II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ ОБОБЩЕННОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ю. ШИНКУНАС

В работах [1], [2], [3] построена теория кривых и гиперповерхностей обобщенного евклидова пространства тензорным методом.

В настоящей заметке методом Г. Ф. Лаптева [5] исследованы некоторые вопросы дифференциальной геометрии конгруэнции прямых обобщенного евклидова пространства. Некоторые результаты этой заметки доложены автором на IV Всесоюзном математическом съезде.

1. Инфинитезимальные перемещения репера (A, e_i) трехмерного аффинного пространства A_3 можно запизать в виде:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_i, \\ de_i &= \omega_i^k e_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где пфаффовые формы ω^i и ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства A_3 [6]:

$$\begin{aligned} D\omega_i^j &= [\omega_i^k, \ \omega_k^j], \\ D\omega^i &= [\omega^k, \ \omega_k^i] \end{aligned} \tag{2}$$

$$(i, \ j, \ k=1, \ 2, \ 3; \ \alpha, \ \beta, \ \gamma=2, \ 3).$$

Обобщенным евклидовым пространством H_3 называется трехмерное аффинное пространство A_3, в которое внесена операция „скалярного произведения векторов", определённая с помощью билинейной функции $\varphi(x, y)$ (вообще говоря, несимметрической), удовлетворяющей условию $\varphi(x, x)>0$ для любого вектора $x \neq 0$ [1]:

$$x \cdot y = \varphi(x, \ y).$$

Величины, определяемые уравнениями

$$h_{ij} = \varphi(e_i, \ e_j),$$

составляют фундаментальный тензор обобщенного евклидова пространства H_3, дифференциальное уравнение которого можно записать в виде:

$$\nabla h_{ij} \equiv dh_{ij} - h_{ik}\,\omega_j^k - h_{kj}\,\omega_i^k = 0. \tag{3}$$

Вводим обозначения:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= h_{(ij)} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}), \\ \tilde{g}_{ij} &= h_{[ij]} = \frac{1}{2}(h_{ij} - h_{ji}). \end{aligned} \tag{4}$$

Если $x\cdot y=0$, то вектор y называется ортогональным справа к вектору x, а вектор x ортогонален слева к вектору y.

2. Дифференциальные уравнения конгруэнции прямых обобщенного евклидова пространства H_3 можно записать:

$$\omega_1^\alpha=\lambda_\beta^\alpha\omega^\beta,$$
$$\nabla\lambda_\beta^\alpha-\lambda_\beta^\alpha\omega_1^1=\lambda_{\beta\gamma}^\alpha\omega^\gamma+\lambda_{\beta 1}^\alpha\omega^1, \tag{5}$$

где

$$\lambda_{\beta\gamma}^\alpha=\lambda_{\gamma\beta}^\alpha,\quad \lambda_{\beta 1}^\alpha=-\lambda_\gamma^\alpha\lambda_\beta^\gamma.$$

Общим левым перпендикуляром двух прямых a и b пространства H_3 будем называть прямую c, пересекающую прямые a и b и направляющий вектор которой перпендикулярен слева к направляющим векторам этих прямых. Точка $M=A+te$, где $e=\frac{e_1}{\sqrt{g_{11}}}$, является основанием общего левого перпендикуляра двух бесконечно близких лучей конгруэнции прямых тогда и только тогда, когда

$$(e\cdot dM)=0,\quad \big((e+de)\cdot dM\big)=0.$$

Отсюда, в силу (3), (4) и (5) следует, что величина t_λ, определенная формулой

$$t_\lambda=-\frac{k_{(\alpha\beta)}\,\omega^\alpha\omega^\beta}{a_{\gamma\varepsilon}\,\omega^\gamma\omega^\varepsilon}, \tag{6}$$

где

$$\Delta_{\gamma\varepsilon}=h_{\gamma\varepsilon}-\frac{h_{\gamma 1}h_{1\varepsilon}}{g_{11}},\quad \tilde\lambda_\alpha^\gamma=\frac{\lambda_\alpha^\gamma}{\sqrt{g_{11}}},$$
$$k_{\alpha\beta}=\tilde\lambda_\alpha^\gamma\Delta_{\gamma\beta},\quad a_{\alpha\beta}=\tilde\lambda_\alpha^\gamma\tilde\lambda_\beta^\varepsilon\Delta_{(\gamma\varepsilon)},$$

определяет абсциссу основания общего левого перпендикуляра двух бесконечно близких лучей конгруэнции прямых.

Общим перпендикуляром двух прямых a и b будем называть прямую c, пересекающую прямые a и b и направляющий вектор которой ортогонален к прямым a и b в смысле метрики, определенной тензором g_{ij}. Аналогично можно определить и правый общий перпендикуляр двух прямых.

Так как необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка $M=A+te$ была основанием общего перпендикуляра двух бесконечно близких лучей конгруэнции прямых, имеет вид

$$\{e\cdot dM\}=0,\quad \Big\{(e+de)\cdot dM\Big\}=0,$$

где скобки $\{\ldots\}$ обозначают скалярное произведение векторов в смысле метрики, определенной тензором g_{ij}, то абсцисса основания этого перпендикуляра определяется следующей формулой:

$$t=-\frac{b_{(\alpha\beta)}\,\omega^\alpha\omega^\beta}{c_{\varepsilon\gamma}\,\omega^\varepsilon\omega^\gamma}, \tag{7}$$

где

$$E_\varepsilon=e_\varepsilon-\frac{g_{1\varepsilon}}{g_{11}}e_1,\quad \Lambda_{\gamma\varepsilon}=E_{(\gamma}E_{\varepsilon)},$$
$$c_{\alpha\beta}=\tilde\lambda_\alpha^\gamma\tilde\lambda_\beta^\varepsilon\Lambda_{\gamma\varepsilon},\quad b_{\alpha\beta}=\tilde\lambda_\alpha^\gamma\Lambda_{\beta\gamma}.$$

Оказывается, что абсциссу основания общего правого перпендикуляра двух бесконечно близких лучей конгруэнции прямых можно найти по формуле:

$$t_n = -\frac{d_{(\alpha\beta)}\,\omega^{\alpha}\,\omega^{\beta}}{a_{\varepsilon\gamma}\,\omega^{\varepsilon}\,\omega^{\gamma}}, \tag{8}$$

где

$$d_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}\,\Delta_{\beta\gamma}, \quad d_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\,(d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha}).$$

3. Дифференциальное уравнение линейчатой поверхности, проходящей через прямую конгруэнции (A, e), можно записать:

$$\omega^3 = \lambda\omega^2 \quad \text{или} \quad \omega^3 : \omega^2 = \lambda.$$

Очевидно, что в случае линейчатой поверхности

$$t_л = \varphi(\lambda), \quad t = \psi(\lambda), \quad t_n = \Phi(\lambda),$$

т. е. если дано λ, то на каждой прямой (A, e) конгруэнции можно найти три точки сжатия (левую точку сжатия, точку сжатия и правую точку сжатия). Когда прямая (A, e) описывает линейчатую поверхность, соответственные точки сжатия описывают линии сжатия (левую линию сжатия, линию сжатия и правую линию сжатия).

Такие точки прямой конгруэнции, которые имеют абсциссы, равные экстремальным $t_л$, t и t_n значениям, назовем соответственно левыми граничными и правыми граничными точками луча конгруэнции.

Абсциссы левых граничных точек луча конгруэнции определяются уравнением

$$at_л^2 + \sigma^{\alpha\beta}\,\sigma^{\varepsilon\gamma}\,a_{\beta\gamma}\,k_{(\alpha\varepsilon)}\,t_л + k = 0, \tag{9}$$

где

$$a = \det\|a_{\alpha\beta}\|, \quad k = \det\|k_{(\alpha\beta)}\|,$$

$$\sigma^{22} = \sigma^{33} = 0, \quad \sigma^{23} = -\sigma^{32} = 1.$$

Абсциссы граничных точек луча конгруэнции удовлетворяют уравнению

$$ct^2 + \sigma^{\alpha\beta}\,\sigma^{\varepsilon\gamma}\,c_{\beta\gamma}\,b_{(\alpha\varepsilon)}\,t + b = 0, \tag{10}$$

где

$$c = \det\|c_{\alpha\beta}\|, \quad b = \det\|b_{(\alpha\beta)}\|.$$

Абсциссы правых граничных точек луча конгруэнции являются корнями квадратичного уравнения:

$$at_n^2 + \sigma^{\alpha\beta}\,\sigma^{\varepsilon\gamma}\,a_{\beta\gamma}\,d_{(\alpha\varepsilon)}\,t_n + d = 0, \tag{11}$$

где

$$d = \det\|d_{(\alpha\beta)}\|.$$

Такие линейчатые поверхности конгруэнции, левые линии сжатия которых прямую конгруэнции пересекают в левых граничных точках, назовем левыми главными линейчатыми поверхностями конгруэнции. Аналогично можно определить главные и правые главные линейчатые поверхности конгруэнции.

Левые главные линейчатые поверхности конгруэнции определяются уравнением

$$\sigma^{\alpha\beta}\,k_{(\alpha\gamma)}\,a_{\beta\mu}\,\omega^{\gamma}\,\omega^{\mu} = 0, \tag{12}$$

главные линейчатые поверхности —

$$\sigma^{\alpha\beta} b_{(\alpha\gamma)} c_{\beta\mu} \omega^{\gamma} \omega^{\mu} = 0 \tag{13}$$

и правые главные линейчатые поверхности — уравнением

$$\sigma^{\alpha\beta} d_{(\alpha\gamma)} a_{\beta\mu} \omega^{\gamma} \omega^{\mu} = 0. \tag{14}$$

4. Квадратичное уравнение, корни которого являются абсциссами фокусов луча конгруэнции, можно записать (см. [4]):

$$L\rho^2 + M\rho + 1 = 0, \tag{15}$$

где

$$L = \det \| \lambda^{\alpha}_{\beta} \|, \quad M = \mathrm{sp} \| \tilde{\lambda}^{\alpha}_{\beta} \|.$$

Дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей конгруэнции имеет вид:

$$l_{\alpha\beta} \tilde{\lambda}^{\alpha}_{\gamma} \omega^{\gamma} \omega^{\beta} = 0, \tag{16}$$

где

$$l^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sigma^{\alpha\beta}, \quad l^{\alpha\beta} l_{\beta\varepsilon} = \delta^{\alpha}_{\varepsilon}.$$

5. Величина

$$p = \frac{(\mathbf{e}\, d\mathbf{e}\, dA)}{(d\mathbf{e})^2},$$

называется параметром распределения или кручением образующей линейчатой поверхности. Параметр распределения линейчатой поверхности, которая принадлежит конгруэнции прямых, определяется формулой:

$$p = \frac{s_{\alpha\beta} \omega^{\alpha} \omega^{\beta}}{c_{\varepsilon\gamma} \omega^{\varepsilon} \omega^{\gamma}}, \tag{17}$$

где

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{c g_{11}}} l_{\varepsilon(\alpha} \tilde{\lambda}^{\varepsilon}_{\beta)}.$$

Экстремальные значения p называются главными параметрами распределения и являются корнями уравнения:

$$p^2 - np + q = 0, \tag{18}$$

где

$$n = c^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \quad q = \frac{1}{2} b_{\alpha\nu} b_{\beta\mu} l^{\alpha\beta} l^{\nu\mu},$$

$$c^{\alpha\beta} = c_{\varepsilon\gamma} l^{\alpha\varepsilon} l^{\beta\gamma}.$$

Линейчатые поверхности конгруэнции, которым соответствуют экстремальные параметры распределения, называются поверхностями кривизны конгруэнции [8]. Дифференциальное уравнение таких линейчатых поверхностей можно записать:

$$l^{\alpha\beta} s_{\alpha\gamma} c_{\beta\mu} \omega^{\gamma} \omega^{\mu} = 0. \tag{19}$$

6. Если с одной точки отложить единичные векторы направления прямых конгруэнции, то геометрическое место их концов составит сферическое изображение конгруэнции. Первая квадратичная форма сферического изображения конгруэнции:

$$(d\mathbf{e})^2 = c_{\alpha\beta} \omega^{\alpha} \omega^{\beta}. \tag{20}$$

Сферическое изображение линейчатой поверхности конгруэнции есть сферическая кривая. Две линейчатые поверхности конгруэнции, проходящие через прямую конгруэнции, будем называть перпендикулярными, если их сферические изображения перпендикулярны. Оказывается, что главные линейчатые поверхности и поверхности кривизны перпендикулярны, а левые главные и правые главные поверхности в общем случае не перпендикулярны.

7. Две линейчатые поверхности конгруэнции прямых, проходящие через прямую конгруэнции и имеющие равные параметры распределения соответственных прямых, назовем симметричными поверхностями первого рода. В этом случае имеет место соотношение:

$$\frac{s_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha}\,\omega^{\beta}}{c_{\varepsilon\gamma}\,\omega^{\varepsilon}\,\omega^{\gamma}}=\frac{s_{\mu\eta}\,\bar{\omega}^{\mu}\,\bar{\omega}^{\eta}}{c_{\nu\varepsilon}\,\bar{\omega}^{\nu}\,\bar{\omega}^{\varepsilon}}. \tag{21}$$

Если $\omega^3:\omega^2=\bar{\omega}^3:\omega^2$, то симметричные поверхности первого рода определяются из уравнения:

$$l^{\xi\eta}\,c_{(\alpha|\varepsilon|}\,s_{\mu)\eta}\,\omega^{\alpha}\,\bar{\omega}^{\mu}=0. \tag{22}$$

Две линейчатые поверхности конгруэнции, проходящие через прямую конгруэнции и имеющие равные левые граничные точки, назовем симметричными поверхностями второго рода.

Левые симметричные поверхности второго рода определяются дифференциальным уравнением

$$l^{\xi\eta}\,(a_{\alpha\xi}\,k_{(\mu\eta)}+a_{\mu\xi}\,k_{(\alpha\eta)})\,\omega^{\alpha}\,\bar{\omega}^{\mu}=0, \tag{23}$$

симметричные поверхности второго рода —

$$l^{\xi\eta}\,(c_{\alpha\xi}\,b_{(\mu\eta)}+c_{\mu\xi}\,b_{(\alpha\eta)})\,\omega^{\alpha}\,\bar{\omega}^{\mu}=0 \tag{24}$$

и правые симметричные поверхности второго рода — уравнением:

$$l^{\xi\eta}\,(a_{\alpha\xi}\,d_{(\mu\eta)}+a_{\mu\xi}\,d_{(\alpha\eta)})\,\omega^{\alpha}\,\bar{\omega}^{\mu}=0. \tag{25}$$

8. Так как метрика пространства H_3 несимметричная, то поверхность этого пространства можно оснастить правой нормалью, нормалью и левой нормалью. Оказывается, что не в любом пространстве H_3 существуют паралельные поверхности. Пусть N — левая нормаль поверхности (A). Левопаралельной поверхностью поверхности (A) назовем поверхность (M):

$$M=A+pN \quad (p=\text{const}),$$

если

$$N\cdot dM=0.$$

Конгруэнция нормалей обычного евклидова пространства обладает однопараметрическим семейством паралельных поверхностей [7]. Учитывая это обстоятельство, мы будем называть нормальными конгруэнциями пространства H_3 такие конгруэнции, образованные из тех или других нормалей поверхности, для которых существует однопараметрическое семейство паралельных поверхностей.

Можно поставить и обратный вопрос. Если дана конгруэнция прямых, то можно ли найти такое семейство поверхностей, левыми нормалями, нормалями и правыми нормалями которых были бы прямые данной конгруэнции.

В точке A каждой прямой конгруэнции присоединим плоскость, которая перпендикулярна слева к этой прямой. Аналогично можно присоединить и плоскость, которая перпендикулярна справа к прямой конгруэнции.

Метрика в этих плоскостях будет одинаковой, т. е. метрический тензор этих плоскостей имеет вид:

$$\Delta_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{h_{\alpha 1} h_{1\beta}}{g_{11}}.$$

Если

$$1)\quad k_{[\alpha\beta]} = 0,$$

$$2)\quad \Delta_{[\alpha\beta]} = 0,$$

т. е. метрика в присоединенных к лучу плоскостях будет симметричной, то существует семейство лево-паралельных поверхностей, для которых прямые данной конгруэнции будут лезыми нормалями (лево-нормальная конгруэнция).

Если

$$b_{[\alpha\bar{\beta}]} = 0,$$

то существует семейство паралельных поверхностей, для которых прямые данной конгруэнции будут нормалями (нормальная конгруэнция).

Если:

$$1)\quad d_{[\alpha\beta]} = 0,$$

$$2)\quad \Delta_{[\alpha\beta]} = 0,$$

то существует семейство право-паралельных поверхностей, для которых прямые данной конгруэнции будут правыми нормалями (право-нормальная конгруэнция).

В заключение выражаю благодарность В. И. Близникасу за большую помощь и руководство.

Вильнюсский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 28. XII. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Бахрах, Некоторые вопросы геометрии n-мерного обобщенного евклидова пространства, Известия высш. учеб. завед., мат., т. **16**, № 6, 17–18, 1958.
2. С. М. Бахрах, Теория гиперповерхностей обобщенного евклидова пространства, Научные доклады высш. школы, физ.-мат. науки, № 3, 14–17, 1958.
3. С. М. Бахрах, Теория поверхностей обобщенного евклидова пространства, Ученые записи (Ярославский гос. пед. инст. им. К. Д. Ушинского) вып. XXIV, мат., 5—16, 1960.
4. В. И. Близникас, Конгруэнция центроидальных геодезических кривых метрического пространства линейных элементов, ДАН СССР, т. **132**, № 4, 735–738, 1960.
5. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. мат. об-ва, т. **2**, 1953.
6. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.–Л., 1948.
7. С. П. Фиников, Теория конгруэнций, М.–Л., 1950.
8. J. Dubnow, Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung, Труды сем. по векторн. и тензорн. анал., вып. **1**, 223–303, 1933.

APIBENDRINTOS EUKLIDINĖS ERDVĖS TIESIŲ KONGRUENCIJOS DIFERENCIALINĖS GEOMETRIJOS KLAUSIMU

J. ŠINKŪNAS

(Reziumė)

Apibendrintos euklidinės erdvės hiperpaviršių ir kreivių teorija išnagrinėta S. Bachracho ([1], [2], [3]). Straipsnyje nagrinėjami kai kurie apibendrintos euklidinės erdvės H_3 tiesių kongruencijos pirmos eilės diferencialinės aplinkos klausimai. Įvesta kairinių ribinių ir dešininių ribinių taškų, kairinių pagrindinių ir dešininių pagrindinių paviršių, pirmos rūšies simetrinių paviršių, antros rūšies kairinių simetrinių ir antros rūšies dešininių simetrinių paviršių sąvokos. Įvesta kairinės normalinės ir dešininės normalinės kongruencijų sąvokos. Surastos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad šios kongruencijos egzistuotų.

ÜBER DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE DER STRAHLENKONGRUENZEN DES VERALLGEMEINERTEN EUKLIDISCHEN RAUMES

J. ŠINKUNAS

(Zusammenfassung)

In vorliegender Arbeit untersucht man die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen der verallgemeinerten euklidischen Raumes H_3 mit Hilfe der Methode von G. F. Laptew. Die Differentialgleichungen der Strahlenkongruenz gewinnen die Gestalt:

$$\omega_1^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega^\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3).$$

In diesem Artikel werden einige geometrische Objekte untersucht, die aus Komponenten fundamentaler differentialgeometriescher Objekte erster Ordnung der Strahlenkongruenz gebildet sind. Mit Hilfe dieser Objekte kann man die Begriffe der rechten Grenzpunkte, der Grenzpunkte, der linken Grenzpunkte, der rechten Verteilungsflächen, der Verteilungsflächen, sowie linker Verteilungsflächen, rechter Hauptflächen, Hauptflächen, linker Hauptflächen, rechter komplementären Flächen, komplementären Flächen, linker komplementären Flächen, rechter symmetrischen Flächen, symmetrische Flächen einführen Normalkongruenzen werden durch Existenz einer Fläche gekennzeichnet die alle Kongruenzstrahlen senkrecht schneidet. In dieser Arbeit geben wir die Bedingungen, die für Existenz der Normalkongruenzen im verallgemeinerten euklidischen Raum notwendig und hinreichend sind.
