ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
II LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1962

К ВОПРОСУ ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

П. СУРВИЛА

Пусть во всём дальнейшем $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых случайных величин, с функциями распределения $F_j(x)$, характеристическими функциями $\varphi_j(t)$, математическими ожиданиями $M\xi_j=0$, дисперсиями $D\xi_j=\sigma_j^2$ и третьими абсолютными моментами

$$M|\xi_j|^3=\beta_{3j},\quad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Положим

$$B_n=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2,\quad B_{3n}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{3j},\quad L_n=\frac{B_{3n}}{B_n^3},\quad T_n=\frac{B_n^3}{4B_{3n}},$$

$$Z_n=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j,\quad F_n(x)=P\{Z_n<x\},$$

$$f_n(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right),\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du,\quad \varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots$ — константы.

Для случая независимых, одинаково распределённых случайных величин, имеющих третий абсолютный момент, Б. А. Рогозин [4] получил следующий результат

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{c_1\beta}{\sigma^3\sqrt{n}(1+x^2)},\tag{A}$$

где

$$\sigma^2=D\xi_1,\quad \beta=M|\xi_1|^3.$$

Для неодинаково распределённых независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, Ессееном [2] получено

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant Min\left\{\Delta(n);\ \frac{c_2\Delta(n)\log\frac{1}{\Delta(n)}}{1+x^2}\right\},\tag{B}$$

для $n>n_0$ и всех x, если

$$\Delta(n)=\max_{-\infty\leqslant x\leqslant\infty}|F_n(x)-\Phi(x)|<\frac{1}{2}\quad \text{для}\quad n>n_0,$$

а в случае конечных β_{3j}

$$\Delta(n) \leqslant c_3 L_n. \tag{C}$$

Целью настоящей работы является распространение результата Б. А. Рогозина (А) на случай неодинаково распределённых независимых случайных слагаемых. Получаем результат, в некотором смысле уточняющий результаты (В) и (С). Доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\beta_{3j} < \infty$, $j=1, 2, \ldots$. *Если* $L_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то при всех* $x \in (-\infty, \infty)$ *и при всех* n

$$\left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{C_1 L_n}{1+x^2}.$$

Из только что сформулированной теоремы легко следует

Теорема 2. *При соблюдении условий теоремы* 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F_n(x) - \Phi(x) \right|^p dx = O(L_n^p),$$

для $p > \frac{1}{2}$.

Теорему 1 надо доказать только для n стремящихся к бесконечности, ибо для конечных n она следует из неравенства Чебышева.

Прежде чем перейти к доказательству, приведём вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\beta_{3j} < \infty$, $j=1, 2, \ldots$. *Тогда при* $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$

$$\left| f_n(t) - \varphi'(t) \right| \leqslant c_4 L_n e^{-\frac{t^2}{3}} \{ t^4 + t^2 \},$$

$$\left| f_n''(t) - \varphi''(t) \right| \leqslant c_5 L_n e^{-\frac{t^2}{3}} \{ |t|^5 + |t| \}.$$

Доказательство.

Имеем

$$f_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right), \quad \text{где} \quad \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t}{B_n}x} \, dF_j(x).$$

Так как случайные величины ξ_j имеют конечные абсолютные третьи моменты $\beta_{3j} < \infty$, то $\varphi_j(t)$ имеют ограниченные и равномерно непрерывные производные первого и второго порядков и

$$\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ix}{B_n} e^{i\frac{t}{B_n}x} \, dF_j(x),$$

$$\varphi''\left(\frac{t}{B_n}\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{B_n^2} e^{i\frac{t}{B_n}x} \, dF_j(x), \quad j=1, 2, \ldots .$$

Разлагая $e^{i\frac{t}{B_n}x}$ по степеням t и принимая во внимание, что

$$M\xi_j=0 \quad \text{и} \quad M|\xi_j|^3=\beta_{3j}<\infty, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

получаем

$$\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)=1-\frac{\sigma_j^2}{2B_n^2}t^2+\frac{\Theta_{1j}\beta_{3j}}{6B_n^3}t^3, \tag{1}$$

$$\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)=-\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}t+\frac{\Theta_{2j}\beta_{3j}}{2B_n^3}t^2, \tag{2}$$

$$\varphi_j''\left(\frac{t}{B_n}\right)=-\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}+\frac{\Theta_{3j}\beta_{3j}}{B_n^3}t, \tag{3}$$

где

$$|\Theta_{1j}|\leqslant 1, \quad |\Theta_{2j}|\leqslant 1, \quad |\Theta_{3j}|\leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad j=1,\ 2,\ \ldots .$$

1. Оценим модуль разности $f_n'(t)-\varphi'(t)$.

Имеем:

$$\varphi'(t)=-te^{-\frac{t^2}{2}},\quad f_n'(t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}.$$

Пользуясь соотношением (2), получаем

$$f_n'(t)=\sum_{j=1}^{n}-\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}t\frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Theta_{2j}\beta_{3j}}{2B_n^3}t^2\frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}$$

$$\left|f_n'(t)-\varphi'(t)\right|\leqslant|t|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}\left|\frac{f_n(t)-\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}\right|+$$

$$+t^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{3j}}{2B_n^3}\left|\frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}\right|=|t|\,R_n^{(1)}+t^2R_n^{(2)}. \tag{4}$$

При $|t|\leqslant\sqrt[3]{T_n}$ получаем

$$\left|\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\geqslant 1-\frac{\sigma_j^2}{2B_n^2}t^2\geqslant 1-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sigma_j^2}{B_{3n}^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{3}{4}, \tag{5}$$

так как при всех n и для $j\leqslant n$,

$$\sigma_j^2\leqslant B_{3n}^{\frac{2}{3}}.$$

По лемме Крамера ([3] гл. VII, лемма 3, стр. 93) при $|t| \leqslant T_n$ имеем

$$\left| f_n(t) \right| \leqslant e^{-\frac{t^2}{3}}. \tag{6}$$

Поэтому при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ для всех $j=1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$\frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)} \leqslant \frac{4}{3} e^{-\frac{t^2}{3}}. \tag{7}$$

Из (4) и (7) получаем

$$t^2 R_n^{(2)} \leqslant \frac{2}{3} L_n t^2 e^{-\frac{t^2}{3}}. \tag{8}$$

Используя (1), получаем

$$\left| f_n(t) - \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leqslant \left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + e^{-\frac{t^2}{2}} \left(\frac{\sigma_j^2}{2B_n^2} t^2 + \frac{\beta_{3j}}{6B_n^3} |t|^3 \right).$$

Из (4), используя (5) и последнее неравенство, получаем

$$R_n^{(1)} \leqslant \frac{4}{3} \left\{ \left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + \frac{t^2}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} + \frac{|t|^3}{6} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2 \beta_{3j}}{B_n^5} \right\}.$$

По лемме Крамера ([3] гл. VII, лемма 2, стр. 90) при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ имеем

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leqslant \Theta_1 L_n |t|^3 e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{9}$$

Далее

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\sigma_j}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^3}{B_n^3} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\beta_{3j}^{\frac{1}{3}}}{B_n} \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{3j}}{B_n^3} \leqslant \frac{B_{3n}^{\frac{1}{3}}}{B_n} L_n = L_n^{\frac{4}{3}},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2 \beta_{3j}}{B_n^5} \leqslant L_n^{\frac{5}{3}}.$$

Поэтому при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$

$$R_n^{(1)} \leqslant \frac{4}{3} e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \Theta_1 L_n |t|^3 + \frac{t^2}{2} L_n^{\frac{4}{3}} + \frac{|t|^3}{6} L_n^{\frac{5}{3}} \right\} =$$

$$= L_n e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \frac{4}{3} \Theta_1 |t|^3 + \frac{2}{3} t^2 L_n^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9} |t|^3 L_n^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

Но при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$, $|t| \leqslant L_n^{-\frac{1}{3}}$, поэтому

$$R_n^{(1)} \leqslant L_n\, e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \frac{4}{3}\, \Theta_1 |t|^3 + |t| \right\}. \tag{10}$$

Подставляя (8) и (10) в (4), при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ получаем

$$\left| f_n'(t) - \varphi'(t) \right| \leqslant L_n\, e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \frac{4}{3}\, \Theta_1 t^4 + t^2 \right\} + \frac{2}{3} L_n t^2 e^{-\frac{t^2}{3}}.$$

Обозначив через $c_4 = \max \left\{ \frac{4}{3}\, \Theta_1;\ \frac{5}{3} \right\}$, при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ имеем

$$\left| f_n'(t) - \varphi'(t) \right| \leqslant c_4 L_n\, e^{-\frac{t^2}{3}} \{ t^4 + t^2 \}.$$

2. Оценим модуль разности

$$f_n''(t) - \varphi''(t).$$

Имеем

$$\varphi''(t) = t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$f_n''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right) \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \varphi_j''\left(\frac{t}{B_n}\right) \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}.$$

Согласно (2) имеем

$$\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right) = t^2 \frac{\sigma_j^2 \sigma_k^2}{B_n^4} - \frac{t^3}{2} \left(\frac{\sigma_j^2 \Theta_{2k} \beta_{3k} + \Theta_{2j} \beta_{3j} \sigma_k^2}{B_n^5} \right) + \frac{t^4}{4} \frac{\Theta_{2j} \Theta_{2k} \beta_{3j} \beta_{3k}}{B_n^6}.$$

Используя это выражение и соотношение (3), получаем

$$f_n''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq}}^{n} t^2 \frac{\sigma_j^2 \sigma_k^2}{B_n^4} \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} + \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\sigma_j^2}{B_n^2} \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left\{ \left(-\frac{t^3}{2} \right) \left(\frac{\sigma_j^2 \Theta_{2k} \beta_{3k} + \Theta_{2j} \beta_{3j} \sigma_k^2}{B_n^5} \right) + \frac{t^4}{4} \frac{\Theta_{2j} \Theta_{2k} \beta_{3j} \beta_{3k}}{B_n} \right\} \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\Theta_{3j} \beta_{3j}}{B_n^3}\, t\, \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left| f_n''(t)-\varphi''(t) \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} t^2 \frac{\sigma_j^2 \sigma_k^2}{B_n} \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} - t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + \\
&+\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{B_n^2} \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + |t| \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_{3j}}{B_n^3} \left| \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)} \right| + \\
&+\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \left\{ \frac{|t|^3}{2} \left(\frac{\sigma_j^2 \beta_{3k}+\sigma_k^2 \beta_{3j}}{B_n^5} \right) + \frac{t^4}{4} \frac{\beta_{3j}\beta_{3k}}{B_n^6} \right\} \left| \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} \right| = \\
&= K_{1,n}+K_{2,n}+K_{3,n}+K_{4,n}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Согласно неравенству (5), при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ имеем

$$\left| \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \right| \geqslant \frac{9}{16}. \quad (12)$$

Из разложения (1) получаем

$$\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = 1-\frac{t^2}{2}\left(\frac{\sigma_j^2+\sigma_k^2}{B_n^2}\right)+\frac{t^3}{6}\left(\frac{\Theta_{1j}\beta_{3j}+\Theta_{1k}\beta_{3k}}{B_n^3}\right)+$$

$$+\frac{t^4}{4}\frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4}-\frac{t^5}{12}\left(\frac{\Theta_{1k}\sigma_j^2\beta_{3k}+\Theta_{1j}\sigma_k^2\beta_{3j}}{B_n^5}\right)+\frac{t^6}{36}\frac{\Theta_{1j}\Theta_{1k}\beta_{3j}\beta_{3k}}{B_n^6}. \quad (13)$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{B_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2}-\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}\right) = 1-\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^4}{B_n^4}$$

и

$$1=\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^4}{B_n^4}.$$

Используя эти соотношения, получаем

$$K_{1,n} = \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} t^2 \frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4} \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} \right| \leqslant$$

$$\leqslant t^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4} \frac{\left| f_n(t)-\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)e^{-\frac{t^2}{2}} \right|}{\left|\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4}.$$

С помощью формулы (13) находим

$$\left| f_n(t) - \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leqslant \left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \frac{t^2}{2} \left(\frac{\sigma_j^2 + \sigma_k^2}{B_n^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{|t|^3}{6} \left(\frac{\beta_{3j} + \beta_{3k}}{B_n^3} \right) + \frac{t^4}{4} \frac{\sigma_j^2 \sigma_k^2}{B_n^4} + \frac{|t|^5}{12} \left(\frac{\sigma_j^2 \beta_{3k} + \sigma_k^2 \beta_{3j}}{B_n^5} \right) + \frac{t^6}{36} \frac{\beta_{3j} \beta_{3k}}{B_n^6} \right\}.$$

Используя (12), получаем

$$\left.\begin{aligned} K_{1,n} \leqslant \frac{16}{9} t^2 \Bigg\{ & \left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2 \sigma_k^2}{B_n^4} + \\ & + e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg[\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{\sigma_j^4 \sigma_k^2 + \sigma_j^2 \sigma_k^4}{B_n^6} \right) + \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{\sigma_j^2 \beta_{3j} \sigma_k^2 + \sigma_j^2 \beta_{3k} \sigma_k^2}{B_n^7} \right) + \\ & + \frac{t^4}{4} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^4 \sigma_k^4}{B_n} + \frac{|t|^5}{12} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{\sigma_j^4 \sigma_k^2 \beta_{3k} + \sigma_j^2 \sigma_k^4 \beta_{3j}}{B_n^9} \right) + \\ & + \frac{t^6}{36} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2 \beta_{3j} \sigma_k^2 \beta_{3k}}{B_n^{10}} \Bigg] \Bigg\} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} = \\ = \frac{16}{9} t^2 \Bigg\{ & K_{1,n}^{(1)} + e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg[\frac{t^2}{2} K_{1,n}^{(2)} + \frac{|t|^3}{6} K_{1,n}^{(3)} + \\ & + \frac{t^4}{4} K_{1,n}^{(4)} + \frac{|t|^5}{12} K_{1,n}^{(5)} + \frac{t^6}{36} K_{1,n}^{(6)} \Bigg] \Bigg\} + K_{1,n}^{(7)}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Из (9) при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ имеем

$$K_{1,n}^{(1)} \leqslant \Theta_1 L_n |t|^3 e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (15)$$

Очевидно, что

$$K_{1,n}^{(2)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^4}{B_n^4}.$$

Но так как

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} \leqslant L_n^{\frac{4}{3}},$$

то

$$K_{1,n}^{(2)} \leqslant 2 L_n^{\frac{4}{3}}. \quad (16)$$

Аналогично получаем

$$\left.\begin{gathered} K_{1,n}^{(3)} \leqslant 2 L_n^{\frac{5}{3}}, \quad K_{1,n}^{(4)} \leqslant L_n^{\frac{8}{3}}, \quad K_{1,n}^{(5)} \leqslant 2 L_n^{\frac{9}{3}}, \quad K_{1,n}^{(6)} \leqslant L_n^{\frac{10}{3}}, \\ K_{1,n}^{(7)} \leqslant t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{\frac{4}{3}}. \end{gathered}\right. \quad (17)$$

Из соотношения (14), используя неравенства (15), (16) и (17), получаем

$$K_{1,n} \leqslant \frac{16}{9} t^2 \left\{ \Theta_1 L_n |t|^3 e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \left[t^2 L_n^{\frac{4}{3}} + \frac{|t|^3}{3} L_n^{\frac{5}{3}} + \frac{t^4}{4} L_n^{\frac{8}{3}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|t|^5}{6} L_n^3 + \frac{t^6}{36} L_n^{\frac{10}{3}} \right] \right\} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} L_n^{\frac{4}{3}} \leqslant \frac{16}{9} |t| L_n e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ (\Theta_1 + 2) t^4 + 3 \right\}.$$

Поэтому

$$K_{1,n} \leqslant \Theta_2 L_n e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ |t|^5 + |t| \right\}, \tag{18}$$

где

$$\Theta_2 = \max \frac{16}{9} \left\{ (\Theta_1 + 2);\ 3 \right\}.$$

Далее, используя соотношения (1) и (5), при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ из (11) получаем

$$K_{2,n} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{B_n^2} \frac{\left| f_n(t) - \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right|}{\left| \varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|} \leqslant \frac{4}{3} \left\{ \left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^4}{B_n^4} + \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2 \beta_{3j}}{B_n^5} \right] \right\}.$$

Учитывая оценки (9) и (17), получаем

$$K_{2,n} \leqslant \frac{4}{3} \left\{ \Theta_1 |t|^3 L_n e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{t^2}{2} L_n^{\frac{4}{3}} + \frac{|t|^3}{6} L_n^{\frac{5}{3}} \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3} L_n e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \Theta_1 |t|^3 + \frac{|t|}{2} + \frac{|t|}{12} \right\}.$$

Следовательно,

$$K_{2,n} \leqslant \Theta_3 L_n e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ |t|^3 + |t| \right\}, \tag{19}$$

где

$$\Theta_3 = \max \left\{ \frac{4}{3} \Theta_1;\ \frac{7}{9} \right\}.$$

Используя неравенство (7), при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ получаем

$$K_{3,n} \leqslant \frac{4}{3} L_n |t| e^{-\frac{t^2}{3}}. \tag{20}$$

Далее, используя (6) и (12) при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$, получаем

$$\left| \frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right) \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)} \right| \leqslant \frac{16}{9} e^{-\frac{t^2}{3}}.$$

Тогда при $|t|\leqslant\sqrt[3]{T_n}$

$$K_{4,n}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left\{\frac{|t|^3}{2}\left(\frac{\sigma_j^2\beta_{3k}+\sigma_k^2\beta_{3j}}{B_n^5}\right)+\frac{t^4}{4}\frac{\beta_{3j}\beta_{3k}}{B_n^6}\right\}\left|\frac{f_n(t)}{\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{16}{9}e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{\frac{|t|^2}{2}(L_n+L_n)+\frac{t^4}{4}L_n^2\right\}\leqslant\frac{16}{9}L_n e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^3+|t|\right\}. \quad (21)$$

Неравенства (18)–(21) и (11) при $|t|\leqslant\sqrt[3]{T_n}$ дают

$$|f_n''(t)-\varphi''(t)|\leqslant c_5L_n e^{-\frac{t^2}{3}}\left\{|t|^6+|t|\right\}.$$

Лемма доказана.

Введём следующие обозначения:

$$B_{n,j}^2=B_n^2-\sigma_j^2,\quad B_{n,j,k}^2=B_n^2-\sigma_j^2-\sigma_k^2,$$

$$T_{n,j}=\frac{B_{n,j}^2-B_n}{4(B_{3n}-\beta_{3j})},\quad T_{n,j,k}=\frac{B_{n,j,k}^3B_n}{4(B_{3n}-\beta_{3j}-\beta_{3k})},\quad j\neq k,$$

$$\tilde{T}_n=\min\left\{T_n;\ \min_{1\leqslant j\leqslant n}T_{n,j};\ \min_{\substack{1\leqslant j\ k\leqslant n\\ j\neq k}}T_{n,j,k}\right\}.$$

Лемма 2. *При соблюдении условий теоремы* 1 *для* $|t|\leqslant\tilde{T}_n$

$$|f_n'(t)|\leqslant c_6e^{-\frac{t^2}{4}}|t|,$$

$$|f_n''(t)|\leqslant c_7e^{-\frac{t^2}{4}}(t^2+1).$$

Доказательство.

Вначале оценим модуль $f_n'(t)$:

$$|f_n'(t)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|.$$

Произведение $\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ есть значение характеристической функции нормированной суммы $\frac{1}{B_{n,j}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\xi_k$ в точке $t\,\frac{B_{n,j}}{B_n}$. Поэтому, по лемме Крамера ([3], гл. VII, л. 3, стр. 93), при $|t|\leqslant T_{n,j}$ получаем

$$\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2B_{n,j}^2}{3B_n^2}}.$$

Но $\frac{B_{n,j}^2}{B_n^2}=1-\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}$ и $\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}\to 0$ при $n\to\infty$ (это следует из условия $L_n\to 0$ при $n\to\infty$), поэтому для достаточно больших n

$$\frac{B_{n,j}^2}{B_n^2}>\frac{3}{4},$$

и для $|t|\leqslant\tilde{T}_n$

$$\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}. \tag{22}$$

Тогда для $|t|\leqslant\tilde{T}_n$ получаем

$$\left|f_n'(t)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{|t|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}+\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{3j}}{B_n^3}\right\}=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{|t|+\frac{t^2}{2}L_n\right\}.$$

Но $\tilde{T}_n\leqslant\frac{1}{4L_n}$, то при $|t|\leqslant\tilde{T}_n$

$$\left|f_n'(t)\right|\leqslant\frac{9}{8}e^{-\frac{t^2}{4}}|t|. \tag{23}$$

Оценим модуль $f_n''(t)$.

$$\left|f_n''(t)\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left|\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\left|\prod_{\substack{r=1\\r\neq j\neq k\\r\neq k}}^{n}\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j''\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|. \tag{24}$$

Из (2) получаем, что

$$\left|\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant t^2\frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4}+\frac{|t|^3}{2}\left(\frac{\sigma_j^2\beta_{3k}+\sigma_k^2\beta_{3j}}{B_n^5}\right)+\frac{t^4}{4}\frac{\beta_{3j}\beta_{3k}}{B_n^6}. \tag{25}$$

Произведение $\prod_{\substack{r=1\\r\neq j\neq k\\r\neq k}}^{n}\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)$ есть значение характеристической функции нормированной суммы $\frac{1}{B_{n,j,k}}\sum_{\substack{r=1\\n\neq j\neq k\\r\neq k}}^{n}\xi_r$ в точке $t\,\frac{B_{n,j,k}}{B_n}$. Поэтому, по лемме Крамера ([3], гл. VII, л. 3, стр. 93), при $|t|\leqslant T_{n,j,k}$ получаем

$$\left|\prod_{\substack{r=1\\r\neq j\neq k\\r\neq k}}^{n}\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2B_{n,j,k}^2}{3B_n^2}}.$$

Рассуждая далее, как при выводе неравенства (22), при $|t|\leqslant\tilde{T}_n$ получаем

$$\left|\prod_{\substack{r=1\\r\neq j\neq k\\r\neq k}}^{n}\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}. \tag{26}$$

Тогда, используя неравенства (25) и (26), при $|t| \leqslant \tilde{T}_n$ получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \left|\prod_{\substack{r=1\\r\neq j\neq k\\r\neq k}}^{n} \varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{|t|^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\sigma_j^2\sigma_k^2}{B_n^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{|t|^3}{2} \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{\sigma_j^2\beta_{3k}+\sigma_k^2\beta_{3j}}{B_n^5}\right) + \frac{t^4}{4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\beta_{3j}\beta_{3k}}{B_n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{t^2+|t|^3L_n+\frac{t^4}{4}L_n^2\right\} \leqslant \frac{4}{3}e^{-\frac{t^2}{4}}t^2. \tag{27}$$

Используя соотношения (22) и (3), при $|t| \leqslant \tilde{T}_n$ получаем

$$\sum_{j=1} \varphi_j''\left(\frac{t}{B_n}\right)\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}+|t|\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{3j}}{B_n^3}\right\} \leqslant \frac{4}{3}e^{-\frac{t^2}{4}}. \tag{28}$$

Из (24), (27), (28) при $|t| \leqslant \tilde{T}_n$ получаем

$$|f_n''(t)| \leqslant \frac{4}{3}e^{-\frac{t^2}{4}}(t^2+1).$$

Лемма доказана.

Выясним порядок величины $\tilde{T}_n$. Имеем

$$T_{n,j} = \frac{B_{n,j}^2\cdot B_n}{4(B_{3n}-\beta_{3j})} \geqslant \frac{B_{n,j}^2 B_n}{4B_{3n}}.$$

Используя условие $L_n \to 0$ при $n \to \infty$, легко находим, что для достаточно больших n, $B_{n,j}^2 \geqslant \frac{4}{5}B_n^2$. Поэтому для таких n

$$T_{n,j} \geqslant \frac{1}{5L_n}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что для достаточно больших n

$$T_{n,j,k} \geqslant \frac{1}{5L_n}.$$

Поэтому для достаточно болших n

$$\frac{1}{5L_n} \leqslant \tilde{T}_n \leqslant \frac{1}{4L_n}. \tag{29}$$

Но $L_n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\frac{1}{4L_n} = T_n \to \infty$ при $n \to \infty$. И, ясно, для достаточно больших n

$$\tilde{T}_n \geqslant \sqrt[3]{T_n}. \tag{30}$$

Доказательство теоремы 1.

Нам надо оценить разность

$$x^3\left[F_n(x) - \Phi(x)\right].$$

Для этого мы воспользуемся соотношением

$$\int_{-\infty}^{x} y^2\, d\left[F_n(y)-\Phi(y)\right] dy = x^2\left[F_n(x)-\Phi(x)\right]-2\int_{-\infty}^{x} y\left[F_n(y)-\Phi(y)\right] dy,$$

которое получается при помощи интегрирования по частям и с учётом того, что для $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ существуют конечные третьи абсолютные моменты. Если ввести обозначение

$$F^*(x)=\begin{cases} -F(x), & \text{при } x<0, \\ 1-F(x), & \text{при } x\geqslant 0, \end{cases}$$

то получится

$$x^2\left[F_n(x)-\Phi(x)\right]=\int_{-\infty}^{x} y^2\, d\,F_n(y)+2\int_{-\infty}^{x} y\,\Phi^*(y)\,dy-$$

$$-\left\{\int_{-\infty}^{x} y^2\, d\Phi(y)+2\int_{-\infty}^{x} y\,F_n^*(y)\,dy\right\}.$$

Обозначим

$$V_1(x)=\int_{-\infty}^{x} y^2\, dF_n(y)+2\int_{-\infty}^{x} y\,\Phi^*(y)\,dy,$$

$$V_2(x)=\int_{-\infty}^{x} y^2\, d\Phi(y)+2\int_{-\infty}^{x} y\,F_n^*(y)\,dy \tag{31}$$

и получим

$$x^2\left[F_n(x)-\Phi(x)\right]=V_1(x)-V_2(x). \tag{32}$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3\, dF_n(x)<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3\, d\Phi(x)<\infty,$$

то, используя неравенство Чебышева, получаем

$$V_1(+\infty)=V_2(+\infty)=2,$$
$$V_1(-\infty)=V_2(-\infty)=0. \tag{33}$$

Функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ неотрицательны, не убывают, непрерывны слева и имеют ограниченную вариацию.

В дальнейшем воспользуемся следующей теоремой [1].

Пусть A, T и $\varepsilon>0$ — постоянные, $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие им трансформации Фурье. Если

1. $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)-G(x)|\, dx<\infty$,

3. $G'(x)$ *существует при всех* x и $|G'(x)| \leqslant A$,

4. $\int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{f(t)-g(t)}{t} \right| dt = \varepsilon,$

то каждому числу k *соответствует конечное положительное число* $c(k)$, *зависящее только от* k *и такое, что*

$$\left| F(x) - G(x) \right| \leqslant k \frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k) \frac{A}{T}. \tag{34}$$

Заметим, что вместо третьего условия достаточно потребовать, чтобы функция $G(x)$ удовлетворяла условию Липшица с постоянной A, т. е.

3'. $\left| G(x_1) - G(x_2) \right| \leqslant A \, |x_1 - x_2|$.

Установим, что функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы.

1. Выполнение первого условия гарантируют равенства (33).

2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| V_1(x) - V_2(x) \right| dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \left| \left(1 - \Phi(x)\right) - \left(1 - F_n(x)\right) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 F_n(x)\, dx + \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \Phi(x)\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \left(1 - \Phi(x)\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \left(1 - F_n(x)\right) dx = \frac{|x|^3}{3} F_n(x) \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{0} x^3\, dF_n(x) + \frac{|x|^3}{3} \Phi(x) \Big|_{-\infty}^{0} -$$

$$- \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{0} x^3\, d\Phi(x) + \frac{|x|^3}{3} \left(1 - \Phi(x)\right) \Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{\infty} x^3\, d\Phi(x) + \frac{|x|^3}{3} \left(1 - F_n(x)\right) \Big|_{0}^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{\infty} x^3\, dF_n(x) \leqslant C_1 + \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3\, dF_n(x) + \frac{1}{3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3\, d\Phi(x) < \infty.$$

Значит, второе условие теоремы тоже удовлетворяется.

3. $$\left| V_2(x_2) - V_2(x_1) \right| = \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\, d\Phi(y) + 2 \int\limits_{x_1}^{x_2} y F_n^*(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy + 2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \left| y F_n^*(y) \right| dy \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} dy + 2 \int\limits_{x_1}^{x_2} dy = 3\,(x_2 - x_1),$$

так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} < 1$ для всех y, и

$$\left| F_n^*(y) \right| \leqslant P\left\{ \left| \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \right| \geqslant |y| \right\} \leqslant \frac{1}{y^2} \text{ для } |y| > 1,$$

а для $|y| \leqslant 1$, $\left| F_n^*(y) \right| \leqslant 1$, поэтому для всех y

$$\left| y F_n^*(y) \right| \leqslant 1,$$

т. е. условие 3' теоремы тоже удовлетворяется при $A=3$.

4. Возьмём $T=\tilde{T}_n$ и вычислим ε.

Пусть

$$v_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dV_1(x), \quad v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dV_2(x).$$

$$\varepsilon = \int_{-\tilde{T}_n}^{\tilde{T}_n} \left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{t} \right| dt. \tag{53}$$

Согласно (32), имеем (см. [4], стр. 35)

$$v_1(t) - v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^2\, d\left[F_n(x) - \Phi(x)\right] + 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x \left[F_n(x) - \Phi(x)\right] dx =$$

$$= -\left\{ f_n''(t) - \varphi''(t) \right\} + 2\left\{ \frac{f'_n(t) - \varphi'(t)}{t} \right\} - 2\left\{ \frac{f_n(t) - \varphi(t)}{t^2} \right\}.$$

Поэтому

$$\varepsilon = \int_{-\tilde{T}_n}^{\tilde{T}_n} \left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{t} \right| dt = \int_{-\sqrt[3]{T_n}}^{\sqrt[3]{T_n}} \left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{t} \right| dt + \int_{\sqrt[3]{T_n} < |t| \leqslant \tilde{T}_n} \left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{t} \right| dt =$$

$$= I_1 + I_2, \tag{36}$$

так как согласно (30) для достаточно больших n, $\tilde{T}_n \geqslant \sqrt[3]{T_n}$. Используя неравенство (9) и лемму 1, при $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$ после простых подсчётов, получим

$$\left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{t} \right| \leqslant c_8 L_n e^{-\frac{t^2}{3}} (t^4 + 1).$$

Тогда

$$I_1 = \int_{-\sqrt[3]{T_n}}^{\sqrt[3]{T_n}} \left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{t} \right| dt \leqslant c_8 L_n \int_{-\sqrt[3]{T_n}}^{\sqrt[3]{T_n}} e^{-\frac{t^2}{3}} (t^4 + 1)\, dt \leqslant c_8 L_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{3}} (t^4 + 1)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 L_n. \tag{37}$$

Используя неравенство (6) и лемму 2, при $\sqrt[3]{T_n} \leqslant |t| \leqslant \tilde{T}_n$ после простых подсчётов получаем

$$\left|\frac{\nu_1(t)-\nu_2(t)}{t}\right| \leqslant 2\left|\frac{\varphi(t)}{t^3}\right|+2\left|\frac{\varphi'(t)}{t^2}\right|+\left|\frac{\varphi''(t)}{t}\right|+2\left|\frac{f_n(t)}{t^3}\right|+2\left|\frac{f_n'(t)}{t^2}\right|+$$

$$+\left|\frac{f_n''(t)}{t}\right| \leqslant c_9 e^{-\frac{t^2}{4}} |t|.$$

Тогда

$$I_2 = \int\limits_{\sqrt[3]{T_n}<|t|\leqslant\tilde{T}_n} \left|\frac{\nu_1(t)-\nu_2(t)}{t}\right| dt \leqslant 2c_9 \int\limits_{\sqrt[3]{T_n}}^{\tilde{T}_n} e^{-\frac{t^2}{4}} t\, dt \leqslant 2c_9 e^{-\frac{T_n^{\frac{2}{3}}}{4}} \int\limits_0^{T_n} t\, dt =$$

$$= c_{10} \frac{T_n^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{4} T_n^{\frac{2}{3}}\right)^k} = o(L_n). \tag{38}$$

Теперь из (36), (37) и (38) получаем

$$\varepsilon \leqslant C_3 L_n. \tag{39}$$

По упомянутой теореме, используя (39), имеем

$$x^2 \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| = \left| V_1(x) - V_2(x) \right| \leqslant k \frac{C_3 L_n}{2\pi} + c(k) \frac{1}{\tilde{T}_n}.$$

Но $\tilde{T}_n \geqslant \frac{1}{5L_n}$, поэтому

$$x^2 \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \leqslant C_4 L_n.$$

Но тогда и

$$(1+x^2)\left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \leqslant C_5 L_n,$$

т. е.

$$\left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \leqslant C_1 \frac{L_n}{1+x^2},$$

что и доказывает нашу теорему.

Выражаю искреннюю благодарность В. А. Статулявичюсу за постановку задачи и помощь, оказанную при исполнении работы.

Институт физики и математики
Академия наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
29. XII. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Москва—Ленинград, 1949.
2. C. G. Esseen. Fourier Analysis of Distribution Functions, Acta mathematica, 77, (1945).
3. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
4. Б. А. Рогозин. Некоторые экстремальные задачи в области предельных теорем, Москва, 1961 (кандидатская диссертация).

LIEKAMOJO NARIO CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE KLAUSIMU

P. SURVILA

(Reziumė)

Darbe įrodoma sekanti teorema:

Jei $\{\xi_j\}$ – seka nepriklausomų atsitiktinių dydžių su $M\xi_j=0$, $D\xi_j=\sigma_j^2$ ir $M|\xi_j|^3=\beta_{3j}<\infty$ visiems $j=1, 2, \dots$ patenkina sąlygą

$$L_n \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty,$$

tai

$$\left| F_n(x)-\Phi(x) \right| \leqslant C_1 \frac{L_n}{1+x^3}$$

visiems $x \in (-\infty, \infty)$ ir visiems n, kur C_1 – konstanta ir

$$F_n(x)=P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j<x \right\}, \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

ZUR FRAGE ÜBER DAS RESTGLIED IM ZENTRALEN GRENZWERTSATZ

P. SURWILA

(Zusammenfassung)

In vorliegendem Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $\{\xi_j\}$ – eine Folge von unabhängigen zufälligen Veränderlichen mit den Mittelwerten $M\xi_j=0$, mit den Dispersionen $D\xi_j=\sigma_j^2$ und mit den absoluten Momenten 3-er Ordnung $M|\xi_j|^3=\beta_{3j}<\infty$ für alle $j=1, 2, \dots$. Es sei folgende Bedingung erfüllt:

$$L_n=\frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{3j}}{B_n^3} \to 0, \quad \text{wenn} \quad n \to \infty.$$

Dann gilt für alle $x \in (-\infty, \infty)$ und alle n folgende Ungleichung

$$\left| F_n(x)-\Phi(x) \right| \leqslant C_1 \frac{L_n}{1+x^3},$$

wo

$$F_n(x)=P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j<x \right\}, \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

und $C_1=\text{const.}$
