводит к ожидаемому успеху, поскольку коэффициенты c_k, как правило, бывают примерно одного порядка малости. Иначе говоря, после разложения в ряд Шарлье трудно сгруппировать члены по их порядку малости.

Причина этих явлений, по-видимому, кроется в качественных различиях законов Гаусса и Пуассона: в первом случае все семиинварианты, начиная со второго, равны нулю, во втором же — все они одинаковы и отличны от нуля.

Наша идея сводится к тому, что всегда предпочтительнее исходить из удачным образом построенных разложений характеристических функций, а не из каких-то общих разложений самих законов распределения.

Продемонстрируем эти соображения на асимптотическом разложении остаточного члена в случае сходимости к закону Пуассона.

§ 2. КОНСТРУИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ $P_\nu(x, \lambda)$ и $P_{\mu\nu}(x, \lambda)$

Предварительно докажем две леммы, которые сами и детали их доказательств нам далее понадобятся.

Лемма 1.

$$\exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}(e^{it\nu}-1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP_\nu(x, \lambda) \qquad (\nu \neq 0),$$

где при $\nu = 1, 2, \ldots$

$$(1) \qquad P_\nu(x, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ -e^{-\lambda} \sum\limits_{0 \leq k < x} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } 0 < x \leq \nu, \\ -e^{-\lambda} \sum\limits_{x-\nu \leq k < x} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } x > \nu, \end{cases}$$

а при $\nu = -1, -2, \ldots$

$$(2) \qquad P_\nu(x, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \nu, \\ e^{-\lambda} \sum\limits_{0 \leq k < x-\nu} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } \nu < x \leq 0, \\ e^{-\lambda} \sum\limits_{x \leq k < x-\nu} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть при $\nu=1, 2, \ldots$

$$\Delta_\nu(k, \lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<0, \\ -e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } 0\leqslant k<\nu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } k\geqslant 0, \end{cases}$$

а при $\nu=-1, -2, \ldots$

$$\Delta_\nu(k, \lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<\nu, \\ e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!} & \text{при } \nu\leqslant k<0, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } k\geqslant 0. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что

$$P_\nu(x, \lambda)=\sum_{k<x}\Delta_\nu(k, \lambda).$$

Далее, при $\nu=1, 2, \ldots$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dP_\nu(x, \lambda)=\sum_k \Delta_\nu(k, \lambda)\,e^{itk}=-\sum_{k=0}^{\nu-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{itk}+$$

$$+e^{-\lambda}\sum_{k=\nu}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-e^{-\lambda}\sum_{k=\nu}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}=(e^{it\nu}-1)\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{itk}=$$

$$=\exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}(e^{it\nu}-1).$$

Аналогично проверяется утверждение леммы и при $\nu=-1, -2, \ldots$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2.

$$\exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}(e^{it\mu}-1)(e^{it\nu}-1)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dP_{\mu\nu}(x, \lambda)\ (\mu, \nu=\pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где в случае, когда $\mu>\nu$, *имеем:*

1) $0<\nu<\mu$

$$P_{\mu\nu}(x, \lambda)=\begin{cases} 0 & \textit{при } x\leqslant 0, \\ e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{0\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!} & \textit{при } 0<x\leqslant\nu, \\ e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{x-\nu\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!} & \textit{при } \nu<x\leqslant\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\displaystyle\sum_{x-\nu\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum_{0\leqslant k<x-\mu}\frac{\lambda^k}{k!}\right) & \textit{при } \mu<x\leqslant\nu+\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\displaystyle\sum_{x-\nu\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum_{x-\mu-\nu\leqslant k<x-\mu}\frac{\lambda^k}{k!}\right) & \textit{при } x>\mu+\nu; \end{cases} \tag{3}$$

2) $\nu<\mu<0$

$$
(4) \qquad P_{\mu\nu}(x,\ \lambda)=\begin{cases}
0 & \text{при} \quad x\leqslant\mu+\nu,\\
e^{-\lambda}\sum\limits_{0\leqslant k<x-\mu-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad \mu+\nu<x\leqslant\nu,\\
e^{-\lambda}\sum\limits_{x-\nu\leqslant k<x-\mu-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad \nu<x\leqslant\mu,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\nu\leqslant k<x-\mu-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{0\leqslant k<x-\mu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad \mu<x\leqslant 0,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\nu\leqslant k<x-\mu-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x\leqslant k<x-\mu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad x>0;
\end{cases}
$$

3) $\nu<0,\ \mu>0$

a) $\mu>|\nu|$

$$
(5) \qquad P_{\mu\nu}(x,\ \mu)=\begin{cases}
0 & \text{при} \quad x\leqslant\nu,\\
-e^{-\lambda}\sum\limits_{0\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad \nu<x\leqslant 0,\\
-e^{-\lambda}\sum\limits_{x\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad 0<x\leqslant\mu+\nu,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{0\leqslant k<x-\mu-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad \mu+\nu<x\leqslant\mu,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x-\mu-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad x>\mu;
\end{cases}
$$

b) $\mu=|\nu|$

$$
(6) \qquad P_{\mu\nu}(x,\ \lambda)=\begin{cases}
0 & \text{при} \quad x\leqslant\nu,\\
-e^{-\lambda}\sum\limits_{0\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad \nu<x\leqslant 0,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{0\leqslant k<x}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad 0<x\leqslant\mu,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad x>\mu;
\end{cases}
$$

c) $\mu<|\nu|$

$$
(7) \qquad P_{\mu\nu}(x,\ \lambda)=\begin{cases}
0 & \text{при} \quad x\leqslant\nu,\\
-e^{-\lambda}\sum\limits_{0\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad \nu<x\leqslant\mu+\nu,\\
-e^{-\lambda}\sum\limits_{x-\mu-\nu\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при} \quad \mu+\nu<x\leqslant 0,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{0\leqslant k<x}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x-\mu-\nu\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad 0<x\leqslant\mu,\\
e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x}\dfrac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x-\mu-\nu\leqslant k<x-\nu}\dfrac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при} \quad x>\mu;
\end{cases}
$$

В случае, когда $\mu=\nu$, *имеем при* $\mu>0$

$$(8)\qquad P_{\mu\mu}(x,\lambda)=\begin{cases} 0 & \textit{при}\quad x\leqslant 0,\\ e^{-\lambda}\sum\limits_{0\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!} & \textit{при}\quad 0<x\leqslant\mu,\\ e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{0\leqslant k<x-\mu}\frac{\lambda^k}{k!}\Big) & \textit{при}\quad \mu<x\leqslant 2\mu,\\ e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x-2\mu\leqslant k<x-\mu}\frac{\lambda^k}{k!}\Big) & \textit{при}\quad x>2\mu,\end{cases}$$

а при $\mu<0$

$$(9)\qquad P_{\mu\mu}(x,\lambda)=\begin{cases} 0 & \textit{при}\quad x\leqslant 2\mu,\\ e^{-\lambda}\sum\limits_{0\leqslant k<x-2\mu}\frac{\lambda^k}{k!} & \textit{при}\quad 2\mu<x\leqslant\mu,\\ e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x-2\mu}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{0\leqslant k<x-\mu}\frac{\lambda^k}{k!}\Big) & \textit{при}\quad \mu<x\leqslant 0,\\ e^{-\lambda}\Big(\sum\limits_{x-\mu\leqslant k<x-2\mu}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{x\leqslant k<x-\mu}\frac{\lambda^k}{k!}\Big) & \textit{при}\quad x>0;\end{cases}$$

в случае, когда $\mu<\nu$, *имеем*

$$P_{\mu\nu}(x,\lambda)=P_{\nu\mu}(x,\lambda).$$

Доказательство. Лемма 2 проверяется совершенно аналогично лемме 1, если заметить, что

$$P_{\mu\nu}(x,\lambda)=\sum_{k<x}\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda),$$

где в случае, когда $\mu>\nu$, положено:

1) $0<\nu<\mu$

$$\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad k<0,\\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} & \text{при}\quad 0\leqslant k<\nu,\\ e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}\Big) & \text{при}\quad \nu\leqslant k<\mu,\\ e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}\Big) & \text{при}\quad \mu\leqslant k<\mu+\nu,\\ e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}+\frac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}\Big) & \text{при}\quad k\geqslant\mu+\nu;\end{cases}$$

2) $\nu<\mu<0$

$$\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad k<\mu+\nu,\\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!} & \text{при}\quad \mu+\nu\leqslant k<\nu,\\ e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}\Big) & \text{при}\quad \nu\leqslant k<\mu,\\ e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}\Big) & \text{при}\quad \mu\leqslant k<0,\\ e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\frac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}+\frac{\lambda^k}{k!}\Big) & \text{при}\quad k\geqslant 0;\end{cases}$$

3) $\nu<0,\ \mu>0$

a) $\mu>|\nu|$

$$\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<\nu, \\ -e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!} & \text{при } \nu\leqslant k<0, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^k}{k!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}\right) & \text{при } 0\leqslant k<\mu+\nu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}+\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } \mu+\nu\leqslant k<\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}+\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } k\geqslant\mu; \end{cases}$$

b) $\mu=|\nu|$

$$\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<\nu, \\ -e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!} & \text{при } \nu\leqslant k<0, \\ e^{-\lambda}\left(2\dfrac{\lambda^k}{k!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}\right) & \text{при } 0\leqslant k<\mu, \\ e^{-\lambda}\left(2\dfrac{\lambda^k}{k!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}\right) & \text{при } k\geqslant\mu; \end{cases}$$

c) $\mu<|\nu|$

$$\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<\nu, \\ -e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!} & \text{при } \nu\leqslant k<\mu+\nu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}\right) & \text{при } \mu+\nu\leqslant k<0, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}+\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } 0\leqslant k<\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-\mu-\nu}}{(k-\mu-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}+\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } k\geqslant\mu; \end{cases}$$

в случае $\mu=\nu$ положено при $\mu>0$

$$\Delta_{\mu\mu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<0, \\ e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } 0\leqslant k<\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^k}{k!}-2\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}\right) & \text{при } \mu\leqslant k<2\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^k}{k!}-2\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}+\dfrac{\lambda^{k-2\mu}}{(k-2\mu)!}\right) & \text{при } k\geqslant 2\mu, \end{cases}$$

а при $\mu<0$

$$\Delta_{\mu\mu}(k,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<2\mu, \\ e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-2\mu}}{(k-2\mu)!} & \text{при } 2\mu\leqslant k<\mu, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-2\mu}}{(k-2\mu)!}-2\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}\right) & \text{при } \mu\leqslant k<0, \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^{k-2\mu}}{(k-2\mu)!}-2\dfrac{\lambda^{k-\mu}}{(k-\mu)!}+\dfrac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{при } k\geqslant 0; \end{cases}$$

в случае $\mu<\nu$ положено

$$\Delta_{\mu\nu}(k,\lambda)=\Delta_{\nu\mu}(k,\lambda).$$

Замечание. При доказательстве леммы 2 можно также пользоваться следующим простым соотношением:

$$P_{\mu\nu}(x,\ \lambda)=P_{\mu+\nu}(x,\ \lambda)-P_{\mu}(x,\ \lambda)-P_{\nu}(x,\ \lambda),$$

где положено $P_0(x,\ \lambda)\equiv 0$. Это соотношение сразу следует из определения функций $P_\nu(x,\lambda)$ и $P_{\mu\nu}(x,\lambda)$. Очевидно также, что $P_\nu(x,\lambda)=P(x-\nu,\lambda)-P(x,\lambda)$.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Пусть имеем последовательность $\{\zeta_n\}$ случайных величин таких, что

$$\zeta_n=\sum_{r=1}^{k_n}\zeta_{nr},$$

где случайные величины ξ_{nr} принимают только целочисленные значения и при каждом n независимы между собой. Пусть

$$F_n(x)=\mathrm{P}\{\zeta_n<x\},$$

$$P(x,\ \lambda)=\sum_{0\leqslant k<x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

$$p_{nr}(\nu)=\mathrm{P}\{\xi_{nr}=\nu\},$$

$$P_n(\nu)=\mathrm{P}\{\zeta_n=\nu\},\qquad \pm\nu=0,\ 1,\ \ldots .$$

Требуем, чтобы:

(10) 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant r\leqslant k_n}\left(1-p_{nr}(0)\right)=0$ (бесконечная малость ξ_{nr});

2) $F_n(x)$ слабо сходится к $P(x,\ \lambda)$, т. е.

(11) α) $\lambda_n=\sum\limits_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)\to\lambda\qquad (n\to\infty)$,

(12) β) $b_n=\sum\limits_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)\to 0\qquad (n\to\infty)$;

(13) 3) $\mathrm{M}\,|\xi_{nr}|<\infty\qquad (r=1,\ \ldots,\ k_n)$;

4) существует не зависящая от n константа K такая, что

(14) $$d_n=\sum_{r=1}^{k_n}\mathrm{M}\ln|\hat{\xi}_{nr}|\leqslant K,$$

где

$$\hat{\xi}_{nr}=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \xi_{nr}=0,\\ \xi_{nr} & \text{при}\quad \xi_{nr}\neq 0.\end{cases}$$

В силу 1), 2) и 3) предположение 4) мало ограничительно. В довольно общей ситуации даже $d_n=O(b_n)$. Однако 4) не является следствием предыдущих требований, в чем легко убедиться из следующего примера.

Пусть

$$\xi_{nr}=\begin{cases}0 & \text{с вероятностью}\quad 1-\frac{\lambda}{n}-\frac{1}{n^3},\\ 1 & \quad\text{"}\qquad\qquad \frac{\lambda}{n}\\ n^n & \quad\text{"}\qquad\qquad \frac{1}{n^3}\end{cases}\qquad (r=1,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$d_n = n\cdot\frac{1}{n^2}\ln n^n = \ln n.$$

Теорема 1. *Если условия* 1) – 4) *выполнены, то существует не зависящая от n константа C такая, что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-P_n(x)\right| \leqslant C\left[a_n^2+b_n^2+c_n\right],$$

где обозначено:

$$P_n(x)=P(x,\ \lambda_n)+a_nP_{11}(x,\ \lambda_n)+\sum_{\nu\neq 0,\,1}\left[c_\nu(n)P_\nu(x,\ \lambda_n)+c_{1\nu}(n)P_{1\nu}(x,\ \lambda_n)\right],$$

$$a_n=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}^2(1),\quad c_\nu(n)=\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(\nu),$$

$$c_{1\nu}(n)=-\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)p_{nr}(\nu),$$

$$c_n=\sum_{r=1}^{k_n}\left[p_{nr}^2(1)+p_{nr}(1)\Big(1-p_{nr}(0)\Big)\Big(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\Big)\right].$$

Доказательство. Воспользуемся известной теоремой Эссеена (см. [4], стр. 214, а также [5]).

С этой целью строим разложение характеристической функции случайной величины ζ_n.

Пусть

$$\varphi_{nr}(t)=\mathrm{M}\,e^{it\xi_{nr}},\quad \varphi_n(t)=\mathrm{M}\,e^{it\xi_n}.$$

Тогда в силу (10) – (12) верно следующее разложение:

$$\varphi_{nr}(t)=\sum_\nu p_{nr}(\nu)\,e^{it\nu}=\exp\left\{\ln\Big(1+\sum_{\nu\neq 0}p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)\Big)\right\}=$$

$$=\exp\Big\{p_{nr}(1)(e^{it}-1)+\sum_{\nu\neq 0,\,1}p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)-\frac{1}{2}p_{nr}^2(1)(e^{it}-1)^2-$$

(16)
$$-\sum_{\nu\neq 0,\,1}p_{nr}(1)p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)(e^{it}-1)-\frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\neq 0,\,1}p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)\Big)^2+$$

$$+O\Big(\Big[p_{nr}^2(1)+p_{nr}(1)\Big(1-p_{nr}(0)\Big)\Big(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\Big)\Big]|e^{it}-1|+$$

$$+\Big[1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\Big]^2\sum_{\nu\neq 0,\,1}p_{nr}(\nu)|e^{it\nu}-1|\Big)\Big\}.$$

Введем обозначения:

$$h_n=\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(1)\Big(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\Big),$$

$$h_\nu(n)=\sum_{r=1}^{k_n}p_{nr}(\nu)\Big(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\Big)^2,$$

$$\hat{\varphi}_n(t) = \exp\left\{\lambda_n(e^{it}-1)\right\}\left\{\left(1+a_n(e^{it}-1)^2\right) + \sum_{\nu\neq 0,1}\left[c_\nu(n)+c_{1\nu}(n)(e^{it}-1)\right](e^{it\nu}-1) + \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu\neq 0,1} c_\nu(n)(e^{it\nu}-1)\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\left(\sum_{\nu\neq 0,1} p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)\right)^2\right\}. \tag{17}$$

Тогда из (15), (16) и (17) получаем, что

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{\lambda_n(e^{it}-1) + a_n(e^{it}-1)^2 + \sum_{\nu\neq 0,1}\left[c_\nu(n) + c_{1\nu}(n)(e^{it}-1)\right](e^{it\nu}-1) - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\left(\sum_{\nu\neq 0,1} p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)\right)^2 + O\left(c_n|e^{it}-1| + \sum_{\nu\neq 0,1} h_\nu(n)|e^{it\nu}-1|\right)\right\} =$$

$$= \hat{\varphi}_n(t) + O\left[\left(a_n^2+c_n+h_n^2\right)|e^{it}-1| + \left(\sum_{\nu\neq 0,1} c_\nu(n)|e^{it\nu}-1|\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{k_n}\left(\sum_{\nu\neq 0,1} p_{nr}(\nu)|e^{it\nu}-1|\right)^2\right)^2\right] =$$

$$= \hat{\varphi}_n(t) + O\left(\left(a_n^2+c_n+h_n^2\right)|e^{it}-1| + b_n^2\sum_{\nu\neq 0,1} c_\nu(n)|e^{it\nu}-1|\right).$$

Итак, имеем

$$\left|\varphi_n(t)-\hat{\varphi}_n(t)\right| \leqslant C_1\left[\left(a_n^2+c_n+h_n^2\right)|e^{it}-1| + b_n^2\sum_{\nu\neq 0,1} c_\nu(n)|e^{it\nu}-1|\right], \tag{18}$$

где C_1 — некоторая не зависящая от n константа. Обозначив

$$c_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{2}c_\mu(n)c_\nu(n)$$

и

$$d_{\mu\nu}(n) = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(\mu)p_{nr}(\nu),$$

находим, что

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu\neq 0,1} c_\nu(n)(e^{it\nu}-1)\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\left(\sum_{\nu\neq 0,1} p_{nr}(\nu)(e^{it\nu}-1)\right)^2 =$$

$$= \sum_{\mu,\nu\neq 0,1}\frac{1}{2}c_\mu(n)c_\nu(n)(e^{it\mu}-1)(e^{it\nu}-1) - \sum_{\mu,\nu\neq 0,1}\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(\mu)p_{nr}(\nu)(e^{it\mu}-1)(e^{it\nu}-1) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu\neq 0,}\left[c_{\mu\nu}(n)+d_{\mu\nu}(n)\right](e^{it\mu}-1)(e^{it\nu}-1)$$

и

$$\hat{\varphi}_n(t)=\exp\left\{\lambda_n(e^{it}-1)\right\}\Big(1+a_n(e^{it}-1)^2+$$
$$+\sum_{\nu\neq 0,1}\left[c_\nu(n)+c_{1\nu}(n)(e^{it}-1)\right](e^{it\nu}-1)+$$
$$+\sum_{\mu,\nu\neq 0,1}\left[c_{\mu\nu}(n)+d_{\mu\nu}(n)\right](e^{it\mu}-1)(e^{it\nu}-1)\Big).$$

Если обозначить

$$\hat{P}_n(x,\lambda)=P(x,\lambda)+a_nP_{11}(x,\lambda)+\sum_{\nu\neq 0,1}\left[c_\nu(n)P_\nu(x,\lambda)+c_{1\nu}(n)P_{1\nu}(x,\lambda)\right]+$$
$$+\sum_{\mu,\nu\neq 0,1}\left[c_{\mu\nu}(n)+d_{\mu\nu}(n)\right]P_{\mu\nu}(x,\lambda),$$

то из наших лемм следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\hat{P}_n(x,\lambda_n)=\hat{\varphi}_n(t).$$

В указанной теореме Эссеена полагаем:

$$F(x)\equiv F_n(x),\quad G(x)\equiv\hat{P}_n(x,\lambda_n),\quad l=1.$$

Из выражений (1)–(9) видим, что

$$F_n(-\infty)=\hat{P}_n(-\infty,\lambda_n)=0 \quad\text{и}\quad F_n(+\infty)=\hat{P}_n(+\infty,\lambda_n)=1.$$

Выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_n(x)-\hat{P}_n(x,\lambda_n)\right|dx<\infty$$

следует также из (1)–(9) и предположения, что $\mathrm{M}|\zeta_n|<\infty$. Так как за исключением $\pm x=0,1,\ldots$ $\hat{P}'_n(x,\lambda_n)\equiv 0$, то за константу A можем брать любую положительную величину. Положим $A=\varepsilon T$, а за T берем некоторую абсолютную константу, которую потом уточним.

Из (18) имеем, что

$$\varepsilon=\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_n(t)-\hat{\varphi}_n(t)}{t}\right|dt\leqslant C_1\left[a_n^2+c_n+h_n^2\right]\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{it}-1}{t}\right|dt+$$
$$+C_1b_n^2\sum_{\nu\neq 0,1}c_\nu(n)\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{it\nu}-1}{t}\right|dt.$$

Интегрирование почленно законно, поскольку $\mathrm{M}|\zeta_n|<\infty$ и при $|\nu|\neq 0,1$

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{it\nu}-1}{t}\right|dt=\int_{-T|\nu|}^{T|\nu|}\left|\frac{e^{it}-1}{t}\right|dt\leqslant C_2\ln|\nu|,$$

где C_2 — некоторая константа, зависящая только от T. Если

$$C_3=C_1\max\left(\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{it}-1}{t}\right|dt,\ C_2\right),$$

то

(19) $$\varepsilon \leqslant C_3\left[a_n^2+c_n+h_n^2+b_n^2 d_n\right].$$

По упомянутой теореме Эссеена каждому числу $k>1$ соответствуют два конечных числа $c_1(k)$ и $c_2(k)$, зависящих только от k и таких, что

(20) $$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-\hat{P}_n(x,\lambda_n)\right| \leqslant \varepsilon\left(\frac{k}{2\pi}+c_1(k)\right),$$

как только $T \geqslant c_2(k)$.

Фиксируя k, выбрав $T=c_2(k)$, из (19) и (20) получаем, что

(21) $$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-\hat{P}_n(x,\lambda_n)\right| \leqslant C_4\left[a_n^2+c_n+b_n^2 d_n+h_n^2\right],$$

где

$$C_4=C_3\left(\frac{k}{2\pi}+c_1(k)\right).$$

В случае, когда $d_n=o(1)$, оценка (21) точнее той, которая указана в теореме. Как легко видеть из (3)–(9),

$$\left|P_{\mu\nu}(x,\lambda)\right| \leqslant 1$$

равномерно по μ, ν, x и λ. В силу этого

$$\left|\sum_{\mu,\nu\neq 0,1}\left[c_{\mu\nu}(n)+d_{\mu\nu}(n)\right]P_{\mu\nu}(x,\lambda_n)\right| \leqslant \sum_{\mu,\nu\neq 0,1}\left[c_{\mu\nu}(n)+d_{\mu\nu}(n)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\neq 0,1} c_\nu(n)\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\Big(\sum_{\nu\neq 0,1} p_{nr}(\nu)\Big)^2=$$
$$=\frac{1}{2}b_n^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(0)-p_{nr}(1)\right)^2 \leqslant b_n^2.$$

Из (21) и (22) тогда получаем, что

(23) $$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-P_n(x)\right| \leqslant C_4\left[a_n^2+b_n d_n+c_n+h_n^2\right]+b_n^2.$$

Поскольку $h_n \leqslant b_n$ и в силу (13) $d_n \leqslant K$, обозначив $C=C_4(1+K)+1$, из (23) получим:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-P_n(x)\right| \leqslant C\left[a_n^2+b_n^2+c_n\right].$$

Теорема 2. *Существует не зависящая от n константа C такая, что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-\tilde{P}_n(x)\right| \leqslant C\left[a_n+b_n^2+c_n+(\lambda_n-\lambda)^2\right],$$

где

$$\tilde{P}_n(x)=P(x,\lambda)+(\lambda_n-\lambda)P_1(x,\lambda)+a_nP_{11}(x,\lambda)+$$
$$+\sum_{\nu\neq 0,1}\left[c_\nu(n)P_\nu(x,\lambda)+c_{1\nu}(n)P_{1\nu}(x,\lambda)\right].$$

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично теореме 1 с очевидными изменениями.

Замечание 1. Аналогичными подсчетами могут быть построены дальнейшие члены разложения. Ввиду громоздкости выражений, мы их здесь не приводим.

Замечание 2. Как видно из самого доказательства теоремы 1, аналогичные разложения можем построить в случае сходимости к безгранично делимому закону с пуассоновским спектром, расположенным в целочисленных точках, и конечным математическим ожиданием.

§ 4. ВЫВОДЫ

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Существует не зависящая от n константа C такая, что*

$$\Big|P_n(k)-\Delta(k,\lambda_n)-a_n\Delta_{11}(k,\lambda_n)-\sum_{\nu\neq 0,1}\Big[c_\nu(n)\Delta_\nu(k,\lambda_n)+$$
$$+c_{1\nu}(n)\Delta_{1\nu}(k,\lambda_n)\Big]\Big|\leqslant C\Big[a_n^2+b_n^2+c_n\Big]$$

равномерно по k, где

$$\Delta(k,\lambda)=\begin{cases}0 & \text{при } k<0,\\ e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{при } k\geqslant 0.\end{cases}$$

Далее также легко из теоремы 1 следует

Теорема 3.

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|F_n(x)-P(x,\lambda_n)\Big|\leqslant C_0\Big[|a_n|+b_n\Big]\Big(1+o(1)\Big), \tag{24}$$

где константа $C_0=1$ и в общем случае не улучшима.

Доказательство. Из (1)–(9) видно, что

$$1\geqslant\max_{-\infty<x<\infty}\Big|P_\nu(x,\lambda)\Big|\geqslant e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{|\nu|-1}\frac{\lambda^k}{k!},$$

$$\max_{-\infty<x<\infty}\Big|P_{1\nu}(x,\lambda)\Big|\leqslant 1.$$

Тогда

$$\sup_\nu\max_{-\infty<x<\infty}\Big|P_\nu(x,\lambda_n)\Big|=1.$$

Теорема 3 сразу следует из теоремы 1, поскольку

$$\sum_{\nu\neq 0,1}c_\nu(n)=b_n,\quad\text{а}\quad\sum_{\nu\neq 0,1}c_{1\nu}(n)=o(b_n).$$

Константа C_0, как легко сообразить, может быть достигнута асимптотически, т. е. для любой константы $C<1$ можно построить такую величину ζ_n, что (24) будет неверно после замены там C_0 на C.

Пусть, далее, величины $\xi_{nr}(r=1,\ldots,n)$ распределены одинаково. В этом случае обозначим

$$p_n(\nu)=\mathbf{P}\{\xi_{nr}=\nu\}.$$

Тогда условия (11)–(12) имеют вид:

$$\alpha)\quad \lambda_n=np_n(1)\to\lambda\qquad(n\to\infty),$$

$$\beta)\quad n\Big(1-p_n(0)-p_n(1)\Big)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Отсюда и из (15) находим, что

$$a_n^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{и} \quad c_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *В случае одинаково распределенных слагаемых существует не зависящая от n константа C такая, что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|F_n(x)-P(x,\ \lambda_n)+\frac{n}{2}p_n^2(1)P_{11}(x,\ \lambda_n)-$$

$$-n\sum_{\nu\neq 0,1}\Big[p_n(\nu)P_\nu(x,\ \lambda_n)-p_n(1)p_n(\nu)P_{1\nu}(x,\ \lambda_n)\Big]\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C\left[\frac{1}{n^2}+\Big(n\big(1-p_n(0)-p_n(1)\big)\Big)^2\right].$$

Пример: В случае схемы Бернулли имеем:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|F_n(x)-P\big(x,\ np_n(1)\big)+\frac{n}{2}p_n^2(1)P_{11}\big(x,\ np_n(1)\big)\Big|\leqslant\frac{C}{n^2}.$$

Это является уточнением оценки Ю. В. Прохорова [1] в случае, когда $np \to \lambda$.

В заключение хочу выразить свою искреннюю признательность Б. В. Гнеденко за внимание к настоящей работе, а также П. Франкену за некоторые полезные замечания.

Вильнюсский гос. университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
23. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ю. Прохоров, Асимптотическое поведение биноминального распределения, УМН, 8, 3 (1953), 135–142.
2. J. M. Shapiro, Error estimates for certain probability theorems, Ann. of Math. Stat., 26, 4 (1955), 617–630.
3. А. Н. Колмогоров, Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы, Сборник статей по теории стрельбы 1, Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова, 12, (1945), 7–25.
4. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.–Л., 1949.
5. C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussianlaw, Acta Math., 77 (1945), 1–125.

APIE LIEKAMOJO NARIO ASIMPTOTINĮ IŠDĖSTYMĄ KONVERGENCIJOS Į PUASONO DĖSNĮ ATVEJŲ

B. GRIGELIONIS

(Reziumė)

Tegu

$$\zeta_n = \sum_{r=1}^{k_n} \xi_{nr},$$

kur ξ_{nr} — nepriklausomi be galo maži įgyjantieji tik sveikas reikšmes atsitiktiniai dydžiai su baigtiniais pirmais momentais. Tegu

$$F_n(x) = \mathrm{P}\{\zeta_n < x\}$$

konverguoja į Puasono dėsnį, kai $n \to \infty$. Darbe duodamas liekamojo nario asimptotinis išdėstymas.

ON AN ASYMPTOTIC DECOMPOSITION OF THE REMAIND TERM IN THE CASE OF CONVERGENCE TO THE POISSON LAW

B. GRIGELIONIS

(Summary)

Let

$$\zeta_n = \sum_{r=1}^{k_n} \xi_{nr},$$

where ξ_{nr} are independent intesimal integer-valued stochastic variables with finite first moments.

Let

$$F_n(x) = \mathrm{P}\{\zeta_n < x\}$$

converges to the Poisson law, when $n \to \infty$. In the paper an asymptotic decomposition of the remaind term is given.