II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РОСТА И СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

В предлагаемой работе рассмотрены некоторые вопросы роста целых трансцендентных решений уравнений в частных производных, дополняющие результаты нашей работы [3].

Приводится также один критерий отсутствия целых трансцендентных решений уравнений в частных производных. При доказательстве всех сформулированных ниже предложений используется обобщение теоремы Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных, найденное нами в [4].

1. Для нужд последующего мы изложим здесь формулировки трех теорем о целых трансцендентных функциях многих комплексных переменных.

Представим целую трансцендентную функцию n переменных

$$u=F(z_1, z_2, \dots, z_n) \tag{1.1}$$

в диагональный ряд

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n)=\sum_{j=0}^{\infty} A_j(z_1, z_2, \dots, z_n), \tag{2.1}$$

где $A_j(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — однородные полиномы степени j. Через A_j мы обозначаем максимум функции $|A_j(z_1, z_2, \dots, z_n)|$ на полицилиндре $S(1):|z_j|=1$; $j=1, 2, \dots, n$, а через $\nu(R)$ — центральный индекс ряда

$$h(z)=\sum_{j=0}^{\infty} A_j z^j. \tag{3.1}$$

Пусть, наконец, $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ есть точка, в которой функция $|F(z_1, z_2, \dots, z_n)|$ достигает максимум на полицилиндре $S(R)$.

Справедливы следующие три теоремы.

Теорема А. *(Вимана—Валирона)* [4].

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta_1^{i_1}\zeta_2^{i_2}\dots\zeta_n^{i_n}\dfrac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}F(\zeta)}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\dots\partial z_n^{i_n}}}{[\nu(R)]^{i_1+i_2+\dots+i_n}F(\zeta)}-\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{i_j}\right)=0, \tag{4.1}$$

где $\alpha_j=\alpha_j(\zeta)\geqslant 0$; $j=1, 2, \dots, n$, $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$.

При переходе к пределу следует, быть может, выпускать множество интервалов ограниченной логарифмической меры оси R.

Для изложения теоремы Б и В мы вводим обозначение:

$$M(R)=\max_{S(R)}\left|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right|,$$

Теорема Б.

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{\nu(R)}\,\frac{M'(R)}{M(R)}=1,$$

где при переходе к пределу следует, возможно, выпускать множество интервалов оси R конечной логарифмической меры, причем на каждом отрезке оси R их не больше конечного числа.

Теорема В. *Функция $M(R)$ кусочно аналитична на каждом конечном отрезке оси R, причем всегда существуют односторонние производные.*

Функция $\ln M(R)$ является выпуклой функцией от $\ln R$ и, следовательно, выражение $RM'(R)/M(R)$ возрастает $\bigl($заметим, что всегда $M'(R-0)\leqslant \leqslant M'(R+0)\bigr)$ [5].

Очевидно, что в теоремах А, Б и В мы вместо полицилиндра $S(R)$: $|z_j|=R$; $j=1, 2, \ldots, n$ можем взять полицилиндр $|z_j|=B_jR$; $j=1, 2, \ldots, n$ с постоянными $B_j>0$; $j=1, 2, \ldots, n$.

2. В. настоящей работе мы рассматриваем дифференциальные уравнения в частных производных вида:

$$F^*\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u}{\partial z_1^{j_1}\ldots\partial z_n^{j_n}}\right)=0,$$

где F^* — полином относительно всех своих переменных. Для дальнейшего последнее уравнение мы преобразуем в уравнение

$$F\left(z_1, \ldots, z_n, u, z_1\frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots, z_n\frac{\partial u}{\partial z_n}, \ldots, z_1^{j_1}\ldots z_n^{j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u}{\partial z_1^{j_1}\ldots\partial z_n^{j_n}}\right)=0. \quad (1.2)$$

Очевидно, такое приведение всегда возможно, причем функция F опять оказывается полиномом по всем своим переменным. Если в функцию F ввести вместо $\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u}{\partial z_1^{j_1}\ldots\partial z_n^{j_n}}$ выражение $\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u}{\partial z_1^{j_1}\ldots\partial z_n^{j_n}}\,t$, то

$$F\left(z_1, \ldots, z_n, ut, z_1\frac{\partial u}{\partial z_1}t, \ldots, z_n\frac{\partial u}{\partial z_n}t, \ldots, z_1^{j_1}\ldots z_n^{j_n}\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u}{\partial z_1^{j_1}\ldots\partial z_n^{j_n}}\,t\right)=$$

$$=F_q t^q+F_{q-1}t^{q-1}+\ldots+F_0, \quad (2.2)$$

где F_j; $j=0, 1, \ldots, q$ — многочлены по совокупности переменных. Уравнение (1.2) мы переписываем следующим образом:

$$F_q+F_{q-1}+\ldots+F_0=0. \quad (3.2)$$

3. Все последующее изложение верно для уравнений (1.2) $\bigl($или (3.2)$\bigr)$ при произвольном конечном числе переменных не менее двух. Для простоты мы ограничиваемся случаем двух независимых переменных. Перенесение на случай n переменных тривиально.

Позже нам понадобится следующее простое замечание. Пусть $P(z, w)$ полином степени m по совокупности переменных. Обозначаем $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\vartheta}$. При постоянных φ и ϑ существует, как легко видеть, предел

$$\lim_{R\to\infty}\frac{P(ARe^{i\varphi},\ BRe^{i\vartheta})}{R^m}=\tilde{P}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta}),$$

где $\tilde{P}(z, w)$ — однородный полином степени m.

Предположим сейчас, что функция $u=u(z, w)$ — есть целое трансцендентное решение уравнения (1.2). Для определения возможного порядка этого решения воспользуемся теоремой А (п. 1). Пусть (ζ, η) есть точка, в которой достигается $\max|u(z, w)|$ на бицилиндре $|z|=AR$, $|w|=BR$, т. е.

$$\max_{\substack{|z|=AR\\ |w|=BR}}|u(z,\ w)|=|u(\zeta,\ \eta)|=M(R).$$

Подставим эти значения в уравнение (1.2). По теореме А в точке (ζ, η) имеют место соотношения

$$\zeta^i\eta^j\,\frac{\partial^{i+j}u(\zeta,\ \eta)}{\partial z^i\,\partial w^j}=(\alpha^i\beta^j+\varepsilon_{ij})\,\nu^{i+j}(R)\,u(\zeta,\ \eta), \tag{1.3}$$

где $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(R)\to 0$ при $R\to\infty$, $\alpha+\beta=1$; $\alpha\geqslant 0$; $\beta\geqslant 0$. На основании (1.3) выражения F_p в левой части (3.2) принимают вид:

$$F_p\left(\zeta,\ \eta,\ u,\ \zeta\frac{\partial u}{\partial z},\ \eta\frac{\partial u}{\partial w},\ \ldots,\ \zeta^i\eta^j\frac{\partial^{i+j}u}{\partial z^i\,\partial w^j}\right)=$$

$$=F_p\left(\zeta,\ \eta,\ u,\ (\alpha+\varepsilon_{10})\,u\nu,\ (\beta+\varepsilon_{01})\,\nu u,\ \ldots,\ (\alpha^i\beta^j+\varepsilon_{ij})\,\nu^{i+j}u\right)=$$

$$=F_p\left(\zeta,\ \eta,\ 1,\ (\alpha+\varepsilon_{10})\,\nu,\ (\beta+\varepsilon_{01})\,\nu,\ \ldots,\ (\alpha^i\beta^j+\varepsilon_{ij})\,\nu^{i+j}\right)u^p.$$

Таким образом, равенство (3.2) может быть переписано в следующей формуле:

$$\sum_{p=0}^{q}F_p\left(\zeta,\ \eta,\ 1,\ (\alpha+\varepsilon_{10})\,\nu,\ (\beta+\varepsilon_{01})\,\nu,\ \ldots,\ (\alpha^i\beta^j+\varepsilon_{ij})\,\nu^{i+j}\right)u^p=0. \tag{2.3}$$

При фиксированных k и t выражение

$$\frac{R^k\nu^t(R)}{|u(\zeta,\ \eta)|}=\frac{R^k\nu^t(R)}{M(R)}\to 0$$

при $R\to\infty$, исключая, быть может, множество интервалов оси R конечной логарифмической меры (см. [3]). Разделив теперь (2.3) на u^q, найдем:

$$F_q\left(\zeta,\ \eta,\ 1,\ (\alpha+\varepsilon_{10})\,\nu,\ (\beta+\varepsilon_{01})\,\nu,\ \ldots,\ (\alpha^i\beta^j+\varepsilon_{ij})\,\nu^{i+j}\right)=o(1). \tag{3.3}$$

Приведем сейчас левую часть равенства (3.3) по степеням ν. Членов с одной и той же степенью ν^k имеется, вообще говоря, несколько. Если в (2.3) в выражении F_q входит член

$$P(z,\ w)\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{m_{10}}\left(w\frac{\partial u}{\partial w}\right)^{m_{01}}\ldots\left(z^i w^j\frac{\partial^{i+j}u}{\partial z^i\,\partial w^j}\right)^{m_{ij}},$$

то в выражении (3.3) ему соответствует член

$$P(\zeta,\ \eta)\,(\alpha+\varepsilon_{10})^{m_{10}}(\beta+\varepsilon_{01})^{m_{01}}\ldots(\alpha^i\beta^j+\varepsilon_{ij})^{m_{ij}}\,\nu^{m_{01}+m_{10}+\ldots+(i+j)m_{ij}}.$$

Перемножив выражения, стоящие в скобках, придем к выражению

$$P(\zeta, \eta)(\alpha^t \beta^s + \tilde{\varepsilon}_{ts})\, \nu^{m_{10}+m_{01}+\ldots+(i+j)m_{ij}},$$

где $t+s=m_{10}+m_{01}+\ldots+(i+j)m_{ij}$ и $\tilde{\varepsilon}_{ts}\to 0$ при $R\to\infty$. Таким образом, коэффициент у ν^k выглядит следующе:

$$\sum_{\gamma,\ t+s=k} P^{\gamma}_{ts}(\zeta, \eta)(\alpha^t \beta^s + \tilde{\varepsilon}^{\gamma}_{ts})\ ^{*)}, \tag{3.4}$$

и вместо (3.3) найдем уравнение

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{\gamma,\ t+s+k} P^{\gamma}_{ts}(\zeta, \eta)(\alpha^t \beta^s + \tilde{\varepsilon}^{\gamma}_{ts})\nu^k = o(1). \tag{3.5}$$

4. Нас интересует поведение выражения (4.3) при $R\to\infty$. Пусть полином $P^{\gamma}_{ts}(\zeta, \eta)$ есть степени σ^{γ}_{ts} по совокупности переменных. Простые выкладки при $|\zeta|=AR$, $|\eta|=BR$ дают:

$$\sum_{\gamma,\ t+s=k} P^{\gamma}_{ts}(ARe^{i\varphi}, BRe^{i\vartheta})(\alpha^t \beta^s + \tilde{\varepsilon}^{\gamma}_{ts}) =$$

$$= \sum_{\gamma,\ t+s=k} R^{\sigma^{\gamma}_{ts}}\left[\bar{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta}) + \frac{1}{R}\tilde{Q}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta}, R)\right](\alpha^t \beta^s + \varepsilon^{\gamma}_{ts}),$$

причем выражения $\tilde{Q}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta}, R)$ ограничены. Обозначим

$$\sigma_k = \max_{\gamma,\ t+s=k} (\sigma^{\gamma}_{st}).$$

Тогда

$$\sum_{\gamma,\ t+s=k} R^{\sigma^{\gamma}_{ts}}\left[\bar{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta}) + \frac{1}{R}\tilde{Q}\left(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta}, \frac{1}{R}\right)\right](\alpha^t \beta^s + \tilde{\varepsilon}^{\gamma}_{ts}) =$$

$$= R^{\sigma_k}\left(\sum_{\gamma,\ t+s=k}{}' \bar{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\psi})(\alpha^t \beta^s + \tilde{\varepsilon}^{\gamma}_{ts}) + \frac{1}{R}Q_k\right) =$$

$$= R^{\sigma_k}\left(\sum_{\gamma,\ t+s=k}{}' \bar{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta})\alpha^t \beta^s + O\left(\frac{1}{R}\right)\right),$$

где суммирование проводится по всем γ, $t+s=k$ таких, что $\sigma^{\gamma}_{ts}=\sigma_k$.

Сказанное показывает, что уравнение (5.3) преобразуется в уравнение

$$\sum_{k=0}^{p} R^{\sigma_k}\left(\sum_{\gamma,\ t+s=k}{}' \bar{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta})\alpha^t \beta^s + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)\nu^k = o(1). \tag{1.4}$$

5. Выражение (1.4) позволяет нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если существуют такие положительные числа A и B, что однородная форма*

$$\sum_{\gamma,\ t+s=k} \bar{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta})\alpha^t \beta^s \tag{1.5}$$

не обращается в нуль при всех действительных φ, ϑ и неотрицательных α и β на прямой $\alpha+\beta=1$, то все целые решения уравнения (1.2) ограничен-

*) Вообще говоря, в (3.3) имеется несколько членов с постоянными t и s в произведении $\alpha^t\beta^s$, поэтому производится суммирование по γ: γ — число целых положительных решений уравнения $m_{10}+m_{01}+\ldots+(i+j)m_{ij}=k$.

ного порядка, не превосходящего некоторого числа λ, общего для всех решений.

Доказательство. В самом деле, из условий теоремы следует, что существует такое число $a>0$, что при $R>R_0$

$$\left|\sum_{\gamma,\, t+s=p} \tilde{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})\,\alpha^t\beta^s+O\left(\frac{1}{R}\right)\right|>a.$$

Кроме того, для всех $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p$

$$\left|\sum_{\gamma,\, t+s=j} \tilde{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})\,\alpha^t\beta^s+O\left(\frac{1}{R}\right)\right|<\tilde{C},$$

где $\tilde{C}>0$ — постоянная, которая от j и R не зависит. Из (1.4) тогда вытекает неравенство

$$\nu^p<C\left(R^{\sigma_{p-1}-\sigma_p}\nu^{p-1}+R^{\sigma_{p-2}-\sigma_p}\nu^{p-2}+\ldots+R^{\sigma_1-\sigma_p}\right);\quad C=\frac{\tilde{C}}{a}. \tag{2.5}$$

Такое же неравенство мы решили в работе [3] и нашли там, что существует такое рациональное число λ, что

$$\nu(R)<DR^{\lambda},$$

где $D>0$ — некоторая постоянная. Заметим, что найденное в работе [3] число λ уменьшить нельзя.

Воспользуемся сейчас теоремой Б. Согласно этой теореме

$$\frac{M'(R)}{M(R)}<DR^{\lambda-1}, \tag{3.5}$$

за исключением, возможно, множества интервалов оси R ограниченной логарифмической меры. Так как по теореме В выражение $\frac{RM'(R)}{M(R)}$ возрастает, то из неравенства (3.5) таким же путем, как это сделано в [3], найдем, что

$$\ln M(R)<D_0R^{\lambda},$$

что и требовалось доказать.

6. Из доказательства теоремы 1 вытекает немедленно

Теорема 2. *При всех прочих условиях теоремы* 1 *и условии, что в* (1.4) *все числа* $\sigma_j-\sigma_p\leqslant 0$; $j=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$, *уравнение* (1.2) *целых трансцендентных решений не имеет.*

Действительно, из (2.5) тогда следует, что функция $\nu(R)$ ограничена, что невозможно для целых трансцендентных функций.

7. Теорема 1 может быть иногда уточнена. Так имеет место

Теорема 3. *Если существуют такие положительные числа* A *и* B, *что все однородные формы по* α *и* β

$$\sum_{\gamma,\, t+s=k} \tilde{P}^{\gamma}_{ts}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})\,\alpha^t\beta^s,$$

$k=0,\ 1,\ \ldots,\ p$ *не обращаются в нуль при всех действительных* φ *и* ϑ *и неотрицательных* α *и* β *на прямой* $\alpha+\beta=1$, *то порядок любого целого трансцендентного решения уравнения* (1.2) *совпадает с одним из чисел* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_\mu$, *являющихся старшими показателями в степенных разложениях корней уравнения*

$$\nu^p+R^{\sigma_{p-1}-\sigma_p}\nu^{p-1}+\ldots+R^{\sigma_0-\sigma_p}=0, \tag{1.7}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки $R=\infty$:

$$\nu = a_j R^{\lambda_j}\left(1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right); \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu\leqslant p. \tag{2.7}$$

Доказательство. В условиях теоремы существуют два положительных числа a и b таких, что при любом k и $R>R_0$

$$0<a=|H_k|=\left|\sum_{\gamma,\ t+s=k}\tilde{P}^{\gamma}_{st}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})\,\alpha^t\beta^s+O\left(\frac{1}{R}\right)\right|<b<\infty. \tag{3.7}$$

При условии (3.7) числа λ_j — старшие показатели степенных разложений (2.7) корней уравнения

$$\sum_{k=0}^{p} H_k R^{\overset{0}{a}_k}\nu^k = o\,(1) \tag{4.7}$$

не зависят от коэффициентов H_k, как это следует из непрерывной зависимости корней от коэффициентов уравнения (4.7) и строения ломаной Ньютона, по которой определяются числа λ_j. В частности, мы получим эти же числа λ_j, если положим $H_k\equiv 1$. Таким путем мы приходим к уравнению (1.6). Наши соображения также показывают, что можно найти такие числа C и D, что корни $\nu_j(R)$ уравнения (4.7) удовлетворяют неравенствам

$$CR^{\lambda_j}<\nu_j(R)<DR^{\lambda_j}$$

и, следовательно, за исключением множества интервалов оси R конечной логарифмической меры,

$$CR^{\lambda_j}<\frac{RM'(R)}{M(R)}<DR^{\lambda_j}.$$

Подобно тому, как это вычислено в [3], найдем, что порядок любого трансцендентного целого решения совпадает с одним из чисел λ_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu$.

Замечание. Нетрудно видеть, что теоремы 1, 2 и 3 верны также, если вместо целых решений рассматривать решения вида

$$u=z^{\sigma}w^{\tau}F(z,\ w), \tag{5.7}$$

где σ, τ — постоянные комплексные числа, а $F(z,\ w)$ — целая трансцендентная функция. При этом порядок функции u мы отождествляем с порядком функции $F(z,\ w)$.

8. Выделим наиболее обозримые случаи.

Теорема 1'. Пусть в линейном уравнении

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{p+q=i} Q_{pq}(z,\ w)\,z^p w^q\frac{\partial^{p+q}u}{\partial z^p\,\partial w^q}=P(z,\ w), \tag{1.8}$$

$Q_{pq}(z)$, $p+q=i$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $P(z,\ w)$ — *полиномы; и по-прежнему*

$$\tilde{Q}_{pq}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})=\lim_{R\to\infty}\frac{Q\,(ARe^{i\varphi},\ BRe^{i\vartheta})}{R^{\overset{0}{a}_{pq}}},$$

где σ_{pq} — степень полинома Q_{pq}. Если существуют такие положительные числа A и B, что при любых неотрицательных α и β на прямой $\alpha+\beta=1$ и действительных φ и ϑ форма

$$\sum_{p+q=n} \bar{Q}_{pq}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})\,\alpha^p\beta^q\neq 0, \tag{2.8}$$

то все решения вида (5.7) *конечного порядка, не превосходящего некоторого постоянного числа* λ.

Если все однородные формы

$$\sum_{p+q=j} Q_{pq}(Ae^{i\varphi},\ Be^{i\vartheta})\,\alpha^p\beta^q\neq 0\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{2'.8}$$

(при всех прочих высказываниях теоремы), то порядок произвольного решения вида (5.7) *совпадает с одним из чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$, *определяемых как старшие показатели степенных разложений корней уравнения*

$$\sum_{j=0}^{n} R^{\sigma_j}\nu^j=0$$

(здесь $\sigma_j=\max\limits_{p+q=j}\sigma_{pq}$) в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема 1″. *Теорема* 1′ *остается в силе, если вместо уравнения* (1.8 *рассматривать уравнение*

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{p+q=j} Q_{pq}(z,\ w)\,z^p w^q\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^p\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)^q=P(z,\ w).$$

Пример 1. Уравнение

$$z(z+w)\,\frac{\partial u}{\partial z}+zw\,\frac{\partial u}{\partial w}=zw\,(w+2z)\,u \tag{3.8}$$

имеет целые трансцендентные решения (например, $u=e^{zw}$). Форма

$$H_1=Ae^{i\varphi}\,\alpha+Be^{i\vartheta}\,\alpha+Ae^{i\varphi}\,\beta=Ae^{i\varphi}+Be^{i\vartheta}\,\alpha.$$

Для того, чтобы форма H_1 обращалась в нуль, необходимо $B\alpha=A$. Далее

$$H_0=ABe^{i(\varphi+\vartheta)}\,(Be^{i\vartheta}+2Ae^{i\varphi}).$$

Для обращения H_0 в нуль необходимо $B=2A$.

Если положить $B=1$, $A=\frac{3}{2}$, то $H_1=0$ при $\alpha=\frac{3}{2}$, а $2A\neq B$. Но $\alpha\leqslant 1$. Поэтому при указанных A и B $H_1\neq 0$ и $H_0\neq 0$ при любых значений $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ с $\alpha+\beta=1$ и любых действительных φ и ϑ. По теореме 1′, чтобы найти порядок произвольного решения вида (5.7) уравнения (3.8) надлежит найти числа σ_1 и σ_2, которые равны 1 и 3 соответственно, так что уравнение (1.7) принимает вид

$$\nu+R^2=0,$$

откуда $\nu=-R^2$. Таким образом, порядок любого решения вида (5.7) уравнения (3.8) равен 2.

Пример 2. В уравнении

$$z(z+w)\frac{\partial u}{\partial z}-zw\frac{\partial u}{\partial w}=z(z+w)u,$$

$$H_1=(Ae^{i\varphi}+Be^{i\vartheta})\alpha-Ae^{i\varphi}\beta=Ae^{i\varphi}(\alpha-\beta)+Be^{i\vartheta}\alpha;\ \alpha,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1.$$

Для того, чтобы $H_1=0$, необходимо

$$A\,|\,\alpha-\beta\,|=B\alpha.$$

Какие бы ни были положительные числа A и B, последнее уравнение имеет решение: при $B\leqslant A\ \frac{\beta}{\alpha}=1\pm\frac{B}{A}$; при $B>A\ \frac{\beta}{\alpha}=1+\frac{B}{A}$. Теорема 1′ здесь не применима. Общее решение рассматриваемого уравнения есть функция

$$u=f(w^2+2wz)\,e^z,$$

где $f(t)$ произвольная аналитическая функция. Как видно из выражения для общего решения, рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет целые решения любого порядка.

Если заменить в исследуемом уравнении знак минус на знак плюс, то его общим решением будет функция

$$u=f\left(we^{-\frac{z}{w}}\right)e^z,$$

где $f(t)$ — произвольная аналитическая функция. Нетрудно видеть, что целыми решениями суть только функции Ce^z, где $C>0$ — произвольная постоянная. Все они первого порядка, в согласии с теоремой 1′ и примером 1.

9. Укажем на несколько случаев, когда условия теорем 1, 3, 1′ и 1″ особенно легко проверяемы. Вернемся к уравнению (3.2) и предположим, что после приведения подобных членов в уравнении (5.3)

$$P_{ts}^{\gamma}(z,\ w)=a_{ts}^{\gamma}P_k(z,\ w), \tag{1.9}$$

где a_{ts}^{γ}, $t+s=k$; $k=0,\ 1,\ \ldots,\ p$ — постоянные числа.

Теорема 1″. *Для справедливости теоремы* 1 *при услоеии* (1.9) *и всех прочих условий теоремы* 1 *достаточно потребовать, чтобы однородная форма с постоянными коэффициентами*

$$\sum_{\gamma,\ t+s=p} a_{ts}^{\gamma}\alpha^t\beta^s$$

не обращалась в нуль при неотрицательных α *и* β *на прямой* $\alpha+\beta=1$.

Для справедливости теоремы 3 *при всех прочих условиях этой теоремы и услозии* (1.9) *достаточно потребовать необращения в нуль всех однородных форм с постоянными коэффициентами*

$$\sum_{\gamma,\ t+s=i} a_{ts}^{\gamma}\alpha^t\beta^s,$$

при неотрицательных α *и* β *на прямой* $\alpha+\beta=1$.

Доказательство этой теоремы вытекает из справедливости следующих двух лемм.

10. Лемма 1. *Пусть* $P_m(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$, $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p<\infty$ — *полиномы произвольных степеней. Можно подобрать такие положительные числа* B_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, *чтобы на полицилиндре* $|z_j|=B_j$; $j=1,\ \ldots,\ n$, *ни один из полиномов* P_m *не обращался в нуль.*

Покажем это. Перепишем каждый полином $P_m(z_1, \ldots, z_n)$ следующим образом:

$$P_m(z_1, \ldots, z_n)=\sum_{j=0}^{n_m} Q_j^m(z_2, z_3, \ldots, z_n)z_1^j, \quad m=1, 2, \ldots, p. \tag{1.10}$$

При этом заметим, что $\sum_{j=0}^{p} n_j>0$ (в противном случае все полиномы зависели бы от меньшего числа переменных, нежели n). Нам надо показать, что можно подобрать такие числа $B_1, B_2, \ldots, B_n$, что, положив $z_j=B_j e^{i\varphi_j}$, $j=1, 2, \ldots, n$,

$$P_m(B_1 e^{i\varphi_1}, B_2, e^{i\varphi_2}, \ldots, B_n e^{i\varphi_n})\neq 0,$$

какие бы не были действительные значения переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Предположим сейчас, что для произвольной конечной совокупности полиномов меньшего числа переменных, чем n, утверждение леммы верно. Это означает, что найдутся такие числа $B_2, B_3, \ldots, B_n$, что ни один из полиномов $Q_j^m(z_2, \ldots, z_n)$; $j=0, 1, \ldots, n_m$, $m=1, 2, \ldots, p$ не обращается в нуль на полицилиндре $|z_j|=B_j$; $j=2, 3, \ldots, n$. Зафиксируем эти значения $B_2, B_3, \ldots, B_n$. Введем обозначение $B_j e^{i\varphi_j}=\eta_j$. Имеем:

$$\left|P_m(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)\right|=\left|\sum_{j=0}^{n_m} Q_j^m(\eta_2, \ldots, \eta_n)\eta_1^j\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|Q_{n_m}^m(\eta_2, \ldots, \eta_n)\right|B_1^{n_m}-\sum_{j=0}^{n_m-1}\left|Q_j^m(\eta_2, \ldots, \eta_m)\right|B_1^j. \tag{2.10}$$

Так как по предположению $Q_{n_m}^m(\eta_2, \ldots, \eta_n)\neq 0$, $m=1, 2, \ldots, p$ ни при каких действительных значениях $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, то существует такое положительное число q_0, что

$$\left|Q_{n_m}^m(\eta_2, \ldots, \eta_n)\right|\geqslant q_0>0; \quad m=1, 2, \ldots, p;$$

С другой стороны, очевидно, имеется число q, что

$$\left|Q_j^m(\eta_2, \ldots, \eta_n)\right|<q$$

при всех j и m. Отсюда и из (2.10) немедленно вытекает неравенство

$$|P_m(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)|\geqslant q_0 B_1^{n_m}-q\sum_{=0}^{n_m-1} B_1^{\gamma-1}=B_1^{n_m}\left(q_0-q\sum_{j=0}^{n_m-1} B_1^{j-n_m}\right). \tag{3.10}$$

Можно, безусловно, определить такое большое число B_1, чтобы

$$q_0>q\sum_{j=0}^{N-1} B_1^{j-N},$$

где $N=\max(n_1\ n_2, \ldots, n_m)$.

Для завершения доказательства достаточно заметить тот очевидный факт, что лемма верна для любой конечной совокупности полиномов от одного независимого переменного.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть* $P_m(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $m=1, 2, \ldots, p$ — *полиномы произвольных степеней. Можно подобрать такие положительные числа* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *чтобы на полицилиндре* $|z_j|=B_jR$, $j=1, 2, \ldots, n$ *при любом* R; $R \geqslant R_0$ *выполнялись неравенства*

$$\left|P_m(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right| \geqslant cR^{n_m}; \quad m=1, 2, \ldots, p, \tag{4.10}$$

где $c>0$ — *постоянное число, от* R *не зависящее,* n_m — *степень* P_m.

Для доказательства леммы перепишем каждый полином $P_m(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в диагональный ряд:

$$P_m(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\sum_{j=0}^{n_m} Q_{jm}(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad m=1, 2, \ldots, p, \tag{5.10}$$

где $Q_{jm}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — однородные полиномы степени j. В соответствии с леммой 1 существуют положительные числа $B_1, B_2, \ldots, B_n$, от R не зависящие, такие, что

$$\left|Q_{n_m m}(B_1 e^{i\varphi_1}, B_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, B_n e^{i\varphi_n})\right| \geqslant q_0 > 0.$$

Очевидно, существует далее такое число q, что

$$\left|Q_{jm}(B_1 e^{i\varphi_1}, B_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, B_n e^{i\varphi_n})\right| < q, \quad j=0, 1, \ldots, n_m, \quad m=1, 2, \ldots, p. \tag{6.10}$$

Из (5.10) и (6.10) немедленно вытекают следующие неравенства:

$$\left|P_m(B_1 Re^{i\varphi_1}, B_2 Re^{i\varphi_2}, \ldots, B_n Re^{i\varphi_n})\right| = \left|\sum_{j=1}^{n_m} R^j Q_{jm}(B_1 e^{i\varphi_1}, B_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, B_n e^{i\varphi_n})\right| \geqslant$$

$$\geqslant q_0 R^{n_m} - q \sum_{j=0}^{n_m-1} R^j \geqslant q_0 R^{n_m}(1-qq_0^{-1}NR^{-1}) > cR^{n_m},$$

если $R>R_0$, где R_0 настолько велико, что $1-qq_0^{-1}NR_0^{-1}>\beta>0$, $N=\max(n_1, \ldots, n_p)$ и $c=q_0(1-\beta)>0$.

Доказательство теоремы 1″ следует немедленно из замечания, что

$$H_j=P_j(Ae^{i\varphi}, Be^{i\vartheta}) \sum_{\gamma,\, t+s=j} a_{ts}^{\gamma} \alpha^t \beta^s.$$

Действительно, необращение в нуль формы H_p или совокупность форм H_j; $j=0, 1, \ldots, p$ зависит лишь от поведения форм

$$\sum_{\gamma,\, t+s=j} a_{ts}^{\gamma} \alpha^t \beta^s,$$

если числа A и B подобраны так, что имеет место лемма 2.

11. Пример 3. В работе [2] нами было доказано, что при $P(z, w)\equiv 0$ и $\underset{p+q=n}{Q_{pq}}(z, w)\equiv a_{pq}\equiv \mathrm{const}$ существует бесконечное множество решений вида (5.7) уравнения (1.8), если однородная форма

$$\sum_{p+q=n} a_{pq} \alpha^p \beta^q$$

не обращается в нуль на прямой $\alpha+\beta=1$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$, причем все эти решения конечного порядка, не превосходящего некоторого постоянного числа (его, вообще говоря, уменьшить нельзя). При более стеснительных условиях теоремы 1‴ можно найти и точный рост таких решений (мы оставляем в стороне вопрос о том, какие из указанных в теореме 1‴ значения порядка в конкретном уравнении достижимы). Условия теоремы 1‴ удовлетворены в следующем уравнении:

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - izw \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} + w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + P(z, w)\left(4z \frac{\partial u}{\partial z} + 3w \frac{\partial u}{\partial w}\right) + Q(z, w) u = 0, \quad (1.11)$$

где $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ — полиномы степеней m и n соответственно. Действительно, однородные формы $\alpha^2 - i\alpha\beta + \beta^2$ и $4\alpha + 3\beta$ не обращаются в нуль на прямой $\alpha + \beta = 1$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$. В соответствии с теоремой 1‴ рост решений определяется из корней уравнения

$$\nu^2 + AR^m \nu + BR^n = 0.$$

Нетрудно проверить, что в окрестности $R = \infty$ решения этого уравнения, возрастающие в бесконечность вместе с R, равны:

$$\text{при} \quad n \geqslant 2m \quad \nu = CR^{\frac{n}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right),$$

$$\text{при} \quad n < 2m \quad \nu = CR^m\left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)$$

и $\nu = CR^{m-n}\left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)$, если дополнительно $m > n$.

Отсюда следует, что порядок произвольного решения равен $\frac{n}{2}$ при $n \geqslant 2m$ и равен либо m, либо $m-n$ при $n < 2m$. В частности, если $P(z, w) \equiv P(z)$; $Q(z, w) \equiv Q(z)$, то можно найти решения, зависящие лишь от z и иллюстрирующие появление всех указанных выше возможностей (ср. с [1]).

Заменим сейчас уравнение (1.11) уравнением

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - izw \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} + w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + P(z, w)\left(4z \frac{\partial u}{\partial z} - 3w\right) \frac{\partial u}{\partial w} + Q(z, w) u = 0. \quad (2.11)$$

Здесь однородная форма $3\alpha - 4\beta$ обращается в нуль при $\alpha = \frac{4}{7}$; $\beta = \frac{3}{7}$. При произвольном полиноме $P(z, w)$ и

$$Q(z, w) = -z^3 w^4 \left[18 - 12i + (22 - 12i) z^3 w^4\right]$$

уравнение (2.11) имеет решение $u = e^{z^3 w^4}$. Степень полинома $Q(z, w)$ равна 14. Если взять полином $P(z, w)$ степени 16, то по теореме 1‴ возможные порядки равнялись бы либо 16, либо 2, но не 7, как это имеет место в настоящем примере. Из этого примера, однако, видно, что возможны иногда уточнения и в том случае, когда какие-либо однородные формы в условии (2′, 8) обращаются в нуль. Нетрудно выписать соответствующие условия, которые выражаются достаточной малостью определенных коэффициентов $Q_{pq}(z, w)$ для того, чтобы рост корней алгебраического уравнения (1.7), возрастающих в бесконечность вместе с R, не зависел от обращающихся в нуль однородных форм. В каждом конкретном случае проверка с помощью ломаной Ньютона чрезвычайно проста (см., например [6]). В нашем примере достаточно потребовать, чтобы степени m и n соответственно полиномов $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ удовлетворяли неравенству $2m \leqslant n$.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
25. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. И. Стрелиц. О росте решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Мат. сб. 46 (18): 4, 1958, 433–450.
2. Ш. И. Стрелиц. Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных. Мат. сб. 1962 (в печати).
3. Ш. И. Стрелиц. О росте целых решений дифференциальных уравнений в частных производных. Мат. сб. 1962 (в печати).
4. Ш. Стрелиц. Обобщение теоремы Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных. Лит. маш. сб., I. 1–2, 1961, 327–354.
5. Ш. Н. Стрелиц. Некоторые свойства максимума модуля аналитических функций многих комплексных переменных. Лит. мат. сб., II, 1, 1962, 153–166
6. Ж. Валирон. Аналитические функции. М., 1957.

KAI KURIE LYGČIŲ DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS SVEIKŲ TRANSCENDENTINIŲ SPRENDINIŲ AUGIMO BEI BUVIMO KLAUSIMAI

Š. STRELICAS

(Reziumė)

Straipsnyje įrodomos penkios teoremos apie lygčių dalinėmis išvestinėmis sveikų transcendentinių sprendinių augimą, kurios papildo mūsų darbo [3] rezultatus.

Taip pat nustatomas vienas kriterijus apie sveikų transcendentinių sprendinių buvimą.

EINIGE BETRACHTUNGEN ÜBER DAS WACHSTUM UND BESTEHEN VON GANZER TRANSZENDENTER LÖSUNGEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

S. STRELIZ

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir fünf Sätze über das Anwachsen ganzer transzendenter Lösungen partieller Differentialgleichungen, die unsere Resultate der Arbeit [3] ergänzen.

Danach legen wir ein Kriterium zur Existenz ganzer transzendenter Lösungen partieller Differentialgleichungen dar.