II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

В настоящей заметке предельные теоремы для больших уклонений, установленные В. М. Золотарёвым в статье [1], обобщены на случай независимых неодинаково распределённых случайных величин.

Пусть имеется последовательность независимых случайных величин

$$X_1,\ X_2,\ \ldots \tag{1}$$

с функциями распределения $F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots$

Предположим, что надлежащим образом нормированная сумма

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{B_n} - A_n$$

имеет устойчивое предельное распределение $V_\alpha(x)$ с характеристической функцией вида

$$\exp\left\{\gamma(-it) + \lambda(-it)^\alpha\right\}, \quad \text{если} \quad 1 < \alpha < 2,$$

и

$$\exp\left\{\gamma(-it) + \lambda(-it)\ln(-it)\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = 1. \tag{2}$$

Здесь $\lambda > 0$ и γ — постоянные.

Известно [1], что такие устойчивые законы имеют показательный порядок убывания плотности на отрицательной полуоси. Неограничивая общности, мы будем считать $\gamma = 0$ и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

Пусть $f_j(s)$, $\bar{f}_n(s)$ и $\varphi(s) = \exp\{\psi(s)\}$ — двухсторонние преобразования Лапласа соответственно для случайных величин X_j, S_n и предельного закона $V_\alpha(x)$, а $V_{\alpha j}(x)$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ — устойчивые законы семейства (2) с существующими во всей полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ двусторонними преобразованиями Лапласа вида

$$\varphi_{\alpha j}(s) = \exp\{\psi_j(s)\} = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{\alpha}\lambda_j s^\alpha\right\}, & 1 < \alpha < 2, \\ \exp\{\lambda_j s \ln s\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $\lambda_j > 0$, $j = 1,\ 2,\ \ldots.$

Вводим обозначения:

$$v_\alpha(x)=\frac{dV_\alpha(x)}{dx}, \qquad \Omega_j(x)=F_j(x)-V_{\alpha j}(x),$$

$$\mu_j(m)=\int_{-\infty}^{\infty} x^m\,d\Omega_j(x), \quad \nu_j(r)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r\left|d\Omega_j(x)\right|, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

где целое $m\geqslant 0$ и $r\geqslant 0$. Пусть, далее,

$$B_n=\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad A_n=\begin{cases} B_n^{\alpha-1}\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(1), & 1<\alpha<2,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(1)+\ln B_n, & \alpha=1.\end{cases}$$

Налагаем на заданную последовательность (1) следующие условия.

1°. Существуют положительные числа $a\geqslant\alpha$, A, k, K и L такие, что

$$\left|\nu_j(a)\right|\leqslant L, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots$$

и

$$k\leqslant\left|f_j(s)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}\,dF_j(x)\right|\leqslant K, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots$$

для $0\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant A$.

2°. При всех n

$$\frac{B_n^\alpha}{n}\geqslant\delta>0.$$

3°. Для всех $j\,(j=1,\ 2,\ \ldots)$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\left|f_j(-it)\right|\leqslant\delta_1<1 \tag{3_1^0}$$

и для некоторого n_0 существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\prod_{j=1}^{n_0}f_j(-it)\right|dt.$$

Из условии 1° следует, что законы $F_j(x)$, $j=1,\ 2,\ \ldots$ принадлежат области притяжения устойчивого закона $V_{\alpha j}(x)$.

Условие (3_2^0) будет удовлетворено, например, тогда, когда сумма первых n_0 случайных величин последовательности (1) имеет ограниченную плотность распределения.

Очевидно, что $\mu_j(0)=0$, $j=1,\ 2,\ \ldots$ Неограничивая общности мы будем считать, что и $\mu_j(1)=0$, $j=1,\ 2,\ \ldots$ Вообще, всегда найдётся такие $l_j\geqslant 1$, что $\mu_j(0)=\mu_j(1)=\ldots=\mu_j(l_j)=0$, $(j=1,\ 2,\ \ldots)$, а $\mu_j(l_j+1)$ отличны от нуля или не существуют. Пусть $l=\min\limits_j l_j$, и

$$a'=\min(a,\ 1+l). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть для последовательности* (1) *выполнены условия* 1°–3°. *Тогда при* $n \to \infty$ *равномерно по* x *в интервале* $(-\Lambda_n,\ 0)$ *имеет место асимптотическое представление*

$$\frac{p_n(x)}{v_\alpha(x)} = \prod_{j=1}^{n} f_j(\rho) \exp\left\{B_n^\alpha\left[r(\tau) + \tau\rho\right]\right\}\left(1 + o(1)\right),$$

где функция $\rho(\tau)$ является положительным решением уравнения

$$\tau + \frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln f_j(\rho)\right)' = 0,$$

$$r(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(-\tau)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, & 1<\alpha<2, \\ \exp(1+\tau), & \alpha=1, \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} xB_n^{1-\alpha}, & 1 \leqslant \alpha < 2, \\ x + \ln B_n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

и

$$\Lambda_n = \begin{cases} o(B_n^{\alpha-1}), & 1<\alpha<2, \\ \ln B_n(1+o(1)), & \alpha=1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при* $n \to \infty$ *отношение* $\frac{p_n(x)}{v_\alpha(x)}$ *эквивалентно единице равномерно по* x *в интервале* $\left(-\Lambda_n(a'),\ 0\right)$, *где*

$$\Lambda_n(a') = \begin{cases} o\left(B_n^{\frac{1}{a'}(\alpha-1)(a'-\alpha)}\right), & 1<\alpha<2, \\ \ln B_n^{1-\frac{1}{a'}}\left(1+o(1)\right), & \alpha=1, \end{cases}$$

и a' *определяется согласно* (4).

Доказательство. Согласно условиям 1° и 3° найдётся такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и $0 \leqslant v \leqslant A$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\prod_{j=1}^{n} f_j(v+it)\right| dt.$$

Поэтому имеет место формула обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx}\prod_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{s}{B_n}\right)e^{sA_n}\,ds \tag{5}$$

для всех $n \geqslant n_0$ независимо от выбора числа γ из интервала $(0,\ AB_n)$. Здесь $p_n(x)$ – плотность распределения суммы S_n.

Положим

$$z = \frac{s}{B_n}, \qquad \tau = (x + A_n)B_n^{1-\alpha}$$

и вычислим при помощи метода перевала интеграл

$$B_n^{1-\alpha}p_n(\tau) = \frac{B_n}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp\left\{B_n^\alpha Q(z,\ \tau)\right\}dz, \tag{6}$$

где

$$Q(z,\ \tau)=z\tau+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\ln f_j(z)=$$

$$=z\tau+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\ln\left[1+\frac{\omega_j(z)}{\varphi_{\alpha j}(z)}\right].$$

Здесь $\omega_j(z)=f_j(z)-\varphi_{\alpha j}(z)$ и $\gamma\in(0,\ A)$.

Для нахождения точки перевала данной задачи нужно разыскать решения уравнения

$$Q'(z,\ \tau)=\tau+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln f_j(z)\right)'=$$

$$=\tau+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\psi'(z)+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j'(z)-\omega_j(z)\psi_j'(z)}{\varphi_{\alpha j}(z)+\omega(z)}=0. \tag{7}$$

Равенства $\mu_j(1)=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots$ и существование равномерно ограниченных $\nu_j(a),\ j=1,\ 2,\ \ldots$, позволяют при достаточно малых по модулю z дать для $\omega_j(z)$ и $\omega_j'(z)$ следующие оценки

$$\omega_j(z)=O(z^{a'}),\quad \omega_j'(z)=O(z^{a'-1}),\quad j=1,\ 2,\ \ldots. \tag{8}$$

Так как уравнение (7) в случае $1<\alpha<2$ имеет вид

$$\tau+z^{\alpha-1}+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega'(z)-\lambda_j z^{\alpha-1}\omega_j(z)}{1+\omega_j(z)e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j z^\alpha}}e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j z^\alpha}=0 \tag{9}$$

и согласно оценкам (8) мы можем найти такое положительное A', что для всех $z\in(0,\ A')$

$$\left|\omega_j(z)e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j z^\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{2},\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,$$

то

$$\left|\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j'(z)-\lambda_j z^{\alpha-1}\omega_j(z)}{1+\omega_j(z)e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j z^\alpha}}e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j z^\alpha}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j \operatorname{Re} z^\alpha}\left(\left|\omega_j'(z)\right|+\left|\lambda_j z^{\alpha-1}\omega_j(z)\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\omega_j'(z)\right|+\left|\lambda_j z^{\alpha-1}\omega_j(z)\right|\right)\leqslant c\,|z|^{a'-1}\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(a',\ z)+$$

$$+c'\,|z|^{\alpha-1+a'}\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\nu_j(a',\ z)\leqslant c_1(n)\,|z|^{a'-1}+c_2\,|z|^{a'+\alpha-1}. \tag{10}$$

Здесь c, c', $c_1(n)$ и c_2 — положительные постоянные $\left(c_1(n)\right.$ может стремиться к нулю, когда $\left.n\to\infty\right)$;

$$\nu_j(a',\ z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{a'}e^{-\operatorname{Re} z\vartheta x}\left|d\Omega_j(x)\right|,\qquad 0<\vartheta<1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,$$

которые в силу условии 1° существуют и равномерно ограничены при всех $z\in(0,\ A_1)$ для некоторого $A_1<A$ (предполагаем, что $A_1\leqslant A'$).

Следовательно, так как τ отрицательно и $\tau=o(1)$, когда x меняется в интервале $\left(-o(B_n^{\alpha-1}),\ 0\right)$, уравнение (9) имеет единственный положительный корень, который стремится к нулю, когда $\tau\to 0$. Когда x меняется в интервале $\left(-\ln B_n(1+o(1)),\ 0\right)$, имеют место аналогичные рассуждения и для случая $\alpha=1$. Следовательно, можно найти такое ε_0, что решения уравнения (7) будут лежать в интервале $(0,\ A_1)$, если только $\tau\in(-\varepsilon_0,\ 0)$. Зафиксируем достаточно малое τ и пусть ρ — соответствующий ему корень уравнения (7).

Поскольку подинтегральное выражение в соотношении (6) аналитично в полосе $0<\operatorname{Re}z<A_1$ и непрерывно на границе $\operatorname{Re}z=0$, то контур интегрирования можно заменить любым контуром вида

$$\Gamma_d=\left\{z:|z|=d,\quad |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2};\quad \operatorname{Re}z=0,\quad |z|>d\right\}$$

с любым значением d из $(0,\ A_1)$. Пусть $d=\rho$, и разлагаем контур интегрирования на три части

$$\Gamma_\rho=\Gamma_\rho^1+\Gamma_\rho^2+\Gamma_\rho^3,$$

где

$$\Gamma_\rho^1=\left\{z:|z|=\rho,\quad |\arg z|\leqslant\varepsilon_n\right\},$$

$$\Gamma_\rho^2=\left\{z:|z|=\rho,\quad \varepsilon_n\leqslant|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},\quad \Gamma_\rho^3=\left\{z:|z|\geqslant\rho,\quad \operatorname{Re}z=0\right\},$$

а ε_n будет выбрано ниже.

Сначала вычислим интеграл по Γ_ρ^1. Имеем

$$I_1=\frac{B_n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho^1}\exp\left\{B_n^\alpha Q(z,\ \tau)\right\}dz=\frac{B_n}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n}\exp\left\{B_n^\alpha Q(\rho e^{i\varphi},\ \tau)+i\varphi\right\}\rho\, d\varphi=$$

$$=\frac{\rho B_n}{\pi}\exp\left\{B_n^\alpha Q(\rho,\ \tau)\operatorname{Re}\int\limits_0^{\varepsilon_n}\exp\left\{B_n^\alpha\left[Q(\rho e^{i\varphi},\ \tau)-Q(\rho,\ \tau)\right]+i\varphi\right\}d\varphi.\right.$$

Так как при $\alpha>1$

$$Q''(\rho,\ \tau)=(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+$$

$$+\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^n\frac{\omega_j''(\rho)-2\lambda_j\rho^{\alpha-1}\omega_j'(\rho)-\lambda_j(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}\omega_j(\rho)+\lambda_j^2\rho^{2(\alpha-1)}\omega_j(\rho)}{1+\omega_j(\rho)e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j\rho^\alpha}}e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j\rho^\alpha}-$$

$$-\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{j=1}^n\frac{\omega_j'^2(\rho)-2\lambda_j\rho^{\alpha-1}\omega_j'(\rho)\omega_j(\rho)+\lambda_j^2\rho^{2(\alpha-1)}\omega_j^2(\rho)}{\left[1+\omega_j(\rho)e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j\rho^\alpha}\right]^2}e^{-\frac{2}{\alpha}\lambda_j\rho^\alpha},$$

$$\left|\omega_j(\rho)e^{-\frac{1}{\alpha}\lambda_j\rho^\alpha}\right|\leqslant\left|\omega_j(\rho)\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

и функция xe^{-x} удовлетворяет неравенству

$$xe^{-x}\leqslant\frac{1}{e}<\frac{1}{2},\qquad x\geqslant 0,$$

то, согласно условиям 1° и 2°, при $\rho\to0$ получаем

$$Q''(\rho,\ \tau)\rho^2=(\alpha-1)\rho^\alpha+c_2(n)\rho^{a'}+O\left(\rho^{\alpha+a'}+c_3(n)\rho^{2\alpha}+\rho^{2\alpha+a'}+\rho^{\alpha+2a'}\right)=$$

$$=(\alpha-1)\rho^\alpha+c_2(n)\rho^{a'}+o(\rho^{a'}) \tag{11}$$

(считаем, что $a'\leqslant2\alpha$). Здесь $c_2(n)$ и $c_3(n)$ — постоянные, которые могут стремиться к нулю при $n\to\infty$. В случае $\alpha=1$ имеем

$$Q''(\rho,\ \tau)\rho^2=\rho+c_4(n)\rho^{a'}+o(\rho^{a'}). \tag{12}$$

Следовательно, при $\rho\to0$ $Q''(\rho,\ \tau)\rho^2=O(\rho^\alpha)$. Аналогично получаем, что и

$$Q'''(\rho,\ \tau)\rho^3=O(\rho^\alpha).$$

Тогда

$$\Delta Q(\rho,\ \tau)=Q(\rho e^{i\varphi},\ \tau)-Q(\rho,\ \tau)=\frac{1}{2}Q''(\rho,\ \tau)\rho^2(e^{i\varphi}-1)^2+$$

$$+\frac{1}{6}Q'''(\rho,\ \tau)\rho^3(e^{i\varphi}-1)^3+o(\rho^\alpha\varphi^3),$$

$$\operatorname{Re}\Delta Q(\rho,\ \tau)=-\frac{\varphi^2}{2}Q''(\rho,\ \tau)\rho^2+o(\rho^\alpha\varphi^3),$$

$$\operatorname{Im}\Delta Q(\rho,\ \tau)=-\varphi^3Q''(\rho,\ \tau)\rho^2-\frac{\varphi^3}{6}Q'''(\rho,\ \tau)\rho^3+o(\rho^\alpha\varphi^3),$$

и

$$\operatorname{Re}\int_0^{\varepsilon_n}\exp\left\{B_n^\alpha\Delta Q(\rho,\ \tau)+i\varphi\right\}d\varphi=\int_0^{\varepsilon_n}\exp\left\{-B_n^\alpha Q''(\rho,\tau)\rho^2\frac{\varphi^2}{2}+O(B_n^\alpha\rho^\alpha\varphi^3)\right\}\times$$

$$\times\cos\left\{\left(B_n^\alpha Q''(\rho,\ \tau)\rho^2+\frac{1}{6}B_n^\alpha Q'''(\rho,\ \tau)\varphi^3+o(B_n^\alpha\rho^\alpha\varphi^3)\right)-\varphi\right\}d\varphi.$$

Сделав замену переменного $v=q\varphi$, где

$$q=\sqrt{B_n^\alpha Q''(\rho,\ \tau)\rho^2},$$

получаем

$$\operatorname{Re}\int_0^{\varepsilon_n}\exp\left\{B_n^\alpha\Delta Q(\rho,\ \tau)+i\varphi\right\}d\varphi=\frac{1}{q}\int_0^{\varepsilon_n q}e^{-\frac{v^2}{2}+o\left(\frac{v^3}{q}\right)}\cos\left(O\left(\frac{v^3}{q}+\frac{v}{q}\right)\right)dv.$$

Пусть

$$\varepsilon_n=4\frac{\sqrt{\ln q}}{q}.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\int_0^{\varepsilon_n}\exp\left\{B_n^\alpha\Delta Q(\rho,\ \tau)+i\varphi\right\}d\varphi=\frac{1}{q}\int_0^{4\sqrt{\ln q}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\left[1+0\left(\frac{\ln^3q}{q^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{1}{q}\left[1+O\left(\frac{\ln^3q}{q^2}\right)\right],$$

и окончательно получаем

$$I_1=\frac{\rho B_n}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{B_n^\alpha Q(\rho,\ \tau)\right\}\frac{1}{q}\left[1+O\left(\frac{\ln^3q}{q^2}\right)\right]. \tag{13}$$

Рассмотрим интеграл по контуру Γ_ρ^2. Согласно (7)

$$\operatorname{Re}\Delta Q(\rho,\ \tau)=-\frac{1}{\alpha}\rho^\alpha\left[\alpha(\cos\varphi-1)+(1-\cos\alpha\varphi)\right]+O(\rho^{a'}\varphi^2),\qquad\alpha>1,$$

и

$$\operatorname{Re}\Delta Q(\rho,\ \tau)=-\rho(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi-1)+O(\rho^{a'}\varphi^2),\qquad\alpha=1,$$

откуда получаем

$$\operatorname{Re}\Delta Q(\rho,\ \tau)\leqslant\begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}\,\rho^{\alpha}\,\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{4}\,\varepsilon_n^2, & \text{если}\quad \alpha>1, \\ -\rho\,\dfrac{\varepsilon_n}{4}, & \text{если}\quad \alpha=1. \end{cases}$$

Тогда

$$|I_2|=\left|\frac{\rho B_n}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho^2}\exp\left\{B_n^{\alpha}Q(\rho e^{i\varphi},\ \tau)+i\varphi\right\}d\varphi\right|\leqslant\frac{B_n\rho}{2\pi}\,e^{B_n^{\alpha}Q(\rho,\ \tau)-2\ln q}$$

и

$$\left|\frac{I_2}{I_1}\right|\leqslant\frac{q}{2\pi}\,e^{-2\ln q}=\frac{1}{q\sqrt{2\pi}}\,. \tag{14}$$

Согласно условию 3° имеем, что

$$|I_3|=\left|\frac{\rho B_n}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho^3}\exp\left\{B_n^{\alpha}Q(\rho\,e^{i\varphi},\ \tau)+i\varphi\right\}d\varphi\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho^3}e^{itx}\bar{f}_n(-it)\,dt\right|=0\,(e^{-c_0n}),\qquad c_0>0. \tag{15}$$

А эта оценка влечёт за собою оценку $I_3=o\,(I_1)$.

Все три оценки (13)–(15) приводят нас к следующему утверждению:

$$B_n^{1-\alpha}p_n(\tau)=\frac{\rho B_n}{q\sqrt{2\pi}}\exp\left\{B_n^{\alpha}Q\,(\rho,\ \tau)\right\}\left[1+0\left(\frac{\ln^3 q}{q^2}\right)\right].$$

С другой стороны, известно (из работ В. М. Золотарёва), что функция $V_\alpha(x)$ при $x\to-\infty$ имеет асимптотическое представление

$$V_\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\dfrac{1}{\alpha}\psi''(\rho_0)}}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\,\rho_0\psi'(\rho_0)+\frac{1}{\alpha}\,\psi(\rho_0)\right\}\left[1+0\left(\frac{\ln^3\rho_0}{\rho_0^2}\right)\right],$$

где функция $\rho_0=\rho_0(x)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\alpha}\,\psi'(\rho_0)=-x,$$

или

$$B_n^{1-\alpha}v_\alpha(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\dfrac{1}{\alpha}\psi''(\rho_1B_n)}}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\,\rho_1B_n\psi'(\rho_1B_n+\frac{1}{\alpha}\,\psi(\rho_1B_n)\right\}\times$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{\ln^3\rho_1B_n}{\rho_1^2B_n^2}\right)\right],$$

где

$$\rho_1=(-\tau)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Тогда при $\alpha>1$

$$\frac{p_n(\tau)}{v_\alpha(\tau)}=\frac{\rho\sqrt{(\alpha-1)\,\rho_1^{\alpha}B_n^{\alpha}}}{\rho_1\sqrt{B_n^{\alpha}Q''(\rho,\ \tau)\,\rho^2}}\exp\left\{B_n^{\alpha}\left[Q\,(\rho,\ \tau)+\frac{\alpha-1}{\alpha}\,\rho_1^{\alpha}\right]\right\}\times$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{\ln^3\rho_1B_n}{\rho_1^2B_n^2}\right)+O\left(\frac{\ln^3 q}{q^2}\right)\right]=$$
$$=\frac{\rho\sqrt{(\rho-1)\,\rho_1^{\alpha}}}{\rho_1\sqrt{Q''(\rho,\ \tau)\,\rho^2}}\prod_{j=1}^{n}f_j(\rho)\cdot\exp\left\{B_n^{\alpha}\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\,(-\tau)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\rho\tau\right]\right\}\times$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{\ln^3\rho_1B_n}{\rho_1^2B_n^2}\right)+O\left(\frac{\ln^3 q}{q^2}\right)\right].$$

Из оценки (11) получаем

$$\frac{\rho\sqrt{(\alpha-1)\rho_1^{\alpha}}}{\rho_1\sqrt{Q''(\rho,\tau)\rho^2}}=\frac{\rho\sqrt{\rho_1^{\alpha}}}{\rho_1\sqrt{\rho^{\alpha}}}\left(1+c_2'(n)\rho^{\alpha'-\alpha}\right),$$

где $c_2'(n)$ — ограниченное постоянное, которое в частном случае может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

С другой стороны, согласно оценке (10) для малых ρ имеем

$$-\tau=\rho^{\alpha-1}+\Theta\rho^{\alpha'-1}$$

(Θ — ограниченное постоянное), и

$$-\tau=\rho_1^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$\rho_1^{\alpha-1}=\rho^{\alpha-1}+\Theta\rho^{\alpha'-1}, \tag{16}$$

а отсюда

$$\rho_1=\rho\left(1+\Theta_1\rho^{\alpha'-\alpha}\right) \tag{17}$$

и

$$\rho_1^{\alpha}=\rho^{\alpha}\left(1+\Theta_2\rho^{\alpha'-\alpha}\right), \tag{18}$$

где Θ_1 и Θ_2 — ограниченные постоянные.

Следовательно,

$$\frac{\rho\sqrt{\rho_1^{\alpha}}}{\rho_1\sqrt{\rho^{\alpha}}}=1+O\left(\rho^{\alpha'-\alpha}\right),$$

и окончательно получаем

$$\frac{p_n(x)}{v_\alpha(x)}=\prod_{j=1}^{n} f_j(\rho)\cdot\exp\left\{B_n^{\alpha}\left(r(\tau)+\tau\rho\right)\right\}\left(1+O\left(\rho^{\alpha'-\alpha}\right)\right), \tag{19}$$

где

$$r(\tau)=\frac{\alpha-1}{\alpha}(-\tau)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},\qquad 1<\alpha<2.$$

А это равносильно утверждению теоремы 1, если только x меняется в интервале $\left(-o(B_n^{\alpha-1}),\ 0\right)$. В случае $\alpha=1$ таким же самым способом получается соотношение (19), где $r(\tau)=\exp(1+\tau)$. Когда x меняется в интервале $\left(-\ln B_n(1+o(1)),\ 0\right)$, из соотношения (19) следует утверждение теоремы и для $\alpha=1$.

Доказательство теоремы 2 получается как следствие из теоремы 1. Действительно, при $\alpha>1$ имеем

$$\frac{p_n(x)}{v_\alpha(x)}=\exp\left\{B_n^{\alpha}\left[\tau(\rho-\rho_1)+\frac{1}{\alpha}(\rho^{\alpha}-\rho_1^{\alpha})+\frac{1}{B_n^{\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\omega_j(\rho)}{\varphi_j(\rho)}\right)\right]\right\}.$$

Оценивая сумму

$$\frac{1}{B_n^{\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\omega_j(\rho)}{\varphi_j(\rho)}\right)$$

таким же самым способом, как и выражение (10), и воспользовавшись соотношениями (16) — (18), получаем, что

$$\frac{p_n(x)}{v_\alpha(x)}=\exp\left\{B_n^{\alpha}\cdot O(\rho^{\alpha'})\right\}=\exp\left\{o(1)\right\}\to 1,\quad n\to\infty,$$

если только

$$x \in \left(-o\left(B_n^{\frac{1}{\alpha'}(\alpha-1)(\alpha'-\alpha)}\right),\ 0 \right).$$

Аналогично получаем утверждение теоремы 2 и для случая $\alpha=1$, если только

$$x \in \left(-\ln B_n^{1-\frac{1}{\alpha'}}(1+o(1)),\ 0 \right).$$

В заключение выражаю благодарность В. А. Статулявичюсу за постановку задачи и помощь при её решении.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
20.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Золотарёв, Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, Тр. VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и мат. статистике, Вильнюс, 1962.
2. В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и её применения, 2, 2, 1957.

APIE RIBINES TEOREMAS DIDELIEMS ATSILENKIMAMS

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Reziumė)

Šiame darbe V. Zolotariovo ribinės teoremos dideliems atsilenkimams stabilių ribinių dėsnių atveju (žr. [1]) apibendrintos nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių atvejui.

ÜBER DIE GRENZWERTSÄTZE FÜR GROSSE ABWEICHUNGEN

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit sind die Grenzsätze für grosse Abweichungen im Falle der stabilen Grenzgesetze (sieht [1]) von V. Zolotariow für den Fall unabhängiger unterschiedlich verteilter Zufallsgrössen verallgemeinert.