II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ВОПРОСАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

В. Г. СПРИНДЖУК

В классификации К. Малера $\big((1), (2)\big)$ трансцендентное число ω называется S-числом, если для него существует такая постоянная λ, что для всех целочисленных полиномов $P(x)=a_0+a_1 x+\ldots+a_n x^n$ имеет место при любом $n=1, 2\ldots$ неравенство

$$|P(\omega)|>ch^{-n\lambda},$$

где $h=\max|a_i|$ — высота полинома P и $c=c(n, \lambda, \omega)$ не зависит от h. Обозначим при данном n через $\Theta_n(\omega)$ точную нижнюю грань тех λ, для которых указанное утверждение имеет место. Хорошо известно, что всегда

$$\Theta_n(\omega)\geqslant 1, \quad \Theta_n(\omega)\geqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

в зависимости от того, вещественно или комплексно ω (см., например, монографию Т. Шнейдера (16), стр. 96). Малер (3) доказал, что почти все (в смысле меры Лебега) числа суть S-числа, что почти всегда

$$\Theta(\omega)\leqslant 4, \quad \Theta(\omega)\leqslant \frac{7}{2},$$

где $\Theta(\omega)=\sup\limits_{n=1, 2 \ldots}\Theta_n(\omega)$, в зависимости от того, вещественно или комплексно ω, и высказал предположение, что почти всегда соответственно

$$\Theta(\omega)=1, \quad \Theta(\omega)=\frac{1}{2}.$$

И. Ф. Коксма (5), улучшая результат Малера, доказал, что почти для всех ω имеют место неравенства

$$\Theta(\omega)\leqslant 3, \quad \Theta(\omega)\leqslant \frac{5}{2},$$

а В. Левек (6), улучшая этот результат, доказал, что

$$\Theta(\omega)\leqslant 2, \quad \Theta(\omega)\leqslant \frac{3}{2}.$$

соответственно почти для всех вещественных и почти для всех комплексных ω. В недавнее время Каш и Фолькманн $\big((13), (14)\big)$ улучшили результат Левека для комплексных ω, доказав, что почти всегда $\Theta(\omega)\leqslant 1$.

Можно доказать гипотезу Малера, показав, что при всех n $\Theta_n(\omega)\leqslant 1$, $\Theta_n(\omega)\leqslant\frac{1}{2}$ почти для всех вещественных и комплексных ω соответственно. В случае $n=1$ это легко доказывается. В случае $n=2$ для веще венных

ω более сильное утверждение было доказано в 1949 г. И. П. Кубилюсом (7), и позднее еще улучшено (8). Для комплексных ω Ф. Каш (10) доказал, что $\Theta_2(\omega)=\frac{1}{4}$, а Б. Фолькманн (12) доказал, что $\Theta_3(\omega)=\frac{1}{3}$ почти для всех чисел ω.

Заметим, что в случае вещественных ω для доказательства гипотезы Малера может быть применён известный „принцип переноса" А. Я. Хинчина $\big((9),\ (4)\big)$.

В настоящей работе мы показываем, что существуют такие числа Θ_n, η_n, что почти всегда

$$\Theta_n(\omega)=\Theta_n, \quad \Theta_n(\omega)=\eta_n$$

соответственно для вещественных и комплексных ω. Числа Θ_n, η_n удовлетворяют неравенствам

$$1\leqslant\Theta_n\leqslant 2-\frac{2}{n}, \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\leqslant\eta_n\leqslant 1-\frac{3}{2n} \qquad (n\geqslant 2)$$

и, кроме того, $\eta_3=\frac{1}{3}$. Равенство $\Theta_2=1$ принадлежит Кубилюсу (7), а неравенства для Θ_n при $n\geqslant 3$ принадлежат Кашу и Фолькманну (11), как и равенства $\eta_2=\frac{1}{4}$, $\eta_3=\frac{1}{3}$ $\big([10],\ [12]\big)$.

Далее мы касаемся связи между S-числами Малера и S^*-числами Коксма.

В классификации чисел, предложенной И. Ф. Коксма (5), трансцендентное число ω называется S^*-числом, если для ω существует такая постоянная λ, что для всех алгебраических чисел α степени не более n и высоты h имеет место неравенство

$$|\omega-\alpha|>ch^{-1-n\lambda},$$

где $c=c(n,\lambda,\omega)$ не зависит от h. При данном n определим $\Theta_n^*(\omega)$ как точную нижнюю грань тех λ, для которых имеет место указанное утверждение. Величина $\Theta^*(\omega)=\sup\limits_{n=1,2,\dots}\Theta_n^*(\omega)$ называется типом Коксма числа ω (в отличие от типа Малера $\Theta(\omega)$ числа ω). Известно, что всегда

$$\Theta^*(\omega)\leqslant\Theta(\omega)\leqslant\Theta^*(\omega)+1$$

(см. Шнейдер (16), стр. 74 и 82).

Мы показываем, что существуют такие числа Θ_n^*, η_n^*, что почти всегда

$$\Theta_n^*(\omega)=\Theta_n^*, \quad \Theta_n^*(\omega)=\eta_n^*$$

соответственно для вещественных и комплексных ω, при этом имеют место неравенства

$$1\geqslant\Theta_n^*\geqslant\frac{2\Theta_n-1}{3} \qquad (n\geqslant 3),$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\geqslant\eta_n^*\geqslant\frac{4\eta_n-1}{6}-\frac{1}{6n} \qquad (n\geqslant 4).$$

Правые части этих неравенств остаются верными при замене постоянных Θ_n, Θ_n^*, η_n, η_n^* на соответствующие функции от ω. Из этого следует, в частности, что для всякого ω можно найти бесконечную последовательность алгебраических чисел α степени не более n и высоты h, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega-\alpha|<h^{-1-n\lambda+\varepsilon}, \qquad \varepsilon>0,$$

где $\lambda=\frac{1}{3}$, $n\geqslant 3$, если ω — вещественное число, и $\lambda=\frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{n}\right)$, $n\geqslant 4$, если ω — комплексное число.

Наконец, мы рассматриваем „задачу Малера" для полиномов с ограниченными дискриминантами (см. теорему 7).

Работа написана под влиянием частых бесед с профессором И. П. Кубилюсом, которому я глубоко признателен за внимание и дружеское участие.

Несколько замечаний о применяемой символике.

Соотношение $X\ll Y$, где X, Y — положительные переменные величины, означает неравенство $X<cY$, где c — величина, не зависящая от X, Y.

Соотношение $X\asymp Y$ между теми же величинами означает, что $c_1 X<Y<c_2 X$, где c_1 $c_2>0$ и не зависят от X, Y. Мы говорим в этом случае, что X, Y одного порядка.

Через $c(n)$ мы везде обозначаем положительные функции от n, с которыми оперируем по формальным правилам

$$c(n)+c(n)=c(n), \quad c(n)\cdot c(n)=c(n),$$

имеющим тот смысл, что сумма и произведение функций указанного класса опять есть функция того же класса.

1. ОБЩИЕ ЛЕММЫ

В дальнейшем мы обозначаем через P целочисленный полином

$$P(x)=a_0+ax+\ldots+a_n x^n, \qquad a_n\neq 0$$

степени $n\geqslant 2$. Корни полинома P обозначаем через $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, так что

$$P(x)=a_n(x-\varkappa_1)\ldots(x-\varkappa_n).$$

Часто вместе с полиномом P мы рассматриваем полиномы

$$P_{(l)}(x)=P(x+l) \quad \text{и} \quad \overline{P}(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

а также полином $\overline{P_{(l)}}$, который получается из P сначала операцией (l), затем $\overline{P}$. Дискриминант полинома P обозначаем $D(P)$. Если $a_0=0$, то мы полагаем $D(\overline{P})=D(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, 0)$, если считать, что $D(P)=D(a_0, a_1, \ldots a_n)$. Это последнее замечание относится лишь к лемме 1.

Лемма 1. *Дискриминант $D(P)$ обладает свойствами*

$$D(P_{(l)})=D(\overline{P})=D(P).$$

Доказательство. Первое свойство непосредственно следует из равенства

$$D(P)=a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(\varkappa_i-\varkappa_j)^2.$$

Предполагая, что $a_0\neq 0$, находим

$$(1)\ \varkappa P'(\varkappa)=\varkappa P'(\varkappa)-nP(\varkappa)=-\varkappa^{n-1}\overline{P}'\left(\frac{1}{\varkappa}\right),$$

и далее

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(P)=a_n^{n-2}\prod_{i=1}^{n} P'(x_i)=(-1)^n(x_1\ldots x_n)^{n-2}a_n^{n-2}\prod_{i=1}^{n}\bar{P}'\left(\frac{1}{x_i}\right)=$$

$$=(-1)^{n(n-1)}\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{n-2}a_n^{n-2}\prod_{i=1}^{n}\bar{P}'(x_i^{-1})=a_0^{n-2}\prod_{i=1}^{n}\bar{P}'(x_i^{-1}).$$

Лемма 2. *Для произвольного полинома P имеем*

$$\max_{(l)}|P(l)|\geqslant c(n)\max_{(i)}|a_i|,$$

где l, i принимают значения $0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Представим полином $P(x)$ интерполяционной формулой Лагранжа, взяв узлами интерполяции $x=0, 1, \ldots, n$

$$P(x)=\sum_{l=0}^{n}P(l)\frac{A(x)}{A'(l)(x-l)}, \qquad A(x)=x(x-1)\ldots(x-n).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$a_i=c_{i0}P(0)+c_{i1}P(1)+\ldots+c_{in}P(n),$$

где c_{ij} ограничены постоянной $c(n)$ $(i, j=0, 1, \ldots, n)$.

Лемма 3. *Пусть $P=P_1\ldots P_k$ и пусть h, соответственно h_i, — высоты полиномов P, соответственно P_i. Тогда имеет место*

$$h\asymp h_1\ldots h_k.$$

Доказательство. Из соотношения $P=P_1\ldots P_k$ следует $P_{(l)}=P_{1(l)}\ldots$ $\ldots P_{k(l)}$, $\bar{P}=\bar{P}_1\ldots\bar{P}_k$. Выберем l так, чтобы $|P(l)|=\max\limits_{(l')}|P(l')|$, $0\leqslant l'\leqslant n$, и рассмотрим полином

$$Q=\bar{P}_{(l)}=\bar{P}_{1(l)}\ldots\bar{P}_{k(l)}.$$

В силу леммы 2 все корни полинома Q ограничены постоянной $c(n)$, и потому для Q теорема справедлива, ибо высоты полиномов Q, $\bar{P}_{i(l)}$ имеют порядки старших коэффициентов. Но высоты полиномов $\bar{P}_{i(l)}$, P_i — одного порядка.

Лемма 4. *Если P не имеет кратных корней, то всегда*

$$|P'(x)|>c(n)|D(P)|^{1/2}h^{-(n-2)},$$

но если x — комплексный корень, то также

$$|P'(x)|^2>c(n)|Im\,x|\,|D|(P)|^{1/2}h^{-(n-3)}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|x_i|\leqslant c(n)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$|D(P)|=|a_n|^{n-2}\prod_{i\neq j}|x_i-x_j|=|a_n|^2\prod_{i\neq\nu}|x_\nu-x_i|^2\cdot|a_n|^{2n-4}\prod_{\substack{i\neq j\\ i,j\neq\nu}}|x_i-x_j|.$$

Так как $P'(x_\nu)=a_n\prod\limits_{i\neq\nu}(x_\nu-x_i)$, то находим

$$|D(P)|\leqslant c(n)|P'(x_\nu)|^2h^{2h-4}.$$

Аналогично для $\mu \neq \nu$

$$|D(P)| = |P'(\varkappa_\nu)|^2 |P'(\varkappa_\mu)|^2 |a_n|^{2n-6} |\varkappa_\mu - \varkappa_\nu|^{-2} \prod_{\substack{i \neq j \\ i,\, j \neq \mu,\, \nu}} |\varkappa_i - \varkappa_j|.$$

Если здесь взять $\varkappa_\nu = \varkappa$, $\varkappa_\mu = \bar{\varkappa}$ для комплексного $\varkappa$, то получим

$$|D(P)| \leqslant c(n) |P'(\varkappa)|^4 |Im\varkappa|^{-2} h^{2n-6}.$$

Если теперь P — произвольный полином, то для полинома $\bar{P}_{(l)}$ теорема верна в силу предыдущего, при условии, что l выбрано так, как в доказательстве леммы 3, ибо тогда корни $\varkappa'$ полинома $\bar{P}_{(l)}$ удовлетворяют условию $|\varkappa'| \leqslant c(n)$. Очевидно, $\varkappa' = (\varkappa - l)^{-1}$.

Применяя исходную формулу (1) из доказательства леммы 1, находим для вещественного $\varkappa$

$$|P'(\varkappa)| = |P'_{(l)}(\varkappa - l)| = |P'_{(l)}(\varkappa'^{-1})| = |\varkappa'|^{-(n-2)} |\bar{P}'_{(l)}(\varkappa')| \geqslant c(n) |\bar{P}'_{(l)}(\varkappa')|.$$

Если же $\varkappa$ — комплексный корень, то аналогично

$$|P'(\varkappa)|^2 |Im\varkappa|^{-1} = |\varkappa'|^{-2(n-2)} |\bar{P}'(\varkappa')|^2 |\varkappa'|^2 |Im\varkappa'|^{-1} =$$

$$= |\varkappa'|^{-2(n-1)} |\bar{P}'(\varkappa')|^2 |Im\varkappa'|^{-1} \geqslant c(n) |\bar{P}'(\varkappa')|^2 |Im\varkappa'|^{-1},$$

так как

$$|Im\varkappa| = \frac{1}{2} |\varkappa - \bar{\varkappa}| = \frac{1}{2} |\varkappa - l|^2 \left| \frac{1}{\varkappa - l} - \frac{1}{\bar{\varkappa} - l} \right| = \frac{1}{|\varkappa'|^2} |Im\varkappa'|.$$

Из этого сразу получается доказательство леммы в общем случае, так как в силу леммы 1 $D(P)$ и $D(\bar{P}_{(l)})$ равны.

Лемма 5. *Пусть ω — произвольное вещественное или комплексное число, P — полином без кратных корней и*

$$|\varkappa_1 - \omega| = \min_{(i)} |\varkappa_i - \omega| \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда имеем

$$|\omega - \varkappa_1| \leqslant c(n) \frac{h^{n-2}}{|D(P)|^{1/2}} |P(\omega)|,$$

где h — высота P. Если $\varkappa_1$ — комплексный корень, то имеем также

$$|\omega - \varkappa_1|^2 \leqslant c(n) \frac{h^{n-3}}{|D(P)|^{1/2}} |Im\varkappa|^{-1} |P(\omega)|^2.$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы достаточно показать, что $\min_{(i)} |\omega - \varkappa_i| \leqslant c(n) |P(\omega)|\ |P'(\varkappa_1)|^{-1}$. Но действительно

$$|\varkappa_i - \varkappa_1| \leqslant |\varkappa_i - \omega| + |\omega - \varkappa_1| \leqslant 2 |\omega - \varkappa_i|$$

и поэтому

$$|\omega - \varkappa_1|\ |P'(\varkappa_1)| = |\omega - \varkappa_1|\ |a_n| \prod_{i \neq 1} |\varkappa_1 - \varkappa_i| \leqslant 2^{n-1} |a_n| \prod_i |\omega - \varkappa_i|.$$

Лемма 6. *Пусть в условиях предыдущей леммы $|P(\omega)| < h^{-n\lambda}$, где h — высота P и λ — некоторая константа. Тогда при $n \geqslant 3$*

$$|\omega - \varkappa_1| < c(n) h^{-1-n\lambda_1} |D(P)|^{-1/2}, \qquad \lambda_1 = \frac{2\lambda - 1}{3}.$$

Если же ω — *комплексное число и* $n \geqslant 4$, *то сверх того имеем*

$$|\omega-\varkappa_1|^2 < c(n,\ Im\,\omega)\, h^{-5/3-n\lambda_1}\, |D(P)|^{-1/6}, \qquad \lambda_1=\frac{2\lambda-1}{3},$$

если только выполняется неравенство $|P(\omega)| < h^{-\frac{n}{2}\lambda}$, $\lambda > 0$.

Доказательство. Из равенства

$$|D(P)| = |P'(\varkappa_1)|^2\, |D(P_1)|,$$

где $P_1 = P(x-\varkappa_1)^{-1}$, применяя лемму 4, найдем в случае $|D(P_1)| < h^{2n-4-2n\rho}$, что

$$|\omega-\varkappa_1| \ll \frac{h^{-n\lambda+n-2-n\rho}}{|D(P)|^{1/2}}.$$

В случае же $|D(P_1)| \geqslant h^{2n-4-2n\rho}$, опять применяя эту лемму, найдем

$$|\omega-\varkappa_2| \ll \frac{|P_1(\omega)|\, h^{n-3}}{|D(P_1)|^{1/2}} \ll \frac{h^{-n\lambda-1+n\rho}}{|\omega-\varkappa_1|}.$$

Мы считаем здесь, что $\varkappa_2$ — ближайший к ω после $\varkappa_1$ корень полинома P. Таким образом, мы имеем

$$|\omega-\varkappa_1| \ll \max\left(\frac{h^{-n\lambda+n-2-n\rho}}{|D(P)|^{1/2}},\quad h^{-\frac{1}{2}(n\lambda-n\rho+1)}\right).$$

Выберем ρ так, чтобы выражения в скобках стали равными. Тогда найдем

$$|\omega-\varkappa_1| \ll h^{-1-n\left(\frac{2\lambda-1}{3}\right)}\, |D(P)|^{-1/4}.$$

В случае комплексного ω это рассуждение можно несколько уточнить. Очевидно, в этом случае можно считать $\varkappa_1$ комплексным корнем полинома P. Из равенства

$$|D(P)| = |P'(\varkappa_1)|^2\, |P'(\varkappa_1)|^2 \frac{|D(P_1)|}{|\varkappa_1-\bar{\varkappa}_1|^2} = |P'(\varkappa_1)|^4 \frac{|D(P_1)|}{|Im\,\varkappa_1|^2},$$

где $P_1 = P(x-\varkappa_1)^{-1}(x-\varkappa_2)^{-1}$, опять с помощью леммы 4 находим в случае $|D(P_1)| < h^{2n-6-n\rho}$, что

$$|\omega-\varkappa_1|^2 < c(n;\ Im\,\omega)\, \frac{h^{-n\lambda-n\rho+n-3}}{|D(P)|^{1/5}}.$$

В случае же $|D(P_1)| \geqslant h^{2n-6-n\rho}$ находим

$$|\omega-\varkappa_2|^2 < c(n;\ Im\,\omega)\, \frac{h^{-n\lambda+n\rho-3}}{|\omega-\varkappa_1|}.$$

Здесь также мы считаем, что $\varkappa_2$ ближайший к ω после $\varkappa_1$ корень полинома P и что $\varkappa_2$ — комплексный корень. Таким образом, получаем

$$|\omega-\varkappa_1|^2 < c(n;\ Im\,\omega) \max\left(\frac{h^{-n(\lambda+\rho-1)-3}}{|D(P)|^{1/5}},\quad h^{-1\ n(\lambda-\rho)-\frac{1}{2}}\right),$$

откуда аналогично предыдущему следует

$$|\omega-\varkappa_1| < c(n;\ Im\,\omega)\, h^{-1-n\left(\frac{2\lambda-1}{6}\right)}\, |D(P)|^{-1/10}.$$

Лемма 7. *Пусть* σ, τ — *вещественные числа,* $0<\tau<1$, $\tau \geqslant -\frac{1}{2}$. *Тогда интеграл*

$$\int\limits_{\max|\alpha_i|\leqslant 1,\ |\alpha_n|\geqslant\tau} \cdots \int |D(\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_n)|^{\tau}\, d\alpha_0 \ldots d\alpha_n$$

сходится.

Доказательство. Область интегрирования $V_n = V_n(o)$ разобьем на подобласти $V_{r,k}(\tau)$ соответственно числу r вещественных и числу $2k$ комплексных корней полинома $p(z) = p(z;\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_n) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n$, относя к $V_{r,k}(o)$ точки $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ с указанным свойством. Мы докажем сходимость интеграла отдельно в областях $V_{r,k}(\tau)$.

Обозначая через $\varkappa_i$ вещественные и через λ_i комплексные корни полинома $p(z)$, имеем

$$\alpha_0 = (-1)^n \alpha_n S_n(\varkappa_1,\ \ldots,\ \varkappa_r;\ \lambda_1,\ \bar{\lambda}_1,\ \ldots,\ \lambda_k,\ \bar{\lambda}_k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-1} = -\alpha_n S_1(\varkappa_1,\ \ldots,\ \varkappa_r;\ \lambda_1,\ \bar{\lambda}_1,\ \ldots,\ \lambda_k,\ \bar{\lambda}_k),$$

где S_i i-ая элементарная симметрическая функция от корней полинома $p(z)$. Для простоты вычислений введем новые переменные, полагая

$$t_0 = \alpha_n,\quad t_i = \varkappa_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),\quad \lambda_j = u_j + iv_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Тогда мы имеем $S_l(\varkappa_i;\ \lambda_j,\ \bar{\lambda}_j) = T_l(t_i;\ u_j,\ v_j)$, и область $V_{r,k}$ перейдет в подобласть области U, определяемой неравенствами

$$o \leqslant |t_0| \leqslant 1,\quad |t_i| \leqslant \frac{n}{\tau},\quad |u_j|^2 + |v_j|^2 \leqslant \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель преобразования

$$J = \frac{\partial(\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_n)}{\partial(t_0,\ \ldots,\ u_k,\ v_k)}.$$

Полагая $S_0^{(j)} = 1$, $S_{l-1}^{(j)} = S_l(x_1,\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_n)$, будем иметь, очевидно, $S_l = x_j S_{l-1}^{(j)} + S_l^{(j)}$. Теперь находим

$$\frac{\partial T_l}{\partial t_j} = \frac{\partial S_l}{\partial \varkappa_j} = S_{l-1}^{(j)} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial u_j} = \frac{\partial S_l}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial S_l}{\partial \bar{\lambda}_j},$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial v_j} = i\left(\frac{\partial S_l}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial S_l}{\partial \bar{\lambda}_j}\right) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Последние два равенства дают

$$\frac{\partial T_l}{\partial u_j} + i\frac{\partial T_l}{\partial v_j} = 2\frac{\partial S_l}{\partial \bar{\lambda}_j},$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial u_j} - i\frac{\partial T_l}{\partial v_j} = 2\frac{\partial S_l}{\partial \lambda_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Применяя эти соотношения, находим $I = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(-2i)^r t_0^n \Delta_n$, где Δ_n есть определитель

$$\begin{vmatrix} S_{n-1}^{(1)} & & S_{n-1}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1^{(1)} & \ldots & S_1^{(n)} \\ S_0^{(1)} & \ldots & S_0^{(n)} \end{vmatrix}$$

и, следовательно,

$$I = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(-2i)^r t_0 \prod_{i<j} (\varkappa_j - \varkappa_i).$$

Таким образом, $|I| = 2^r |t_0|\, |D(\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_n)|^{1/2}$, откуда и следует наша лемма.

Следствие. *При* $\tau \geqslant -\frac{1}{2}$ *сходится интеграл*

$$\int\limits_{\max|\alpha_i|\leqslant 1} \cdots \int |D(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)|^{\tau} d\alpha_0 \ldots d\alpha_{n-1}.$$

Доказательство. Принимая во внимание однородность функции $D(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ и применяя теорему Фубини, легко получаем этот результат из предыдущей леммы.

2. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧАХ

Пусть множество $\mathfrak{M}$ вещественных или комплексных чисел ω обладает тем свойством, что если ω принадлежит $\mathfrak{M}$, то также $\omega+l$, $a\omega$, ω^{-1}, где l, a — произвольные целые числа, принадлежат множеству $\mathfrak{M}$. Такое свойство множества $\mathfrak{M}$ удобно назвать S-свойством. В частности, S-свойство Малера и S^*-свойство Коксма относятся к этому типу свойств.

Далее, если множество $\mathfrak{M}$, обладающее некоторым свойством (например, S-свойством) таково, что на любом интервале (области) часть множества $\mathfrak{M}$, заключенная внутри этого интервала (области), имеет лебеговскую меру, равную или нулю, или длине (площади) этого интервала (области), то мы будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ с данным свойством подчиняется „закону нуля-единицы". Известны примеры множеств с конкретными арифметическими свойствами, подчиняющихся закону нуля-единицы, известны и общие теоремы, гарантирующие выполнение этого закона при определенных условиях (см., например, работу Кноппа (15)). Нижеследующая лемма устанавливает подчинение этому закону множеств, обладающих S-свойством.

Лемма 8. *Если измеримое множество $\mathfrak{M}$ вещественных чисел ω вместе с ω всегда содержит $\omega+r$, где r — рациональное число, то $\mathfrak{M}$ подчиняется закону нуля-единицы.*

Если измеримое множество $\mathfrak{M}$ комплексных чисел ω вместе с ω всегда содержит $a\omega+r$, где a, r — рациональные числа, то $\mathfrak{M}$ подчиняется закону нуля-единицы.

Доказательство. Рассмотрим случай вещественных чисел ω. Если $\mathfrak{M}$ — положительные меры, то существует хотя бы одна точка ω_0 метрической плотности множества $\mathfrak{M}$. Взяв $\varepsilon>0$ произвольно малым, мы находим, что часть множества $\mathfrak{M}$, лежащая на интервале $(-\tau+\omega_0, \omega_0+\tau)$, имеет меру, большую $(1-\varepsilon)\cdot 2\tau$ для всех $\tau<\tau_0=\tau_0(\varepsilon)$. Но тогда на любом интервале (α, β) длины $\lambda=\beta-\alpha$ мера множества точек, принадлежащих $\mathfrak{M}$, будет больше, чем $(1-\varepsilon)\cdot 2\tau\left(\left[\frac{\lambda}{2\tau}\right]-1\right)$. Устремляя к нулю сначала τ, затем ε, мы приходим к нужному результату.

В случае комплексных ω рассуждения аналогичны.

В дальнейшем нам будет полезна следующая

Лемма 9. *Если для каждого числа из некоторого ограниченного множества вещественных или комплексных чисел ω положительной лебеговской* *меры существует бесконечная последовательность полиномов* $P=a_0+a_1x+ +\ldots+a_nx^n$, *обладающих свойством*

$$|P(\omega)|<h^{-n\lambda}, \quad \lambda>0,$$

то существует ограниченное множество положительной меры, для всех точек которого неравенство

$$|P(\omega)|<c(n, \omega)h^{-n\lambda}$$

удовлетворяется бесконечной последовательностью полиномов P *с тем условием, что*

$$\max\{|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|\}\leqslant|a_n|=h.$$

Доказательство. Применяем лемму 2 и замечаем, что при отображениях $\omega\to\omega+l$, $\omega\to\omega^{-1}$ множества положительной меры переходят во множества положительной меры.

3. О ПРОБЛЕМЕ К. МАЛЕРА

Пусть $\lambda>0$ и пусть $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ — множество тех вещественных чисел ω, для которых $0<\omega<1$ и

$$|P(\omega)|>h^{-n\lambda}, \quad h>h_0(n, \lambda, \omega)$$

при всех полиномах P степени n. Множество $\mathfrak{M}_n(\lambda)$ измеримо по Лебегу и в силу леммы 8 подчиняется закону нуля-единицы. Это означает, что существует такое число Θ_n, что

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}_n(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{если } \lambda<\Theta_n,\\ 1, & \text{если } \lambda>\Theta_n.\end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{M}(\lambda)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n(\lambda)$ и пусть Θ — точная нижняя грань тех λ, для которых $\mathfrak{M}(\lambda)$ имеет положительную меру. Тогда, аналогично предыдущему,

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{если } \lambda<\Theta,\\ 1, & \text{если } \lambda>\Theta.\end{cases}$$

Если $\lambda<\Theta$, то хотя бы при одном $n=n_0(\lambda)$ будет $\operatorname{mes}\mathfrak{M}_n(\lambda)=0$, т. е. $\lambda\leqslant\Theta_n$ при $n=n_0(\lambda)$. Это значит, что $\Theta\leqslant\sup\Theta_n\,(n=1, 2, \ldots)$. Если $\lambda>\Theta$, то при всех n должно быть $\operatorname{mes}\mathfrak{M}_n(\lambda)=1$, $\lambda\geqslant\Theta_n$. Это значит, что $\Theta\geqslant\Theta_n\,(n=1, 2, \ldots)$.

Так как рассуждения в случае комплексных ω вполне аналогичны, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Почти все вещественные числа имеют один и тот же n-ый частный тип* Θ_n *и один и тот же общий тип* Θ, *при этом* $\Theta=\sup\Theta_n\,(n=1, 2, \ldots)$.

Почти все комплексные числа имеют один и тот же n-ый частный тип η_n, *один и тот же общий тип* η, *при этом* $\eta=\sup\eta_n\,(n=1, 2, \ldots)$.

Гипотеза Малера, таким образом, эквивалентна утверждению, что $\Theta_n\leqslant1$, $\eta_n\leqslant\frac{1}{2}$ для всех n.

Нахождение верхних границ для Θ_n, η_n сводится к изучению свойств неприводимых полиномов, ввиду справедливости следующего утверждения.

Лемма 10. *Определим $\tilde{\Theta}_n$ для неприводимых полиномов аналогично тому, как Θ_n определялось для всех полиномов. Тогда*

$$\Theta_n \leqslant \sup \tilde{\Theta}_\nu, \quad \nu \leqslant n,$$

и аналогично

$$\eta_n \leqslant \sup \tilde{\eta}_\nu, \quad \nu \leqslant n.$$

Доказательство. Если $|P(\omega)| < h^{-n\lambda}$, $P = P_1 \dots P_k$, где P_i целочисленные полиномы степеней n_i, то хотя бы для одного полинома P_i будет $|P_i(\omega)| \leqslant h^{-n_i\lambda}$, и применением леммы 3 легко завершаем доказательство.

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$1 \leqslant \Theta_n \leqslant 2 - \frac{2}{n}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant \eta_n \leqslant \frac{7}{8} - \frac{5}{4n}$$

для всех $n = 2, 3, \dots$; кроме того, $\eta_3 = \frac{1}{3}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассматривать ω с условием $|\omega| < 1$, ибо мы можем применить преобразование $\omega \to \omega^{-1}$.

Рассмотрим случай вещественных ω.

Пусть $\mathfrak{A}_n(h)$ — множество неприводимых полиномов $P = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ с условием $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant |a_n| = h$. Предположим, что λ таково, что множество тех ω, для которых существует бесконечная последовательность полиномов P с условием

$$|P(\omega)| < h^{-n\lambda}, \qquad h \text{ — высота } P,$$

имеет положительную меру. Мы можем считать, что P — неприводимые полиномы. Применяя лемму 9, находим, что аналогичное условие выполняется для всех точек некоторого ограниченного множества положительной меры, но полиномы P уже можно считать принадлежащими $\mathfrak{A}_n(h)$. С помощью обычных теоретико-множественных рассуждений находим далее, что для данного λ невозможна сходимость ряда

$$\sum_h h^{-n\lambda} \sum_{P \in \mathfrak{A}_n(h)} h^{n-2} |D(P)|^{-1/2}, \tag{1}$$

как это получается применением первого утверждения леммы 5.

Рассмотрим подробнее внутреннюю сумму. Имеем

$$\sum_{P \in \mathfrak{A}_n(h)} |D(P)|^{-1/2} \leqslant 2 \sum_{|a_i| \leqslant h}' |D(a_0, \dots, a_{n-1}, h)|^{-1/2} =$$

$$= 2h \sum_{|a_i| \leqslant h}' \left| D\left(\frac{a_0}{h}, \dots, \frac{a_{n-1}}{h}, 1\right)\right|^{-1/2} h^{-n}.$$

Штрих над знаком суммы означает, что суммирование распространяется на те P, для которых $D(P) \neq 0$. Последняя сумма есть не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\int_{\max |\alpha_i| \leqslant 1} \dots \int |D(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, 1)|^{1/2} d\alpha_0 \dots d\alpha_{n-1},$$

который конечен в силу следствия из леммы 7. Поэтому, если выбрать слагаемые последней суммы, которые соответствуют точкам $\left(\frac{a_0}{h}, \dots, \frac{a_{n-1}}{h}, 1\right)$, удаленным от поверхности $D(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)=0$ более, чем на h^{-1}, то их сумма оценится величиной интеграла, т. е. постоянной. Число же оставшихся слагаемых есть $O(h^{n-1})$. Далее,

$$\sum_{P\in\mathfrak{U}_n(h),\ |D(P)|>h^{2n-4}}'' |D(P)|^{-1/2}=O(h^{n-1})\cdot h^{-(n-2)}=O(h),$$

если в сумме Σ'' взять слагаемые из числа оставшихся с условием $|D(F)|>h^{2n-4}$. Таким образом,

$$\sum_{P\in\mathfrak{U}_n(h)} |D(P)|^{-1/2}<c(n)h+\sum_{P\in\mathfrak{U}_n(h),\ |D|\leqslant h^{2n-4}} |D(P)|^{-1/2} \tag{2}$$

и, кроме того, применяя тривиальную оценку для дискриминанта $|D(P)|\geqslant 1$, находим

$$\sum_{P\in\mathfrak{U}_n(h)} |D(P)|^{-1/2}<c(n)h^{n-1}.$$

Мы заключаем, что $\lambda\leqslant 2-\frac{2}{n}$, что и доказывает теорему в случае вещественных ω.

В случае комплексных ω рассуждение вполне аналогично для $n\geqslant 4$, но вместо леммы 5 применяем вторую часть леммы 6.

Равенство $\eta_3=\frac{1}{3}$ следует из таких рассуждений. Вместе с целочисленным полиномом P, удовлетворяющим условию $|P(\omega)|<h^{-3\lambda}$, рассмотрим полином $p(x)=h^{-1}P(x)$. Если $p(\omega)\to 0$ при $h\to\infty$, то для $p(x)=(x-\varkappa_1)\times$ $\times(x-\varkappa)(x-\bar\varkappa)$, где $\varkappa_1$ — вещественный корень полинома P, мы будем иметь, например,

$$\varkappa\to\omega,\quad \bar\omega\ |\ \bar\varkappa\qquad (h\to\infty).$$

Это значит, что $p'(\omega)\neq 0$, и мы находим $|P'(\omega)|>c(\omega)h$, откуда легко получаем $\eta_3=\frac{1}{3}$.

Аналогично получается $\eta_2=\frac{1}{4}$.

Теорема 3. *Для справедливости гипотезы Малера достаточно выполнения оценки*

$$N\left\{P\in\mathfrak{A}_n(h),\quad 0\neq|D(P)|<x\right\}<x^{1/2}h^{1+\varepsilon},\qquad \varepsilon>0 \tag{3}$$

для всех x с условием $1<x<h^{2n-4}$, где $N\{\ldots\}$ означает число полиномов P с условием, указанным в скобках.

Доказательство. Положим $R(u)=N\left\{P\in\mathfrak{A}_n(h),\ |D(P)|=u\right\}$. Тогда

$$\sum_{P\in\mathfrak{U}_n(h)}' |D(P)|^{-1/2}=\sum_{u\leqslant h^{2n-4}} R(u)\cdot u^{-1/2}=0\Big(\sum_{u\leqslant h^{2n-4}} s(u)\,u^{-3/2}\Big),$$

где штрих над знаком суммы означает, что мы берем лишь те P, для которых $|D(P)|\leqslant h^{2n-4}$, и где $s(v)=\sum_{u\leqslant v} R(u)$. По условию теоремы последняя сумма есть

$$0\Big(h^{1+\varepsilon}\sum_{v}\frac{1}{v}\Big)=O(h^{1+\varepsilon}\log h).$$

В соединении с неравенством (2) и с помощью рассуждений, изложенных в доказательстве предыдущей теоремы, найдём для вещественных чисел ω, что $\Theta_n \leqslant 1$, а для комплексных ω, с помощью леммы 5, найдем $\eta_n \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ для $n=2, 3, \ldots$.

Заметим, что для справедливости оценки

$$\sum_{P \in \mathfrak{U}_n(h)} |D(P)|^{-1/2} = O(h^{1+\varepsilon})$$

необходимо и достаточно выполнения условия (3), но для доказательства справедливости гипотезы Малера при $n \geqslant 4$ достаточно знать оценку (3) лишь для больших x, как это получается с помощью леммы 6.

3. О ПРИБЛИЖЕНИИ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

Прежде чем заняться названной задачей, мы еще раз вернемся к связи между Θ_n и $\tilde{\Theta}_n$, а также η_n и $\tilde{\eta}_n$. Можно думать, что эта связь выражается просто равенствами $\Theta_n = \tilde{\Theta}_n$ и $\eta_n = \tilde{\eta}_n$, однако в настоящее время, применяя теорему 2, мы можем доказать только, что справедлива

Теорема 4. *Существует бесконечная последовательность n, для которой $\Theta_n = \tilde{\Theta}_n$. Для каждого $n \geqslant 4$ имеет место равенство*

$$\Theta_n = \frac{m}{n} \tilde{\Theta}_m$$

с некоторыми m, удовлетворяющим неравенству $\frac{n+1}{2} < m \leqslant n$.

Существует также бесконечная последовательность n, для которой $\eta_n = \tilde{\eta}_n$. Для каждого $n \geqslant 5$ имеет место равенство

$$\eta_n = \frac{m}{n} \tilde{\eta}_m$$

с некоторым m, удовлетворяющим неравенству $\frac{n}{2} < m \leqslant n$. Что касается оставшихся номеров n, то для них $\Theta_n = \tilde{\Theta}_n$, $\eta_n = \eta_n$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{\Theta}_n < \Theta_n$ и пусть дана последовательность полиномов P со свойством

$$|P(\omega)| < h^{-n(\Theta_n - \varepsilon)}, \qquad h \to \infty.$$

Здесь ω — число, имеющее n-ый частный тип Θ_n, и ε — произвольно малое число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \Theta_n - \tilde{\Theta}_n$. Тогда очевидно, что при достаточно большом h все полиномы P будут приводимы, пусть $P = P_1 \ldots P_k$. Среди делителей P_i полинома лишь один, скажем P_1, может иметь степень $n_1 > \frac{n}{2}$. Для $i=2, 3, \ldots, k$ положим $\varepsilon_i = \frac{n}{n_k} \varepsilon$. Мы найдем тогда, что

$$|P(\omega)| > c(n, \omega, \varepsilon) h_1^{-n(\tilde{\Theta}_{n_1} - \varepsilon_1)} \ldots h_k^{-n_k(\tilde{\Theta}_{n_k} + \varepsilon_k)},$$

где $h_1, \ldots, h_k$ — высоты полиномов $P_1, \ldots, P_k$. Сравнивая это с предыдущим неравенством, получаем

$$c(n, \omega, \varepsilon) > h_1^{n\Theta_n - n_1 \tilde{\Theta}_{n_1}} \ldots h_k^{n\Theta_n - n_k \tilde{\Theta}_{n_k}} (h_1 \ldots h_k)^{-2n\varepsilon}$$

в силу $h \asymp h_1 \ldots h_k$ (лемма 3). Но, по теореме 2 (см. доказательство),

$$n\Theta_n - n_i \tilde{\Theta}_{n_i} \geqslant n - n_i \left(2 - \frac{2}{n_i}\right) \geqslant 1,$$

если только $n_i \leqslant \frac{n+1}{2}$. Из этого мы заключаем, что $P=P_1 Q$, где полином P_1 неприводим, имеет степень m с условием $\frac{n+1}{2} < m \leqslant n$, а полином Q имеет высоту $\leqslant h^{\varepsilon}$, откуда и следует утверждение теоремы.

В случае комплексных ω рассуждение аналогично.

Пусть теперь $\lambda > -\frac{1}{n}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{N}_n(\lambda)$ тех ω, для которых $0<\omega<1$ и выполняется неравенство

$$|\omega-\alpha| > h^{-1-n\lambda}, \quad h > h_0(n, \lambda, \omega),$$

каково бы не было алгебраическое число α степени $\leqslant n$ и высоты h. Очевидно, множество $\mathfrak{N}_n(\lambda)$ обладает S-свойством и в силу леммы 8 подчиняется закону нуля-единицы. Поэтому существует такое число Θ_n^*, что

$$\operatorname{mes} \mathfrak{N}_n(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda < \Theta_n^*, \\ 1, & \text{если } \lambda > \Theta_n^*. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{N}(\lambda) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n(\lambda)$. Множество $\mathfrak{N}(\lambda)$ также обладает S-свойством, и для него существует такое число Θ^*, что

$$\operatorname{mes} \mathfrak{N}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda < \Theta^*, \\ 1, & \text{если } \lambda > \Theta^*. \end{cases}$$

Аналогично рассмотренному случаю с Θ_n, здесь также находим $\Theta^* = \sup \Theta_n^*$ $(n=1, 2, \ldots)$. Хорошо известно, что $\Theta_n^* \leqslant 1$, $\Theta_1^* = 1$, поэтому $\Theta^* = 1$. Число Θ^*, таким образом, плохо отражает сущность вопроса для почти всех ω. Для нас гораздо важнее знание величины $\inf \Theta_n^*$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}_n(\lambda)$ — дополнительное к $\bar{\mathfrak{N}}_n(\lambda)$. Для каждого числа $\omega \in \bar{\mathfrak{N}}_n(\lambda)$ существует бесконечная последовательность алгебраических чисел α степени $\leqslant n$ и высоты h, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega - \beta| \leqslant h^{-1-n\lambda}.$$

Множество $\bar{\mathfrak{N}}(\lambda) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{N}}_n(\lambda)$ обладает S-свойством, и для него существует такое число Θ_*, именно $\Theta_* = \inf \Theta_n^*$, что

$$\operatorname{mes} \bar{\mathfrak{N}}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda > \Theta^*, \\ 1, & \text{если } \lambda < \Theta^*. \end{cases}$$

Числа Θ^* и Θ_* естественно называть соответственно верхним и нижним общими типами.

Мы доказали, таким образом, следующую теорему для вещественных ω.

Теорема 5. *Почти все вещественные числа имеют один и тот же n-ый частный тип Θ_n^* и один и тот же верхний и нижний общие типы*

$$\Theta^* = \sup \Theta_n^*, \quad \Theta_* = \inf \Theta_n^* \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Аналогичные утверждения имеют место и для комплексных чисел ω.

Теорема 6. *Частные типы Θ_n, η_n, Θ_n^*, η_n^* связаны неравенствами*

$$1 \geqslant \Theta_n^* \geqslant \frac{2\Theta_n - 1}{3} \qquad (n \geqslant 3),$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \geqslant \eta_n^* \frac{4\eta_n - 1}{6} - \frac{1}{6n} (n \geqslant 4).$$

Доказательство. По теореме 4 при заданном n существует такое m, что $n\Theta_n = m\tilde{\Theta}_m$, $m \leqslant n$. Применяя лемму 6, мы находим для всякого числа ω, имеющего m-ый тип $\tilde{\Theta}_m$ (по отношению ко множеству неприводимых полиномов ст. m), что существует бесконечная последовательность алгебраических чисел α степени m и высоты h, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega-\alpha| < h^{-1-m\left(\frac{2\tilde{\Theta}_m-1}{3}\right)+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Поэтому $n\Theta_n^* \geqslant m\dfrac{2\tilde{\Theta}_m-1}{3} = \dfrac{2n\Theta_n-m}{3} \geqslant n\left(\dfrac{2\Theta_n-1}{3}\right)$, что и доказывает теорему для вещественных ω.

Для комплексных ω рассуждения аналогичны.

В качестве следствия из этой теоремы отметим, что для почти всех вещественных ω существует бесконечная последовательность алгебраических чисел α степени $\leqslant n$ и высоты h, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega-\alpha| < h^{-1-\frac{1}{3}n+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0 \qquad (n \geqslant 3),$$

а для комплексных ω — удовлетворяющих неравенству

$$|\omega-\alpha| < h^{-1-\frac{n}{6}\left(1-\frac{3}{n}\right)+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0 \qquad (n \geqslant 4).$$

На самом же деле это верно не только для *почти* всех вещественных и *почти* всех комплексных чисел, но просто для *всех* вещественных и *всех* комплексных чисел. Действительно, величины $\Theta_n(\omega)$, $\eta_n(\omega)$ рассматриваемые как функции числа ω, всегда удовлетворяют неравенствам

$$\Theta_n(\omega) \geqslant 1, \quad \eta_n(\omega) \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

что хорошо известно, (см. Шнейдер (16), стр. 69). Кроме того, всегда существуют такие p, q, что p, $q \leqslant n$

$$n\Theta_n(\omega) = p\tilde{\Theta}_p(\omega), \quad n\eta_n(\omega) = q\tilde{\eta}_q(\omega),$$

как это следует из рассуждений, аналогичных проведенным в теореме 4. Теперь применение леммы 6 приводит к указанному результату.

5. ЕЩЕ ОБ ОДНОМ S-СВОЙСТВЕ

Пусть $\lambda > -\frac{1}{n}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{L}_n(\lambda)$ тех ω из интервала (0,1), для которых существует бесконечная последовательность целочисленных полиномов P n-ой степени и высоты h, удовлетворяющих неравенству

$$|P(\omega)| < h^{-n\lambda}$$

при условии, что $0 \neq |D(P)| \leqslant L(\omega)$, где $L(\omega) = L(n, \lambda, \omega)$ зависит только от n, λ, ω. Очевидно, множество $\mathfrak{L}_n(\lambda)$ обладает S-свойством и для него существует число μ_n, для которого

$$\operatorname{mes} \mathfrak{L}_n(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda > \mu_n, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda < \mu_n. \end{cases}$$

Рассматривая комплексные ω, можно аналогично определить константы ν_n, соответствующие μ_n.

Очевидно, при всех n имеют место неравенства

$$\mu_n \leqslant \Theta_n \quad \nu_n \leqslant \eta_n,$$

однако, даже допуская справедливость гипотезы Малера, мы получаем лишь, что

$$\mu_n \leqslant 1, \quad \nu_n \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

тогда как на самом деле величины μ_n, ν_n значительно меньше, на что указывает следующая

Теорема 7. *Имеют место неравенства*

$$\mu_n \leqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{2n} + \frac{3}{n(n-2)} \qquad (n \geqslant 3),$$

$$\nu_n \leqslant \frac{1}{4} - \frac{5}{4n} + \frac{3}{2n(n-2)} \qquad (n \geqslant 4).$$

Доказательство. Рассмотрим случай вещественных чисел ω; в случае комплексных ω рассуждения аналогичны.

Пусть для ω существует бесконечная последовательность полиномов, удовлетворяющих неравенству

$$|P(\omega)| < h^{-n\lambda},$$

причем всегда $0 \neq |D(P)| \leqslant L$, где L будем считать фиксированным. По лемме 6 тогда

$$\min |\omega - \varkappa| \ll h^{-n\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \frac{2\lambda - 1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Из этого следует, что мера множества тех ω, для которых имеется бесконечная последовательность решений неравенства $|P(\omega)| < h^{-n\lambda}$, $h \geqslant h_0$ не превосходит

$$c(n) \sum_{h(\varkappa) \geqslant h_0} \min |\omega - \varkappa| \ll \sum_{h \geqslant h_0,\ h = h(P)} h^{-n\lambda_1}. \tag{1}$$

Суммировать нужно по всем полиномам с $0 \neq |D(P)| \leqslant L$. Все полиномы с одинаковыми дискриминантами развиваются на классы полиномов, соответствующие классам форм данного дискриминанта, не превосходящего L. Число h — высоту полинома P — мы можем считать значением некоторой бинарной формы f, которую раз навсегда выберем в классе форм данного дискриминанта (см. доказательство леммы 9). Итак, сумма (1) разбивается на конечное число сумм вида

$$\sum_{h \geqslant h_0,\ h = h(f)} h^{-n\lambda} \ll \sum_{|f(x,\,y)| \geqslant h_0} |f(x, y)|^{-n\lambda_1}.$$

Последний переход оправдывается тем, что все формы f' данного класса получаются из f с помощью некоторой подстановки $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, причем высота $h(f') = |f(\alpha, \gamma)|$, а при фиксированных α, γ существует $\leqslant c(n)$ форм той же высоты h, получаемых изменением β, δ.

Теперь ясно, что верхней оценкой для μ_n будет

$$\frac{2\mu_n - 1}{3} + \frac{1}{n} \leqslant \lambda',$$

где λ' — точная нижняя грань тех λ_1, для которых

$$\sum_{|x|\leqslant y} |f(x, y)|^{-n\lambda_1} < \infty.$$

По теореме Рота (см. (17), стр. 128)

$$|f(x, y)| = a|x-\alpha_1 y| \ldots |x-\alpha_n y| \gg |y|^{n-2-\varepsilon},$$

поэтому легко находим $\lambda' \leqslant \frac{2}{n(n-2)}$, откуда и следует утверждение теоремы.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 12. VI. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Mahler K., Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logaritmus, I, J. reine und angew. Math. **166**, 1932 (118—136).
2. Mahler K., Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logaritmus, II, J. reine und angew. Math. **166**, 1932 (137—150).
3. Mahler K., Über das Maß der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann. **106**, 1932 (131—139).
4. Mahler K., Neur Beweis eines Satzes von A. Khintchine, **1**, 1936 (961—962).
5. Koksma J. F., Über die Mahlersche Klassenenteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, Mh. Math. Physik. **48**, 1939 (176—189).
6. Le Veque W. J., Note on S-numbers, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 1953 (189—190).
7. Кубилюс И. П., О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел, ДАН СССР, 67, 1949 (783—785).
8. Kubilius. J. Об одной метрической задаче теории диофантовых приближений, Liet. TSR Mokslų Akademijos Darbai, serija B, 2 (18), 1959 (3-7).
9. Хинчин А. Я. Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Rend. Circ. mat. Palermo, **50**, 1926 (170—195).
10. Kash F., Über eine metrische Eigenshaft der S-Zahlen, Math. Zeitshr. **70**, 1958 (263—270).
11. Kash F. und Volkmann B., Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen, Math. Annalen, **136**, 1958 (442—453).
12. Volkmann B., Zum kubischen Fall der Mahlerschen Vermutung, Math. Annalen, **139**, 1959 (87—90).
13. Volkmann B., Ein metrischer Beitrag über Mahlersche S-Zahlen, I, J. reine und angew. Math. **203**, N 3—4, 1960 (154—156).
14. Kasch F., Ein metrisher Beitrag über Mahlersche S-Zahlen, II, J. reine und angew. Math. **203**, N 3—4, 1960 (157—159).
15. Knopp K., Mengentheoretishe Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, Math. Annalen, **95**, 1926 (409—426).
16. Schneider Th., Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1957.
17. Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, Москва, 1961.

SKAIČIŲ APROKSIMAVIMO ALGEBRINIAIS SKAIČIAIS BENDRIEJI KLAUSIMAI

V. SPRINDŽIUK

(Reziumė)

Tegu ω yra realus arba kompleksinis transcendentinis skaičius, P yra n-jo laipsnio dauglanaris su sveikais koeficientais. Pažymėkime

$$-\lim_{h\to\infty}\frac{\ln|P(\omega)|}{\ln n}=\begin{cases} n\Theta_n(\omega), & \text{jei } \omega \text{ realus,}\\ n\eta_n(\omega), & \text{jei } \omega \text{ kompleksinis,}\end{cases}$$

kur h — daugianario P aukštis. Analogiškai

$$-\lim_{h\to\infty}\frac{\ln h|\omega-x_1|}{\ln h}=\begin{cases} n\Theta_n^*(\omega), & \text{jei } \omega \text{ realus,}\\ n\eta_n^*(\omega), & \text{jei } \omega \text{ kompleksinis,}\end{cases}$$

kur $|\omega-x_1|=\min|\omega-x_i|$, x_i — daugianario P šaknys. Dydžiai $\Theta_n(\omega)$, $\Theta_n^*(\omega)$, $\eta_n(\omega)$, $\eta_n^*(\omega)$ vaidina pagrindinį vaidmenį K. Malerio ([1], [2]) ir J. F. Koksmos [5] skaičių klasifikacijoje.

Darbe tarp kitų rezultatų įrodoma:

(1) egzistuoja tokios konstantos Θ_n, η_n, Θ_n^*, η_n^*, kad beveik visiems ω

$$\Theta_n(\omega)=\Theta_n,\quad \eta_n(\omega)=\eta_n,\quad \Theta_n^*(\omega)=\Theta_n^*,\quad \eta_n^*(\omega)=\eta_n;$$

$$\Theta_n\leqslant 2-\frac{2}{n},\quad \eta_n\leqslant 1-\frac{3}{2n}\qquad (n\geqslant 2);\tag{2}$$

$$\Theta_n^*(\omega)\geqslant\frac{2\Theta_n(\omega)-1}{3}\qquad (n\geqslant 3),$$

$$\eta_n^*(\omega)\geqslant\frac{4\eta_n(\omega)-1}{6}-\frac{1}{6n}\qquad (n\geqslant 4).$$

ÜBER EINIGE ALLGEMEINE FRAGEN DER APPROXIMATION VON ZAHLEN DURCH ALGEBRAISHE ZAHLEN

W. SPRINDJUK

(Zusammenfassung)

Es sei ω eine reelle oder komplexe transzendente Zahl, P ein ganzzahliges Polynom n-ten Grades. Man setzt

$$-\lim_{h\to\infty}\frac{\ln|P(\omega)|}{\ln h}=\begin{cases} n\Theta_n(\omega), & \text{falls } \omega \text{ reell,}\\ n\eta_n(\omega), & \text{falls } \omega \text{ komplex ist,}\end{cases}$$

$$-\lim_{h\to\infty}\frac{\ln h|\omega-x_1|}{\ln h}=\begin{cases} n\Theta_n^*(\omega), & \text{wenn } \omega \text{ reell,}\\ n\eta_n^*(\omega), & \text{wenn } \omega \text{ komplex ist.}\end{cases}$$

h bedeutet die Höhe des Polynoms P und $|\omega-x_i|=\min|\omega-x_1|$, wo x_i — die Wurzeln des Polynoms P sind. Die Grössen $\Theta_n(\omega)$, $\Theta_n^*(\omega)$, $\eta_n(\omega)$, $\eta_n^*(\omega)$ spielen die Hauptrolle bei der Klasseneinteilung der Zahlen nach K. Mahler ([1], [2]) und J. F. Koksma [5].

Es gilt die folgenden Behauptungen:

(1) man kann die Konstanten Θ_n, η_n, Θ_n^*, η_n^* finden derart. dass für fast alle ω

$$\Theta_n(\omega)=\Theta_n,\quad \eta_n(\omega)=\eta_n,\quad \Theta_n^*(\omega)=\Theta_n^*,\quad \eta_n^*(\omega)=\eta_n$$

sind;

$$\Theta_n\leqslant 2-\frac{2}{n},\quad \eta_n\leqslant 1-\frac{3}{2n}\qquad (n\geqslant 2);\tag{2}$$

$$\Theta_n^*(\omega)\geqslant\frac{2\Theta_n(\omega)-1}{3}\qquad (n\geqslant 3),$$

$$\eta_n^*(\omega)\geqslant\frac{4\eta_n(\omega)-1}{6}-\frac{1}{6n}\qquad (n\geqslant 4).$$
