II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

О СТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА ПЕРИОДОВ 2-го РОДА МАТРИЦЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Г. НАФТАЛЕВИЧ

Рассмотрим одностолбцевую матрицу $F(x)$,

$$F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \tag{A}$$

элементы которой $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$, — функции, определенные на действительной прямой $-\infty<x<\infty$ и принимающие комплексные значения.

Действительное число α, $\alpha \neq 0$, называется периодом 2-го рода матрицы $F(x)$, если имеется такая (зависящая от α) матрица комплексных чисел $\mathfrak{M}=\|a_{kl}\|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$, что

$$F(x+\alpha)\equiv\mathfrak{M}F(x),$$
$$\left(f_k(x+\alpha)\equiv\sum_{l=1}^{n} a_{kl}f_l(x),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right). \tag{B}$$

В работе предполагается, что матрица $F(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке x_0 (т. е. функции $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$, непрерывны в этой точке), и доказывается, что множество Ω периодов 2-го рода этой матрицы может по своему строению иметь один из следующих трех видов:

а) Ω — пустое множество,

б) множество Ω состоит из чисел $k\alpha$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$,

в) Ω — множество всех действительных чисел.

Матрицу $F(x)$, имеющую хотя бы один период 2-го рода, назовем периодической; при этом будем говорить, что матрица $F(x)$ — одно-периодическая или вполне периодическая в зависимости от того имеет ли множество Ω (множество периодов 2-го рода матрицы $F(x)$) вид б) или в).

В работе показано также, что вполне периодическая матрица $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F'(x)=MF(x), \tag{C}$$

где $M=\|m_{kl}\|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$, — некоторая матрица комплексных чисел (другими словами элементы $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$, матрицы $F(x)$ удовлетворяют однородной системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами). Обратно, каждая матрица $F(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению указанного вида, является вполне периодической матрицей.

Строение множества периодов 2-го рода рассматривается также в статьях [2] и [3]. В [2] показано, что вышеприведенные результаты имеют место в случае, когда матрица $F(x)$ состоит из одного элемента ($n=1$). В [3] изучено строение множества периодов 2-го рода матрицы дифференцируемых функций комплексного переменного. Заметим, что изложенный в работе [3] метод вполне пригоден и для исследования множества периодов 2-го рода матрицы дифференцируемых функций действительного переменного.

1. Все указанные во введении результаты легко вытекают (ср. [2] и [3]) из следующей теоремы:

Теорема 1. *Если матрица $F(x)$ имеет хотя бы одну точку непрерывности и как угодно малые по абсолютной величине периоды 2-го рода, то она $\left(F(x)\right)$ вполне периодическая матрица и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$F'(x)=MF(x), \tag{1.1}$$

где $M=\|m_{kl}\|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$, *— некоторая матрица комплексных чисел.*

При дополнительном предположении, что матрица $F(x)$ дифференцируема, эта теорема доказана в [3]. Таким образом, достаточно установить следующее предложение:

Теорема 2. *Если матрица $F(x)$ имеет хотя бы одну точку непрерывности и как угодно малые по абсолютной величине периоды 2-го рода, то она дифференцируема.*

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы, заметим следующее:

Замечание 1. Если $C=\|c_{kl}\|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$, — невырожденная матрица комплексных чисел, то матрицы $F(x)$ и $\Phi(x)=CF(x)$ имеют те же самые периоды 2-го рода.

В самом деле, если α — период 2-го рода матрицы $F(x)$, то

$$\Phi(x+\alpha)=CF(x+\alpha)=C\mathfrak{M}F(x)=C\mathfrak{M}C^{-1}\Phi(x).$$

Замечание 2. Пусть α и β — два произвольных периода 2-го рода матрицы $F(x)$ и

$$\begin{aligned} F(x+\alpha)&=\mathfrak{M}_\alpha F(x), \\ F(x+\beta)&=\mathfrak{M}_\beta F(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Если детерминант $|\mathfrak{M}_\alpha|=0$ или же

$$\mathfrak{M}_\alpha\mathfrak{M}_\beta\neq\mathfrak{M}_\beta\mathfrak{M}_\alpha, \tag{1.3}$$

то каждый период 2-го рода матрицы $F(x)$ будет периодом 2-го рода и для некоторой подматрицы $F_1(x)$ $\left(\text{матрицы } F(x)\right)$.

Если $|\mathfrak{M}_\alpha|=0$, то, как легко следует из (1.2), элементы матрицы $F(x)$ линейно зависимы. То же самое будет и в случае, когда выполнено (1.3). В самом деле, из (1.2) получаем

$$F(x+\alpha+\beta)=\mathfrak{M}_\alpha\mathfrak{M}_\beta F(x)=\mathfrak{M}_\beta\mathfrak{M}_\alpha F(x).$$

Следовательно,

$$(\mathfrak{M}_\alpha \mathfrak{M}_\beta - \mathfrak{M}_\beta \mathfrak{M}_\alpha) F(x) = 0.$$

Отсюда и (1.3) следует линейная зависимость элементов матрицы $F(x)$, а вместе с тем и сказанное в замечании 2 (см. [3]).

2. Доказательство теорѐмы 2 проведем методом индукции $\Big($индукцией по n — по числу элементов матрицы $F(x)\Big)$. Если $n=1$, то теорема верна, как это показано в [2]. Допустим, что она верна, если число элементов матрицы $F(x)$ меньше n.

Пусть α и β — два произвольных периода матрицы $F(x)$ $(\alpha, \beta \in \Omega)$. Пользуясь сказанным в замечании 2 предыдущего пункта, легко убедимся, что теорема верна, если выполнено условие $|\mathfrak{M}_\alpha| = 0$ или условие (1.3). Поэтому можем в дальнейшем считать, что для каждого $\alpha\,(\alpha \in \Omega)$ $|\mathfrak{M}_\alpha| \neq 0$ и для каждой пары β, γ, β, $\gamma \in \Omega$,

$$\mathfrak{M}_\beta \mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_\gamma \mathfrak{M}_\beta. \tag{2.1}$$

Пусть $\alpha = \gamma$ — то число из множества Ω, для которого матрица $\mathfrak{M}_\alpha$ $\Big($см. (1.2)$\Big)$ имеет наибольшее число различных собственных значений. Обозначим различные собственные значения матрицы $\mathfrak{M}_\gamma$ через $\lambda_{1\gamma}, \lambda_{2\gamma}, \ldots, \lambda_{k\gamma}$ и предположим, что $k > 1$.

Пользуясь сказанным в замечании 1 предыдущего пункта, можем считать, что матрица $\mathfrak{M}_\gamma$ имеет нормальный вид Жордана:

$$\mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{1\gamma} \dotplus \mathfrak{M}_{2\gamma} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_{k\gamma},$$

где знак $\dotplus$ означает прямую сумму и $\mathfrak{M}_{i\gamma}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — клетка, имеющая единственное собственное значение $\lambda_{i\gamma}$. Тогда в силу (2.1) (см. [1]) при любом $\alpha \in \Omega$

$$\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_{1\alpha} \dotplus \mathfrak{M}_{2\alpha} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_{k\alpha},$$

где $\mathfrak{M}_{l\alpha}$ — минор матрицы $\mathfrak{M}_\alpha$, состоящий из элементов, имеющих те же индексы, что и элементы минора $\mathfrak{M}_{l\gamma}$.

Если $F_l(x)$ — минор матрицы $F(x)$, состоящий из строчек матрицы $F(x)$, имеющих те же индексы, что и строчки минора $\mathfrak{M}_{l\gamma}$ (по отношению к $\mathfrak{M}_\gamma$), то система (1.2) распадается на независимые подсистемы

$$F_l(x+\alpha) = \mathfrak{M}_{l\alpha} F_l(x), \qquad \alpha \in \Omega, \ l = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, каждое число $\alpha \in \Omega$ является периодом 2-го рода матрицы $F_l(x), l = 1, 2, \ldots, k$. По предположению индукции матрица $F_l(x), l = 1, 2, \ldots, k$, дифференцируема. Таковой будет и матрица $F(x)$.

Осталось рассмотреть случай, когда для каждого $\alpha \in \Omega$ матрица $\mathfrak{M}_\alpha$ имеет единственное собственное значение λ_α.

Пусть $\mathfrak{M}_\gamma$ та из матриц $\mathfrak{M}_\alpha$, состоящая (если привести ее к нормальному виду) из наименьшего числа клеток. Предположим, что число этих клеток равно s, $1 \leqslant s \leqslant n$, и рассмотрим сначала случай $s = n$.

В этом случае каждая из матриц $\mathfrak{M}_\alpha$ имеет вид

$$\mathfrak{M}_\alpha = \lambda_\alpha E, \tag{2.2}$$

где E — единичная матрица. В самом деле, (2.2) является, по предположению $s=n$,нормальным видом матрицы $\mathfrak{M}_\alpha$, но если имеет место (2.2), то $\mathfrak{M}_\alpha=A\mathfrak{M}_\alpha A^{-1}$, какая бы не была невырожденная матрица A.

В этом случае из (1.2) получаем

$$f_k(x+\alpha)=\lambda_\alpha f_k(x), \qquad k=1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, матрица $F(x)$ дифференцируема.

Пусть теперь $1\leqslant s<n$ и

$$\mathfrak{M}_\gamma=\mathfrak{M}_{1\gamma}\dot{+}\mathfrak{M}_{2\gamma}\dot{+}\ldots\dot{+}\mathfrak{M}_{s\gamma},$$

где $\mathfrak{M}_{l\gamma}$, $l=1, 2, \ldots, s$, — различные элементарные клетки Жордана матрицы $\mathfrak{M}_\gamma$ (считаем, что $\mathfrak{M}_\gamma$ уже приведена к нормальному виду), порядки которых обозначены через $t_1, t_2, \ldots, t_s$.

Обратим внимание на 1-ый, t_1+1-ый, t_1+t_2+1-ый, ... и $t_1+t_2+\ldots+t_{s-1}+1$-ый столбцы матрицы $\mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha\in\Omega$. В силу равенства (2.1), элемент из этих столбцов может быть не равен нулю только в случае, когда он находится также в одной из строчек, имеющих индексы $1, t_1+1, t_1+t_2+1, \ldots t_1+t_2+\ldots+t_{s-1}$ (см. [1]).

Из каждой матрицы $\mathfrak{M}_\alpha$ вычеркнем s-строчек и s-столбцов с индексами $1, t_1+1, t_1+t_2+1, \ldots t_1+t_2+\ldots+t_{s-1}+1$ и полученный минор обозначим через $\mathfrak{M}_\alpha^*$. Минор, состоящий из элементов матрицы $\mathfrak{M}_\alpha$, стоящих на пересечении вычеркнутых строчек и столбцов, обозначим через $\tilde{\mathfrak{M}}_\alpha$. Пусть соответственно $F^*(x)$ — минор, полученный из матрицы $F(x)$ после вычеркивания строчек с индексами $1, t_1+1, t_1+t_2+1, \ldots t_1+t_2+\ldots+t_{s-1}+1$, а $\tilde{F}(x)$ — минор, состоящий из вычеркнутых строчек (одноэлементных) матрицы $F(x)$. В силу уравнения (1.2) и строения матриц $\mathfrak{M}_\alpha$, получим

$$F^*(x+\alpha)=\mathfrak{M}_\alpha^* F^*(x),$$

$$\tilde{F}(x+\alpha)=\tilde{\mathfrak{M}}_\alpha\tilde{F}(x)+\mathfrak{M}'_\alpha F^*(x), \tag{2.3}$$

где $\mathfrak{M}'_\alpha$ — некоторая матрица комплексных чисел. Из (2.3) следует, что любое число α, $\alpha\in\Omega$, является периодом 2-го рода матрицы $F^*(x)$. По предположению индукции матрица $F^*(x)$ дифференцируема. По доказанному в работе [3] матрица $F^*(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F^{*\prime}(x)=M^*F^*(x), \tag{2.4}$$

где

$$M^*=\lim_{\alpha\to 0}\frac{M_\alpha^*-E}{\alpha}, \qquad E \text{ — единичная матрица.} \tag{2.5}$$

Заметим, что характеристические многочлены матриц $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\alpha^*$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_\alpha$ связаны соотношением

$$|\mathfrak{M}_\alpha-\lambda E|=|\mathfrak{M}_\alpha^*-\lambda E|\cdot|\tilde{\mathfrak{M}}_\alpha-\lambda E|. \tag{2.6}$$

По сделанному ранее предположению, матрица $\mathfrak{M}_\alpha$ имеет единственное собственное значение λ. Из (2.6) следует, что λ_α является единственным собственным значением и матрицы $\mathfrak{M}_\alpha^*$. Пользуясь равенством (2.5), получаем, что матрица M^* также имеет единственное собственное значение μ

$$\mu=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lambda_\alpha-1}{\alpha}.$$

Поэтому элементы $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_{n-s}(x)$ матрицы $F^*(x)$ имеют, как это следует из (2.4), вид:

$$\varphi_k(x) = e^{\mu x} P_k(x), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-s,$$

где $P_k(x)$ — многочлен, степень которого не больше $n-s-1$. Следовательно, такой же вид имеют и элементы матрицы $\mathfrak{M}'_\alpha F^*(x)$ $\Big($см. (2.3)$\Big)$.

Заметим еще, что

$$\lambda_\alpha = e^{\mu\alpha}, \tag{2.7}$$

как это следует из первого из равенств (2.3) (напомним, что λ_α — единственное собственное значение матриц $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}^*_\alpha$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_\alpha$). Во втором из равенств (2.3) подставим

$$\tilde{F}(x) = e^{\mu x}\,\Phi(x). \tag{2.8}$$

В результате этой подстановки мы получим (надо иметь в виду равенство (2.7) и сказанное выше о виде элементов матрицы $\mathfrak{M}'_\alpha F^*(x)$ и о собственном значении матрицы $\tilde{\mathfrak{M}}_\alpha$)

$$\tilde{\Phi}(x+\alpha) = \tilde{\mathfrak{N}}_\alpha\,\tilde{\Phi}(x) + \Pi(x), \tag{2.9}$$

где матрица $\tilde{\mathfrak{N}}_\alpha$ имеет единственное собственное значение, равное единице, а $\Pi(x)$ — одностолбцевая матрица, элементы которой являются многочленами, степень которых не больше $n-s-1$. На обе стороны равенства (2.9) подействуем оператором разности $n-s$-го порядка $\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}$,

$$\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}} = \Delta_{\alpha_1}\left(\Delta^{n-s-1}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-s}}\right), \quad \Delta_{\alpha_1} F(x) = \frac{F(x+\alpha_1)-F(x)}{\alpha_1}, \tag{2.10}$$

где α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-s} — произвольные числа множества Ω. Мы получим $\Big($заметим, что $\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\Pi(x) = 0\Big)$

$$\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x+\alpha) = \tilde{\mathfrak{N}}_\alpha\,\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x). \tag{2.11}$$

Матрица $F(x)$, по предположению, непрерывна в точке x_0. Из (1.2) следует, что эта матрица непрерывна и в каждой точке $x_0+\alpha$, где $\alpha\in\Omega$. То же самое можно сказать и о матрицах $\tilde{\Phi}(x)$ и $\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x)$. Таким образом $\Big($в силу предположения индукции и равенства (2.11)$\Big)$, матрица $\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x)$ дифференцируема. Ее элементы являются полиномами, так как матрица $\tilde{\mathfrak{N}}_\alpha$ имеет единственное собственное значение, равное единице. Заметим еще, что матрица $\tilde{\mathfrak{N}}_\gamma$ является единичной матрицей, так как матрица $\mathfrak{M}_\gamma$ имеет по сделанному ранее допущению нормальный вид. Таким образом, полиномиальная матрица $\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x)$ удовлетворяет уравнению $\Big($см. (2.11)$\Big)$

$$\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x+\gamma) = \Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x).$$

Следовательно, матрица $\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x)$ постоянная:

$$\Delta^{n-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}\,\tilde{\Phi}(x) = C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-s}}.$$

Пользуясь несколько ниже приводимой леммой, заключаем, что матрица $\tilde{\Phi}(x)$ — полиномиальная матрица. Матрица $\tilde{F}(x)$ $\Big($см. (2.8)$\Big)$, а вместе с ней матрица $F(x)$, являются дифференцируемыми матрицами.

3. Лемма. *Пусть* $\{\gamma_n\}$, $\lim \gamma_n = 0$, — *последовательность действительных чисел,* $y = y(x)$ — *функция непрерывная в точках* x_0 *и* $x_0 + \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \ldots \gamma_{i_k}$, k, i_1, i_2, $\ldots$, $i_k = 1, 2, 3, \ldots$, *и* $\Delta^m_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_m}}$ — *оператор разности m-ого порядка. Если*

$$\Delta^m_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_m}} y = c_{i_1 i_2 \ldots i_m}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.1}$$

где $c_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ — *постоянные, то функция* $y(x)$ — *полином, степень которого не больше* m.

Это утверждение можно доказать методом индукции. Пусть $m = 1$. Тогда

$$y(x + \gamma_n) - y(x) = c_n, \quad \lim \gamma_n = 0, \tag{3.2}$$

и

$$e^{y(x+\gamma_n) - y(x)} = e^{c_n}. \tag{3.3}$$

Если обозначить

$$e^{y(x)} = u(x), \tag{3.4}$$

то равенство (3.3) можно будет переписать в виде

$$u(x + \gamma_n) = e^{c_n} u(x),$$

где функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0. Поэтому (см. [2])

$$u(x) = Ce^{\alpha x}, \tag{3.5}$$

где C и α — постоянные. Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$y = \alpha x + \ln C + 2\pi i\, K(x), \tag{3.6}$$

где функция $K(x)$ принимает только целые значения. Функция $K(x)$, как и функция $y(x)$, непрерывна в точке x_0. Поэтому она постоянна в некотором интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$:

$$K(x) = K, \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta. \tag{3.7}$$

Пусть $|\gamma_n| < \delta$. Из (3.2), (3.6) и (3.7) получим

$$c_n = \alpha \cdot \gamma_n, \quad K(x + \gamma_n) = K(x). \tag{3.8}$$

Меняя x или $x - \gamma_n$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, убедимся, пользуясь равенствами (3.7) и (3.8), что $K(x)$ постоянна и в интервале $(x_0 - \delta - |\gamma_n|, x_0 + \delta + |\gamma_n|)$. Аналогично покажем, что функция $K(x)$ постоянна в интервалах $(x_0 - \delta - m|\gamma_n|, x_0 + \delta + m|\gamma_n|)$, $m = 2, 3, \ldots$, т. е. на всей прямой.

Допустим, что лемма верна для уравнений вида (3.1), и докажем, что она верна и для уравнений вида

$$\Delta^{m+1}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_{m+1}}} y = c_{i_1 i_2 \ldots i_{m+1}}. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$v_s = \Delta_{\gamma_s} y, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

Тогда

$$\Delta^m_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_m}} v_s = c_{s i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

По предположению индукции,

$$v_s = P_{ms}(x),$$

где $P_{ms}(x)$ — полином, степень которого не больше m. Таким образом, равенство (3.10) перепишется в виде

$$y(x + \gamma_s) - y(x) = P^*_{ms}(x), \quad \lim \gamma_s = 0, \tag{3.11}$$

$$P^*_{ms}(x) = \gamma_s \cdot P_{ms}(x).$$

Сделаем опять замену (3.4). В результате получим

$$u(x+\gamma_s)=e^{P_{ms}^{*}(x)}\,u(x),$$

где функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0. По доказанному в работе [2]

$$u(x)=Ce^{Q(x)},$$

где C — постоянная, а $Q(x)$ — полином. Поэтому $\Big($см. (3.4)$\Big)$

$$y=Q(x)+\ln C+2\pi i K(x),$$

где функция $K(x)$ принимает только целые значения. Нетрудно убедиться $\Big($рассуждая аналогично, как при разборе функции (3.6)$\Big)$, что функция $K(x)$ постоянна, а $Q(x)$ — полином, степень которого не больше $m+1$.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
1 XI. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Мальцев. Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М.-Л., (1948).
2. А. Г. Нафталевич. Литовский математический сборник, I, 1—2, 141—157, (1961).
3. А. Г. Нафталевич. Мат. сборник 56 (98), 3, 309—324, (1962).

TOLYDINIŲ FUNKCIJŲ MATRICOS 2-OS RŪŠIES PERIODŲ AIBĖS STRUKTŪRA

A. NAFTALEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe įvedama (A) pavidalo matricos antros rūšies periodo sąvoka ir nagrinėjama tokių periodų aibės struktūra.

ÜBER DIE STRUKTUR DER MENGE DER PERIODEN 2-TER ART EINER MATRIX STETIGER FUNKTIONEN

A. NAFTALEWITSCH

(Zusammenfassung)

Es sei $F(x)$ die Matrix (A) mit den Elementen $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$. Die letzten seien Funktionen der reellen Variablen, die aber auch imaginäre Werte haben können.

Die reelle Zahl α, $\alpha\neq 0$, nennen wir eine Periode 2-ter Art der Matrix $F(x)$, wenn es eine Matrix komplexer Zahlen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}=\| a_{kl} \|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$, gibt, so dass die Gleichung (B) gilt.

In der Arbeit wird die Struktur der Menge der Perioden 2-ter Art einer Matrix $F(x)$, die mindestens in einem Punkte stetig ist, untersucht. Es wird bewiesen, dass die Menge solcher Perioden entweder leer ist oder aus einer Folge $\{k\alpha\}$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$, besteht oder aber alle reellen Zahlen enthält. Das letztere tritt dann und nur dann ein, wenn die Matrix $F(x)$ einer Differentialgleichung von der Art (C) genügt (in der Gleichung (C) ist mit M, $M=\| m_{kl} \|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$, eine Matrix komplexer Zahlen bezeichnet).