II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

О ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

А. МАТУЛЯУСКАС

Под целочисленным представлением n-ой степени группы G понимается гомоморфизм группы G в кольцо целочисленных квадратных матриц n-го порядка. Два целочисленных представления группы G $\varphi : G \to \{ A_i \}$ и $\psi : G \to \{ B_i \}$ считаются эквивалентными, если существует целочисленная унимодулярная матрица T такая, что

$$A_i = T^{-1} B_i T.$$

Если представление φ эквивалентно „приведённому“ представлению

$$\omega : G \to \left\{ \begin{matrix} C_i & \\ & D_i \end{matrix} \right\},$$

то оно называется разложимым.

В настоящее время задача описания всех целочисленных представлений данной группы G решена только для циклических групп простого порядка. Дидерихсен [1] и Райнер [2] показали, что матрицы представления циклической группы простого порядка p распадаются на неразложимые клетки порядка не выше p. Число неразложимых неэквивалентных представлений такой группы равно $2h+1$, где h – число классов идеалов поля, образованного корнями p-ой степени из единицы.

Рассматривая циклическую группу 4-го порядка $Z_4 = \{ a \}$, Дидерихсен показал, что каждое представление этой группы эквивалентно представлению вида

$$a \to A = \begin{bmatrix} E_i & * & * \\ & -E_j & * \\ & & \Delta \times E_k \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где E_i, E_j, E_k – единичные матрицы порядков i, j, k соответственно,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\Delta \times E_k = \left. \begin{bmatrix} \Delta & & & \\ & \Delta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta \end{bmatrix} \right\} k.$$

Простой подсчёт показывает, что существует целочисленная унимодулярная матрица U, трансформирующая A к матрице

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix} E_i & L & [0\ 1]\times M \\ & -E_j & [0\ 1]\times N \\ & & \Delta\times E_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

составленной из нулей и единиц. Дидерихсен доказал, что эта матрица в общем неразложима трансформацией вида

$$\begin{bmatrix} F & & \\ & H & \\ & & K \end{bmatrix},$$

где F, H, K — целочисленные унимодулярные матрицы порядков i, j, $2k$ соответственно и K перестановочна с $\Delta\times E_k$, и отсюда заключил, что существуют неразложимые представления сколь угодно высокой степени. Однако, как это следует из работы Ройтера [3], этот результат оказался неверным.

В настоящей работе даётся новое доказательство того, что степени неразложимых представлений группы Z_4 (а их всего 9) ограничены.

Теорема. Для каждой целочисленной квадратной матрицы A, удовлетворяющей условию

$$A^4=E,$$

существует целочисленная унимодулярная матрица T такая, что матрица $T^{-1}AT$ распадается на неразложимые клетки, порядки которых не выше 4.

Ввиду замечания, сделанного нами в начале статьи, доказательство проведём в предположении, что все матрицы представления составлены только из нулей и единиц. Целочисленной унимодулярной матрицей вида

$$\begin{bmatrix} F & & \\ & H & \\ & & E_{2k} \end{bmatrix}$$

клетка L матрицы $U^{-1}AU$ трансформируется к диагональному виду

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} E_q & & E_q & & M_1 \\ \hline & E_{i-q} & & & M_2 \\ \hline & & -E_q & & N_1 \\ \hline & & & -E_{j-q} & N_2 \\ \hline & & & & \Delta\times E_k \end{array}\right], \tag{3}$$

где $q\leqslant\min\{i, j\}$.

Поменяв местами некоторые столбцы и соответствующие строки, матрице (3) придадим следующую форму

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\times E_q & & & [0\ \ 1]\times P \\
\hline
 & E_{i-q} & & \\
\cline{2-3}
 & & -E_{j-q} & [0\ \ 1]\times Q \\
\hline
 & & & \Delta\times E_k
\end{array}\right]. \qquad (4)$$

Несколькими взаимно обратными элементарными преобразованиями матрицу $\left[\begin{array}{c|c} E_{i-q} & \\ -E_{j-q} & [0\ \ 1]\times Q\end{array}\right]$ приведем к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c}
E_m & & & & [0\ \ 1]\times E_m & \\
\hline
 & -E_n & & & & [0\ \ 1]\times E_n \\
\hline
 & & -E_r & & [0\ \ 1]\times Q_1 & [0\ \ 1]\times Q_2 \\
\hline
 & & & E_s & [0\ \ 1]\times Q_3 & [0\ \ 1]\times Q_4
\end{array}\right]. \qquad (5)$$

Клетки $[0\ \ 1]\times Q_2$ и $[0\ \ 1]\times Q_3$ можем считать нулевыми, так как любой ненулевой элемент этих клеток заменяется нулём вычитанием некоторой строки матрицы $[0\ \ 1]\times E_n$ или матрицы $[0\ \ 1]\times E_m$. Теперь клетки $[0\ \ 1]\times Q_1$ и $[0\ \ 1]\times Q_4$ целочисленной унимодулярной трансформацией приводятся к диагональной форме. Поменяв местами некоторые строки и соответствующие столбцы, матрице (5) придадим следующий вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c}
\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\times E_t & & & & & \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\times E_t & \\
\hline
 & E_u & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & -E_v & & & & [0\ \ 1]\times E_{u+v} \\
\hline
 & & & E_w & & & \\
\hline
 & & & & -E_z & &
\end{array}\right],$$

где $2t+u+v+w+z=m+n+r+s$.

После всех этих преобразований матрица представления выглядит следующим образом:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c|c|c}
\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\times E_q & & & & & & \multicolumn{3}{c}{[0\ \ 1]\times S} \\
\hline
 & \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\times E_t & & & & & \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\times E_t & & \\
\hline
 & & E_u & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -E_v & & & & [0\ \ 1]\times E_{u+v} & \\
\hline
 & & & & E_w & & & & \\
\hline
 & & & & & -E_z & & & \\
\hline
 & & & & & & \multicolumn{3}{c}{\Delta\times E_k}
\end{array}\right].$$

Разобьём блок $[0\ 1]\times S$ на квадратные клетки второго порядка

$$[0\ 1]\times S=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{q1} & R_{q2} & \dots & R_{qk} \end{bmatrix}=R.$$

Очевидно,

$$R_{ij}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \dots,\ q \\ j=1,\ 2,\ \dots,\ k \end{pmatrix}.$$

Здесь возможны такие случаи.

1. $t>0$. Пусть $R_{q1}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\Big($случай $R_{q1}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ прибавлением $2q$-ой строки матрицы представления к $2q-1$-ой сводится к рассматриваемому$\Big)$. Остальные клетки 1-го блочного столбца матрицы R можем считать, нулевыми, так как клетка $R_{i1}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ трансформированием матрицей вида

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c|c} E_{2i-2} & & & & & & & \\ \hline & E_2 & & \Gamma & \Lambda & & \Pi & \\ \hline & & E_{2q-2i-4} & & & & & \\ \hline & & & E_2 & & & & \\ \hline & & & & E_2 & & & \\ \hline & & & & & E & & \\ \hline & & & & & & E_2 & \\ \hline & & & & & & & E_{2k-2} \end{array}\right],$$

где Γ, Λ, Π — целочисленные квадратные матрицы 2-го порядка, а $i=1,\ 2,\ \dots,\ q-1$, заменяется нулевой. Пусть $R_{q2}=\begin{bmatrix}0&\delta\\0&1\end{bmatrix}$ $(\delta=0,\ 1)$. Тогда клетки $R_{q3},\ R_{q4},\ \dots,\ R_{qk}$ можно также считать нулевыми, так как клетка $R_{q,\,k-j}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ трансформацией

$$\left[\begin{array}{cccccc|c|c} E_{2q-2} & & & & & & & \\ \hline & E_2 & & & & & \Gamma & \\ \hline & & E_2 & & & & \Lambda & \\ \hline & & & E & & & & \\ \hline & & & & E_2 & & \Pi & \\ \hline & & & & & E_{2k-2j-4} & & \\ \hline & & & & & & E_2 & \\ \hline & & & & & & & E_{2j} \end{array}\right]$$

переводится в нулевую.

Перестановкой некоторых строк и соответствующих столбцов образуем блок

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{|c|}{\multirow{2}{*}{R_{q1}}} \\ & -1 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{|c|}{} \\ \cline{5-6} & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

этот блок преобразуется в блок следующего вида:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{5-6} & & 1 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ & & & -1 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \cline{5-6} & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Находящуюся справа от $\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}$ клетку $\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ мы заменим нулевой, преобразовав матрицу представления матрицей вида

$$\begin{bmatrix} E_{2q} & & & & \multicolumn{1}{|c|}{} & \\ \hline & E_2 & & & \multicolumn{1}{|c|}{\Gamma} & \\ \hline & & E & & \multicolumn{1}{|c|}{} & \\ \hline & & & E_2 & \multicolumn{1}{|c|}{\Lambda} & \\ \hline & & & & \multicolumn{1}{|c|}{E_2} & \\ \hline & & & & & \multicolumn{1}{|c}{E_{2k-4}} \end{bmatrix},$$

после чего выделяется клетка

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если

$$R_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ q,$$

то получаем клетку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае

$$R_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ q,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

блок (6) распадается на две клетки:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. $t=0$, $u+v>0$. Исследование проводим аналогично случаю 1. Матрицей, преобразующей блок

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-\varepsilon}{2} \\ & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & \varepsilon & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon=-1,\ 1$, в блок

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \frac{1-\varepsilon}{2} \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

является матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что в этом случае мы получим клетки следующих типов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1-\varepsilon}{2} \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \varepsilon.$$

III. $t=0$, $u+v=0$. Если $R_{q1}=\begin{bmatrix}0 & \delta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, где $\delta=0,\ 1$, то трансформированием (6) матрицами вида

$$\begin{bmatrix}
E_{2i} & & & & & & \\
 & E_2 & & \Gamma & & \Lambda & \\
 & & E_{2q-2i-4} & & & & \\
 & & & E_2 & & & \\
 & & & & E & & \\
 & & & & & E_2 & \\
 & & & & & & E_{2k-2}
\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}
E_{2q-2} & & & & & & \\
 & E_2 & & & & \Gamma & \\
 & & E & & & & \\
 & & & E_2 & & \Lambda & \\
 & & & & E_{2k-2j-4} & & \\
 & & & & & E_2 & \\
 & & & & & & E_{2j}
\end{bmatrix}$$

($i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-2$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-2$) все клетки 1-го блочного столбца и q-ой блочной строки матрицы R, за исключением R_{q1}, переводятся в нулевые и выделяется клетка

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & \delta\\
 & -1 & 0 & 1\\
 & & 0 & -1\\
 & & 1 & 0
\end{bmatrix} \qquad (\delta=0,\ 1).$$

Легко видеть, что в обоих случаях получаем клетки, соответствующие эквивалентным представлениям. Пусть $R_{ij}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ для $i=1, 2, \ldots, q$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Тогда, взяв $R_{q1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, мы можем добиться того, чтобы все клетки R_{ij}, для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ q-1$, $j=1$; $i=q$, $j=2,\ 3,\ \ldots,\ k$, стали нулевыми, после чего получаем клетку

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1\\
 & -1 & 0 & 0\\
 & & 0 & -1\\
 & & 1 & 0
\end{bmatrix}.$$

Итак, матрица A трансформированием некоторой целочисленной унимодулярной матрицей T распадается на клетки следующих типов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1, \ -1.$$

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 24. X. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Diederichsen F. E. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz. „Abhand. Math. Sem. Univ. Hamburg", 1938, 13, 357—412.
2. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of prime order. „Proc. Amer. Math. Soc.", 1957, 8, Nr. 1, 142—146.
3. Ройтер А. В. О представлениях циклической группы 4-го порядка целочисленными матрицами. „Вестн. Ленинград. ун-та", 1960, № 19, 65—74.

APIE 4-OS EILĖS CIKLINĖS GRUPĖS SVEIKASKAIČIUS ATVAIZDAVIMUS

A. MATULIAUSKAS

(Reziumė)

Darbe naujai įrodoma sekanti teorema. Kiekvienai sveikų skaičių kvadratinei matricai A, patenkinančiai sąlygą

$$A^4 = E,$$

egzistuoja sveikų skaičių unimodulinė matrica T tokia, kad matrica $T^{-1}AT$ išsidėsto kvadratiniais langeliais, neaukštesniais kaip 4-os eilės.

ÜBER GANZZAHLIGE DARSTELLUNGEN DER ZYKLISCHEN GRUPPE VON VIERTER ORDNUNG

A. MATULIAUSKAS

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit ist neu bewiesen, dass jede ganzzahlige quadratische Matrix A, die der Bedingung

$$A^4 = E$$

genügt, durch die Transformation mit einer ganzzahligen unimodularen Matrix T in unzerfällbare Diagonalkästchen, deren Ordnungen höchstens 4 sind, zerfällt.