II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. П. КУБИЛЮС

1. Известно [1], что для весьма обширного класса аддитивных арифметических функций $f(m)$ при соответствующим образом подобранных $A(n)$ и $B(n)$ частота целых положительных $m \leqslant n$, для которых $f(m) < A(m) + B(n)x$, стремится к некоторой функции распределения, когда n неограниченно возрастает. Естественно возникает вопрос об оценке быстроты сходимости к предельному закону. Первый результат такого рода принадлежит В. Левеку. Пусть $\omega(m)$ обозначает число различных простых делителей m, а $\nu_n(x)$ — частоту тех $m \leqslant n$, для которых $\omega(m) < \ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}$,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

В. Левек [2] в 1948 г. доказал, что

$$\nu_n(x) = G(x) + \rho_n(x),$$

где

$$\rho_n(x) = O\left(\frac{\ln\ln\ln n}{\sqrt[4]{\ln\ln n}}\right)$$

равномерно по n и x, и на основе аналогии с теорией суммирования независимых случайных величин высказал предположение, что имеет место оценка

$$\rho_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\right).$$

Автору настоящей работы в 1954 г. [3] удалось улучшить результат В. Левека, доказав, что

$$\rho_n(x) = O\left(\frac{(\ln\ln\ln n)^2}{\sqrt{\ln\ln n}}\right),$$

а затем в 1956 г. [4] получить для некоторого более широкого класса еще более точную оценку, которая в случае функции $\omega(m)$ имеет вид

$$\rho_n(x) = O\left\{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-x^2/_4}(\ln\ln\ln n)^2 + 1\right)\right\}.$$

Эта оценка лишь при $|x| < 2\sqrt{\ln\ln\ln\ln n}$ на множитель $e^{-x^2/2}(\ln\ln\ln n)^2$ отличалась от предложенной В. Левеком. М. Б. Барбану [5] и Р. В. Уждавинису [6], уточнив метод автора, удалось эту оценку еще улучшить.

М. Б. Барбан показал, что $(\ln\ln n)^2$ можно заменить на $\ln\ln n \cdot \ln\ln\ln n$, а Р. В. Уждавинис — на $\ln\ln n$.

Гипотеза В. Левека была доказана А. Реньи и П. Турадном в 1957 г. [7]. Г. Делянж [8] и независимо от него автор настоящей статьи в неопубликованной работе получили для $\rho_n(x)$ следующую асимптотическую формулу

$$\rho_n(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi \ln\ln n}} \left\{ a - \frac{x^2}{6} - \Big((\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n})\Big) \right\} + O\left(\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right),$$

где $\Big((u)\Big)$ означает дробную часть u; $a = 0{,}40516\ldots$

В настоящей работе мы находим дальнейшие члены асимптотического разложения для $\rho_n(x)$. Метод работы применим и для более широкого класса аддитивных арифметических функций $f(m)$, удовлетворяющих условию $f(p) = \text{const.}$ для всех простых p (или для всех, за исключением небольшого числа, p), если $f(p^\alpha)$ не слишком большие.

2. В дальнейшем c, c_1, c_2, c_3, c_4 означают абсолютные положительные постоянные; s — любое фиксированное целое положительное число; m и n — целые положительные числа, $n > c$, где c — достаточно большое; p — простое число; x — вещественное число. B — величина, ограниченная константой, зависящей лишь от s, не всегда одна и та же.

Нам понадобится следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{m=1}^{n} z^{\omega(m)} = n\,\varphi(z) \ln^{z-1} n + Bn (\ln n)^{\operatorname{Re} z - 2}, \tag{1}$$

справедливая для комплексных z, $|z| \leqslant c_1$, где c_1 — любая абсолютная постоянная. Здесь

$$\varphi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^z$$

— целая функция от z, $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Доказательство этой формулы можно найти в [9, 10].

Функция

$$R_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{z\omega(m)}$$

является, очевидно, целой, причем согласно (1)

$$R_n(z) = \varphi(e^z)\,(\ln n)^{e^z - 1} + B(\ln n)^{\operatorname{Re} e^z - 2}$$

в области $\operatorname{Re} z \leqslant c_2$. Функция $\varphi(e^z)$ — тоже целая с нулями в точках

$$\ln k + (2l+1)\pi i \quad (k = 1, 2, \ldots;\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поэтому при $\operatorname{Re} z \leqslant c_2$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant c_3 < \pi$ функция

$$F(z) = \ln \varphi(e^z) = \sum_p \left\{ e^z \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \ln\left(1 + \frac{e^z}{p-1}\right) \right\} - \ln \Gamma(e^z)$$

является аналитической, причем имеет место оценка

$$F(z) = B. \tag{2}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} z \leqslant c_3$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant c_3$

$$R_n(z) = e^{H_n(z)}\left(1 + \frac{B}{\ln n}\right),$$

где

$$H_n(z) = (e^z - 1)\ln\ln n + F(z). \tag{3}$$

Кроме того, функция

$$\Phi_n(z) = \ln R_n(z) = H_n(z) + \frac{B}{\ln n} \tag{4}$$

аналитична для указанных z.

По формуле Коши имеем, что в области $|z| \leqslant 1$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|w|=2} \frac{F(w)\,dw}{(w-z)^{k+1}},$$

$$\Phi_n^{(k)}(z) - H_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|w|=2} \frac{\Phi_n(w) - H_n(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw.$$

Отсюда согласно (2) и (4) при $|z| \leqslant 1$

$$F^{(k)}(z) = Bk!, \tag{5}$$

$$\Phi_n^{(k)}(z) - H_n^{(k)}(z) = \frac{Bk!}{\ln n}. \tag{6}$$

Разложим функцию $F(z)$ в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!}, \tag{7}$$

сходящийся при $|z| < \pi$. Согласно (5)

$$|a_k| \leqslant c_4 k! \tag{8}$$

Пользуясь известными равенствами

$$\left(\ln \Gamma(z)\right)'_{z=1} = -\gamma,$$

$$\left(\ln \Gamma(z)\right)^{(k)}_{z=1} = (-1)^{k+1} k! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

где γ — постоянная Эйлера, легко подсчитать, что

$$a_1 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right\} + \gamma,$$

$$a_2 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right\} + \gamma - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

$$a_3 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right\} + \gamma - 3\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3},$$

$$a_4 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{7}{p^2} + \frac{12}{p^3} - \frac{6}{p^4} \right\} + 2\gamma -$$

$$-7\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + 12\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} - 6\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}.$$

Положим $\sigma = \sqrt{\ln\ln n}$ и обозначим через $P_k(z)$ полиномы, определяемые разложением

$$\exp\left\{ H_n\left(\frac{z}{\sigma}\right) - z\sigma - \frac{1}{2}z^2 \right\} = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!\,\sigma^k}\left(\frac{z^2}{(k+1)\,(k+2)} + a_k\right) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(z)}{\sigma^k}.$$

Легко подсчитать, что степень полинома $P_k(z)$ равна $3k$ и что

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_1(z) = z\left(\frac{z^2}{6} + a_1\right),$$

$$P_2(z) = \frac{z^2}{2}\left\{ \left(\frac{z^2}{6} + a_1\right)^2 + \frac{z^2}{12} + a_2 \right\},$$

$$P_3(z) = \frac{z^3}{6}\left\{ \left(\frac{z^2}{6} + a_1\right)^3 + 3\left(\frac{z^2}{6} + a_1\right)\left(\frac{z^2}{12} + a_2\right) + \frac{z^2}{20} + a_3 \right\},$$

$$P_4(z) = \frac{z^4}{24}\left\{ \left(\frac{z^2}{6} + a_1\right)^4 + 6\left(\frac{z^2}{6} + a_1\right)^2\left(\frac{z^2}{12} + a_2\right) + \right.$$

$$\left. + 4\left(\frac{z^2}{6} + a_1\right)\left(\frac{z^2}{20} + a_3\right) + 3\left(\frac{z^2}{12} + a^2\right)^2 + \frac{z^2}{30} + a_4 \right\}.$$

Положим еще

$$Q_k(z) = \sum_{l=0}^{k} \frac{P_l(z)}{\sigma^l} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

3. Лемма 1. *Пусть*

$$\psi_n(t) = R_n\left(\frac{it}{\sigma}\right) e^{-it\sigma}.$$

Для вещественных t, $|t| \leqslant \frac{\sigma}{8s}$

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}\, Q_s(it) + B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{s+1} (c_4 + t^2)^{s+1}\, e^{-\frac{1}{4}t^2} + \frac{B\,|t|}{\sigma\ln n}$$

равномерно по $n > c$ *и* t.

Доказательство. Имеем согласно (3), (4), (6) и (7), что при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$

$$\Phi_n(z) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\left(\Phi_n^{(k)}(z) - H_n^{(k)}(z)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2 + a_k}{k!} z^k + \frac{B}{\ln n} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2 + a_k}{k!} z^k + \frac{B\,|z|}{\ln n}.$$

Следовательно, при $|t| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$

$$\psi_n(t) = \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!\,\sigma^k}\left(a_k - \frac{t^2}{(k+1)\,(k+2)}\right) + \frac{B\,|t|}{\sigma\ln n} \right\}.$$

Имеет место очевидная оценка $|\psi_n(t)| \leqslant 1$ в силу определения функции $\psi_n(t)$. Поэтому

$$\psi_n(t) = \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!\,\sigma^k}\left(a_k - \frac{t^2}{(k+1)\,(k+2)}\right)\right\} + \frac{B\,|t|}{\sigma \ln n} \tag{10}$$

при $|t| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$.

Рассмотрим ряд

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!\,\sigma^k}\left(a_k - \frac{t^2}{(k+1)\,(k+2)}\right), \tag{11}$$

где x — вещественная переменная, $|x| \leqslant 1$. Этот ряд в силу (8) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_4 + t^2)\left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^k. \tag{12}$$

Отсюда, в частности, при $|t| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$

$$\left|T(x)\right| \leqslant 2\,(c_4 + t^2)\,\frac{|t|}{\sigma}. \tag{13}$$

Возведем ряд для $T(x)$ и мажорирующий ряд (12) в целую положительную степень l. Для степени ряда (12) получим

$$(c_4 + t^2)^l \left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^l \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=1}^{\infty} \left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^{k_1 + \ldots + k_l}.$$

Так как число решений уравнения $k_1 + \ldots + k_l = k$ в целых неотрицательных $k_1, \ldots, k_l$ не превосходит l^k, то ряд для $T^l(x)$ мажорируется рядом

$$(c_4 + t^2)^l \left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^l \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l\,|tx|}{\sigma}\right)^k. \tag{14}$$

Имеет место неравенство

$$\left| e^{T(x)} - \sum_{k=0}^{s} \frac{T^k(x)}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{|T(x)|^k}{k!} \leqslant$$

$$\leqslant \left|T(x)\right|^{s+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|T(x)|^k}{k!} = \left|T(x)\right|^{s+1} e^{|T(x)|}$$

или

$$e^{T(x)} = \sum_{k=0}^{s} \frac{T^k(x)}{k!} + B\left|T(x)\right|^{s+1} e^{|T(x)|}. \tag{15}$$

Разложим $e^{T(x)}$ в ряд по степеням x. Получим согласно (9)

$$e^{T(x)} = \sum_{k=0}^{s} P_k(it)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^k + U(x),$$

где $U(x) = O(|x|^{s+1})$ при $x \to 0$. Далее, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{T^k(x)}{k!} = \sum_{k=0}^{s} P_k(it)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^k + U_1(x), \tag{16}$$

где в $U_1(x)$ входят степени x, начиная с $s+1$. Имеем согласно (14) при $|t| \leqslant \frac{\sigma}{2s}$

$$\left| U_1(x) \right| \leqslant \sum_{l=1}^{s} \frac{(c_4+t^2)^l}{l!} \left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^l \sum_{k=s+1-l}^{\infty} \left(\frac{l\,|tx|}{\sigma}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{s} \frac{(c_4+t^2)^l}{l!} \left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{s+1} \frac{s^{s+1-l}}{1-\frac{s|t|}{\sigma}} = B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{s+1} (c_4+t^2)^s. \tag{17}$$

Согласно (13) при $|t| \leqslant \frac{\sigma}{8}$

$$\left| T(x) \right|^{s+1} e^{|T(x)|} = B(c_4+t^2)^{s+1} \left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{s+1} \exp\left\{ 2(c_4+t^2)\frac{|t|}{\sigma} \right\} =$$

$$= B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{s+1} (c_4+t^2)^{s+1} e^{\frac{1}{4}t^2}.$$

Подставляя эту оценку, (16) и (17) в формулу (15), получим, что при $|t| \leqslant \frac{\sigma}{8s}$

$$e^{T(x)} = \sum_{k=0}^{s} P_k(it)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^k + B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{s+1} (c_4+t^2)^{s+1} e^{\frac{1}{4}t^2}.$$

Отсюда в силу (10) и (11) при $x=1$ получим лемму.

Лемма 2. *При $|t| \leqslant \pi\sigma$ в обозначениях леммы* 1

$$\psi_n(t) = Be^{-\frac{1}{12}t^2}$$

равномерно по $n > c$ и t.

Доказательство. Имеем согласно (1), что

$$\psi_n(t) = R_n\left(\frac{it}{\sigma}\right) e^{-it\sigma} = \exp\left\{ \left(e^{\frac{it}{\sigma}}-1\right)\sigma^2 - it\sigma \right\} \left\{ \varphi\left(e^{\frac{it}{\sigma}}\right) + \frac{B}{\ln n} \right\}.$$

Так как при $|t| \leqslant \pi\sigma$

$$\varphi\left(e^{\frac{it}{\sigma}}\right) = B$$

и для любого вещественного α

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{i\alpha^3}{6} + \frac{\Theta\alpha^4}{24},$$

где $|\Theta| \leqslant 1$, то

$$\psi_n(t) = B\exp\left\{ -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6\sigma} + \frac{\Theta t^4}{24\sigma^2} \right\} = B\exp\left\{ -\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right) \right\} = Be^{-\frac{1}{12}t^2}$$

при $|t| \leqslant \pi\sigma$. Лемма доказана.

4. Определим периодические функции $E_k(u)$ $(k=1, 2, \ldots)$ с периодом 1 посредством тригонометрических рядов

$$E_k(u) = i^{-k^2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda u}}{(2\pi\lambda)^k}, \tag{18}$$

где штрих обозначает, что при суммировании значение $\lambda=0$ исключается. При $k>1$ ряд сходится абсолютно и равномерно для всех вещественных u. Следовательно, он представляет непрерывную ограниченную функцию. Ряд для $E_1(u)$ сходится в смысле, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda=-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda u}}{2\pi i\lambda}$$

для всех u. При $u=0$ этот предел равен 0, однако нам удобно будет считать, что $E_1(0)=E_1(-0)=-\frac{1}{2}$. Для $k>1$ имеем

$$E'_k(u)=(-1)^{k-1}E_{k-1}(u).$$

При $k>2$ это равенство имеет место для всех u, а при $k=2$ лишь для нецелых значений u. Для целых значений $u=m$ и $k\geqslant 2$

$$E_k(m)=\frac{i^{-k}}{(2\pi)^k}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda^k}=(-1)^{\frac{1}{2}k-1}\frac{B_k}{k!},$$

где B_k — числа Бернулли, определяемые соотношением

$$\frac{u}{e^u-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}u^k;$$

$B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, ..., $B_{2k+1}=0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Легко подсчитать, что

$$E_1(u)=-u+\frac{1}{2}, \qquad 0<u<1,$$

$$E_2(u)=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{1}{12}, \qquad 0\leqslant u\leqslant 1,$$

$$E_3(u)=\frac{1}{6}u^3-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{12}u, \qquad 0\leqslant u\leqslant 1.$$

Положим еще

$$E_0(u)=-1.$$

Теорема. *Пусть*

$$V_k(x)=\sum_{l=0}^{k}\frac{P_l(-G)}{(\ln\ln n)^{l/2}} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

где $P_l(-G)$ получается из $P_l(-z)$ путем замены всех степеней z^j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ на $G^{(j)}(x)$. Тогда для всякого фиксированного целого положительного s

$$\nu_n(x)=\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}}{(\ln\ln n)^{k/2}}E_k(\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n})\,V^{(k)}_{s-k}(x)+\frac{B\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{(s+1)/2}}$$

равномерно по $n>c$ и x.

Доказательство. Положим для сокращения

$$W_{s,k}(x)=(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}E_k(\sigma^2+\sigma x)\,V^{(k)}_{s-k}(x) \quad (k=0, 1, \ldots, s),$$

$$F_{n,s}(x)=\sum_{k=0}^{s}\frac{W_{s,k}(x)}{\sigma^k},$$

$$w_{s,k}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dW_{s,k}(x),$$

$$\chi_{n,s}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF_{n,s}(x).$$

Подсчитаем сначала преобразование Фурье $\chi_{n,s}(t)$ для функции $F_{n,s}(x)$

$$\chi_{n,s}(t)=\sum_{k=0}^{s}\frac{w_{s,k}(t)}{\sigma^k}.$$

Как известно, $G^k(\pm\infty)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$, поэтому интегрированием по частям получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dG^{(k)}(x)=(-it)^k\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dG(x)=$$

$$=\frac{(-it)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{1}{2}x^2}\,dx=(-it)^k e^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+2\pi\lambda\sigma)}\,dV_k^{(j)}(x)=(-it-2\pi i\lambda\sigma)^j e^{-\frac{1}{2}(t+2\pi\lambda\sigma)^2}\sum_{l=0}^{k}\frac{P_l(it+2\pi i\lambda\sigma)}{\sigma^l}=$$

$$=(-it-2\pi i\lambda\sigma)^j e^{-\frac{1}{2}(t+2\pi\lambda\sigma)^2}Q_k(it+2\pi i\lambda\sigma)\ (k=0, 1, \ldots;\ j=0, 1, \ldots). \tag{19}$$

Отсюда

$$w_{s,0}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dV_s(x)=e^{-\frac{1}{2}t^2}Q_s(it). \tag{20}$$

Далее, интегрируя по частям и используя (18), имеем, что

$$w_{s,k}(t)=-it\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,W_{s,k}(x)\,dx=$$

$$=i^{-k^2+1}(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)+1}\,t\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}E_k(\sigma^2+\sigma x)\,V_{s-k}^{(k)}(x)\,dx=$$

$$=i^{-k^2+1}(-1)^{\frac{1}{2}k(k-3)}\,t\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i\lambda(\sigma^2+\sigma x)}}{(2\pi\lambda)^k}V_{s-k}^{(k)}(x)\,dx\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

В силу известных свойств рядов Фурье мы можем изменить порядок суммирования и интегрирования. Согласно (19) найдем, что

$$w_{s,k}(t)=i^{-k^2+1}(-1)^{\frac{1}{2}k(k-3)}\,t\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i\lambda\sigma^2}}{(2\pi\lambda)^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+2\pi\lambda\sigma)}V_{s-k}^{(k)}(x)\,dx=$$

$$=-t\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(t+2\pi\lambda\sigma)^{k-1}}{(2\pi\lambda)^k}e^{2\pi i\lambda\sigma^2-\frac{1}{2}(t+2\pi\lambda\sigma)^2}Q_{s-k}(it+2\pi i\lambda\sigma)\ (k=1, 2, \ldots, s). \tag{21}$$

Положим теперь $\mu=\left[\frac{1}{2}\sigma^2\right]$ и оценим интеграл

$$I=\int\limits_{-(2\mu+1)\pi\sigma}^{(2\mu+1)\pi\sigma}\frac{1}{|t|}\left|\psi_n(t)-\chi_{n,s}(t)\right|dt, \tag{22}$$

где $\psi_n(t)$ — характеристическая функция закона $\nu_n(x)$. Разобьем интеграл I на интегралы I_j

$$I=\sum_{j=-\mu}^{\mu}I_j, \tag{23}$$

где

$$I_j=\int\limits_{(2j-1)\pi\sigma}^{(2j+1)\pi\sigma}\frac{1}{|t|}\left|\psi_n(t)-\chi_{n,s}(t)\right|dt=$$

$$=\int\limits_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}\frac{1}{|2\pi j\sigma+t|}\left|\psi_n(2\pi j\sigma+t)-\chi_{n,s}(2\pi j\sigma+t)\right|dt.$$

Имеем по определению $\psi_n(t)$

$$\psi_n(2\pi j\sigma+t)=R_n\left(2\pi ij\sigma+\frac{it}{\sigma}\right)e^{-(2\pi j\sigma+t)i\alpha}.$$

Функция $R_n(z)$ имеет период $2\pi i$. Поэтому

$$\psi_n(2\pi j\sigma+t)=R_n\left(\frac{it}{\sigma}\right)e^{-(2\pi j\sigma+t)i\alpha}=\psi_n(t)\,e^{-2\pi ij\sigma^*}$$

и

$$I_j=\int\limits_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}\frac{1}{|2\pi j\sigma+t|}\left|\psi_n(t)\,e^{-2\pi ij\sigma^*}-\chi_{n,s}(2\pi j\sigma+t)\right|dt.$$

Этот интеграл опять разобьем на две части

$$I_j=I_j'+I_j'',$$

где I_j' означает часть интеграла I_j по области $|t|\leqslant\frac{\sigma}{8s}$, а I_j'' — по области $\frac{\sigma}{8s}<|t|\leqslant\pi\sigma$. Положим

$$J_j=\int\limits_{|t|\leqslant\frac{\sigma}{8s}}\frac{1}{|2\pi j\sigma+t|}\left|e^{-\frac{1}{2}t^2-2\pi ij\sigma^*}Q_s(it)-\chi_{n,s}(2\pi j\sigma+t)\right|dt.$$

Согласно лемме 1

$$I_0'-J_0=\frac{B}{\sigma^{s+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^s(c_4+t^2)^{s+1}e^{-\frac{1}{4}t^2}dt+\frac{B}{\ln n}=\frac{B}{\sigma^{s+1}} \tag{24}$$

и при $j \neq 0$

$$I'_j - J_j = \frac{B}{|j|\,\sigma^{s+2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{s+1} (c_4 + t^2)^{s+1} e^{-\frac{1}{4}t^2} dt + \frac{B}{|j|\ln n} = \frac{B}{|j|\,\sigma^{s+2}}. \qquad (52)$$

Оценим теперь J_j. Так как степень полинома $P_k(z)$ равна $3k$, то при $|t| \leqslant \pi\sigma$, целом $\lambda \neq 0$ и $k = 1, 2, \ldots, s$ согласно (21)

$$w_{s,k}(t) = B|t|\,\sigma^{2s-k-1} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' |\lambda|^{3s-3k-1} e^{-\frac{1}{2}(2\pi|\lambda|-1)^2\sigma^2} = B|t|\,e^{-\sigma^2} = \frac{B|t|}{\ln n}$$

и при $j \neq 0$

$$w_{s,k}(2\pi_j\sigma + t) + \frac{(2\pi j\sigma + t)\,t^{k-1}}{(-2\pi j)^k} e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} Q_{s-k}(it) =$$

$$= B|2\pi j\sigma + t| \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq -j}}^{\infty}{}' \frac{|j+\lambda|^{k-1}\sigma^{k-1}}{|\lambda|^k} |\lambda + j|^{3(s-k)} \sigma^{2(s-k)} e^{-\frac{1}{2}(2\pi|\lambda+j|-1)^2\sigma^2} =$$

$$= B|2\pi j\sigma + t|\,e^{-\sigma^2} = \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n}.$$

Из этих оценок и (20) имеем, что при $|t| \leqslant \pi\sigma$

$$\chi_{n,s}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} Q_s(it) + \frac{B|t|}{\ln n} \qquad (26)$$

и при $j \neq 0$

$$\chi_{n,s}(2\pi j\sigma + t) = w_{s,0}(2\pi j\sigma + t) + \sum_{k=1}^{s} \frac{w_{s,k}(2\pi j\sigma + t)}{\sigma^k} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(2\pi j\sigma + t)^2} Q_s(2\pi j\sigma + t) - (2\pi j\sigma + t)\, e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{k=1}^{s} \frac{t^{k-1} Q_{s-k}(it)}{(-2\pi j\sigma)^k} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= Be^{-\sigma^2} - (2\pi j\sigma + t)\, e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{k=1}^{s} \frac{t^{k-1}}{(-2\pi j\sigma)^k} \sum_{l=0}^{s-k} \frac{P_l(it)}{\sigma^l} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= -(2\pi j\sigma + t)\, e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{P_l(it)}{\sigma^l} \sum_{k=1}^{s-l} \frac{t^{k-1}}{(-2\pi j\sigma)^k} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{P_l(it)}{\sigma^l} \left(1 - \left(\frac{t}{-2\pi j\sigma}\right)^{s-l}\right) + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} Q_{s-1}(it) + \frac{B|t|^{3s-2}}{\sigma^s|j|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n}. \qquad (27)$$

Возвращаемся к оценке J_j. Из (26) следует, что

$$J_0 = \frac{B}{\ln n}, \qquad (28)$$

а из (27) при $j \neq 0$, $|j| \leqslant \mu$

$$J_j = \int\limits_{|t| \leqslant \frac{\sigma}{8s}} \frac{1}{|2\pi j\sigma + t|} \left| \frac{P_s(it)}{\sigma^s} e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} + \frac{B|t|^{3s-2}}{\sigma^s|j|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} \right| dt =$$

$$= B \int\limits_{|t| \leqslant \frac{\sigma}{8s}} \left\{ \left(t^2 + \frac{1}{|j|}\right) \frac{|t|^{3s-2}}{\sigma^{s+1}|j|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{\ln n} \right\} dt = \frac{B}{\sigma^{s+1}|j|}. \tag{29}$$

Остается оценить I_j''. Согласно лемме 2 и (26)

$$I_0'' = B \int\limits_{\frac{\sigma}{8s} < |t| \leqslant \pi\sigma} \left(\frac{1}{|t|} e^{-\frac{1}{12}t^2} + \frac{\sigma^{2s}}{|t|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{\ln n} \right) dt = B \exp\left(-\frac{\sigma^2}{12\cdot 8^2 s^2}\right) + \frac{B\sigma}{\ln n} = \frac{B}{\sigma^{s+1}} \tag{30}$$

и аналогично в силу (27) при $j \neq 0$, $|j| \leqslant \mu$

$$I_j'' = B \int\limits_{\frac{\sigma}{8s} < |t| \leqslant \pi\sigma} \left\{ \frac{1}{|2\pi j\sigma + t|} \left(e^{-\frac{1}{12}t^2} + \sigma^{2s-2} e^{-\frac{1}{2}t^2} \right) + \frac{1}{\ln n} \right\} dt =$$

$$= \frac{B}{|j|} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{12\cdot 8^2 s^2}\right) + \frac{B\sigma}{\ln n} = \frac{B}{|j|\sigma^{s+1}}. \tag{31}$$

Из (24), (25) и (28–31) имеем, что

$$I_j = \frac{B}{|j|\sigma^{s+1}},$$

следовательно, согласно (23)

$$I = \frac{B \ln \sigma}{\sigma^{s+1}}.$$

Применение леммы Эссеена ([11], стр. 214) заканчивает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что

$$\nu_n(x) = G(x) + \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi \ln\ln n}} \left\{ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} - a_1 + E_1(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}) \right\} + \frac{B \ln\ln\ln n}{\ln\ln n},$$

$$\nu_n(x) = G(x) + \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi \ln\ln n}} \left\{ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} - a_1 + E_1(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}) \right\} +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi} \ln\ln n} \left\{ -\frac{1}{72}x^5 + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{6}a_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_1^2 - \right.\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}a_2\right)x + E_1(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n})\left(\frac{1}{6}x^3 + \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)x\right) -$$

$$\left. - xE_2(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}) \right\} + \frac{B\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{3/2}}.$$

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Институт физики и математики АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
12. IX. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс, Гос. изд. полит. и научн. лит. Лит. ССР, 1959.
2. W. J. Leveque. On the size of certain number-theoretic functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, 440—463.
3. И. П. Кубилюс. Об асимптотических законах распределения некоторых арифметических функций. Уч. тр. Вильнюсского гос. ун-та, 1955, **4**, 45—59.
4. И. П. Кубилюс. Об одном классе аддитивных арифметических функций, распределенных асимптотически по нормальному закону. Научн. тр. физ.-техн. ин-та АН Лит. ССР, 1956, **2**, 5—15.
5. М. Б. Барбан. Об одной теореме И. П. Кубилюса. Изв. АН Уз ССР, сер. физ.-матем. н., 1961, **5**, 3—9.
6. Р. В. Уждавинис, Распределение значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Кандидатская диссертация. Вильнюс, 1961, Институт физики и математики АН Лит. ССР.
7. A. Rényi, P. Turán. On a theorem of Erdös-Kac. Acta arithm., 1958, **4**, 71—84.
8. H. Delange. Sur des formules dues à Atle Selberg. Bull. sc. math., 2e série, 1959, **83**, 101—111.
9. A. Selberg. Note on a paper by L. G. Sathe. Journ. Ind. Math. Soc., 1954, **18**, 83—87.
10. И. П. Кубилюс. О некоторых задачах вероятностной теории чисел. Тр. шестого всес. совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, Гос. изд. полит. и научн. лит. Лит. ССР, 1962, 57—68.
11. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.-Л., Гостехиздат, 1949.

ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ ASIMPTOTINĖS FORMULĖS

J. KUBILIUS

(Reziumė)

Tegul $\omega(m)$ yra sveiko teigiamo skaičiaus m skirtingų pirminių daliklių skaičius, $\nu_n(x)$ — dažnumas sveikų teigiamų skaičių $m \leqslant n$, patenkinančių sąlygą $\omega(m) < \ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}$. Tada

$$\nu_n(x) = G(x) + \sum_{k=1}^{s} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}}{(\ln\ln n)^{k/2}} E_k(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n})\, V_{s-k}^{(k)}(x) +$$

$$+ O\left(\frac{\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{(s+1)/2}}\right). \qquad (*)$$

Čia

$$E_k(u) = i^{-k^2} \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda u}}{(2\pi\lambda)^k} \qquad (k=1, 2, \ldots), \qquad E_1(0) = -\frac{1}{2},$$

(šios funkcijos figūruoja Oilerio-Makloreno sumavimo formulėje),

$$V_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{P_l(-G)}{(\ln\ln n)^{l/2}} \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

$P_k(u)$ — laipsnio $3k$ polinomai, kurių koeficientai priklauso tik nuo k,

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

$P_k(-G)$ gaunamas iš $P_k(-u)$ visus laipsnius $u^j (j=0, 1, \ldots)$ pakeičiant $G^{(j)}(x)$. Įvertinimas formulėje (*) yra tolygus n ir x atžvilgiu.

Darbo metodas pritaikomas ir kitoms adityvinėms aritmetinėms funkcijoms.

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER VERTEILUNGSGESETZE EINIGER ARITHMETISCHEN FUNKTIONEN

J. KUBILIUS

(Zusammenfassung)

Es sei $\omega(m)$ die Anzahl der voneinander verschiedenen Primteiler von m und $\nu_n(x)$ die Häufigkeit der ganzen positiven Zahlen $m\leqslant n$, für die $\omega(m)<\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}$ ist. Dann ist

$$\nu_n(x)=G(x)+\sum_{k=1}^{s}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}}{(\ln\ln n)^{k/2}}E_k(\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n})\,V_{s-k}^{(k)}(x)+$$

$$+O\left(\frac{\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{(s+1)/2}}\right), \tag{*}$$

wobei die folgenden Bezeichnungen gelten:

$$E_k(u)=i^{-k^2}\sum_{\substack{\lambda=-\infty\\ \lambda\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda u}}{(2\pi\lambda)^k}\qquad (k=1, 2, \ldots),\quad E_1(0)=-\frac{1}{2},$$

(diese Funktionen aufreten in der Euler — Maclaurinschen Summationsformel),

$$V_k(x)=\sum_{l=0}^{k}\frac{P_l(-G)}{(\ln\ln n)^{l/2}}\qquad (k=0, 1, \ldots),$$

$P_k(u)$ sind gewisse Polynomen vom Grade $3k$, deren Koeffizienten nur von k abhängen,

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

$P_k(-G)$ bekommt man aus $P_k(-u)$ durch Ersetzung der Potenzen $u^j (j=0, 1, \ldots)$ mit $G^{(j)}(x)$. Die Abschätzung in (*) ist uniform in n und x.

Die Methode der Arbeit kann man auch auf gewisse andere additive arithmetische Funktionen ausdehnen.
