II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

ПРИБЛИЖЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ Z-ФУНКЦИЙ ГЕККЕ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ

К. БУЛОТА

§ 1. Введение

В теории чисел для ряда приложений приходится иметь дело с функциональными уравнениями ряда функций. Наиболее известный пример представляет собой дзета-функция Римана, которая для комплексного переменного $s=\sigma+it$ определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \tag{1.1}$$

сходящимся в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s=\sigma>1$. Посредством функционального уравнения

$$\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s), \tag{1.2}$$

где

$$\chi(s)=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s), \tag{1.3}$$

дзета-функция Римана аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re} s=\sigma<0$. Остается полоса, так называемая „критическая“ полоса

$$0\leqslant\sigma\leqslant 1, \tag{1.4}$$

в которой оба уравнения (1.1) и (1.2) неприменимы. Это тем более важно, так как полоса (1.4) как раз является объектом наибольшего внимания — она связана с известной гипотезой Римана о пребывании всех нулей функции (1.1) на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, с вопросами распределения простых чисел и с другими проблемами теории чисел. Не претендуя на исчерпывающее изложение, вкратце коснемся некоторых исторических моментов.

В 1921 году Харди и Литльвуд [21], исследуя вышеупомянутые нули $\zeta(s)$ на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, получили для $\zeta(s)$ приближенное функциональное уравнение. Годом позже они, применив новый метод доказательства, получили в [22] то же уравнение с лучшим остаточным членом.

Приближенное функциональное уравнение представляет $\zeta(s)$ в полосе (1.4) частными суммами типа (1.1) и (1.2) и, таким образом, является некоторым „компромиссом“ между функцией $\zeta(s)$, определяемой уравнением (1.1), и ее аналитическим продолжением (1.2). Оно определяется следующим уравнением.

Пусть

$$s=\sigma+it,\quad |t|=2\pi\sqrt{XY},\quad -H<\sigma<H,$$

$$X>K>0,\quad Y>K>0,$$

где K, H — постоянные числа. Тогда, равномерно по X и Y, имеет место

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\leqslant Y}\frac{1}{n^{1-s}}+O\left\{X^{-\sigma}+X^{\frac{1}{2}-\sigma}Y^{-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{1.5}$$

где $\chi(s)$ определено в (1.3). (См., например, Титчмарш [9].)

В частном случае, при $\sigma=\frac{1}{2}$ и $X=Y=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, уравнение (1.5) имеется у самого Римана и в 1931 году опубликовано Зигелем [32] при издании некоторых работ Римана. Между прочим, у Римана было не только остаточный член в приближенном уравнении, но даже весь асимптотический ряд, первый член которого совпадает с главным членом в (1.5) для указанного частного случая.

Замечательное уравнение (1.5) Харди и Литльвуда дало толчок к работам такого типа. Аналогичные функциональные и приближенные функциональные уравнения для других функций, связанных с разными вопросами теории чисел, были получены рядом других авторов.

В 1929 году Харди и Литльвуд [23] получили подобное функциональное уравнение для $\zeta^2(s)$, Суетуна ([33]—[34]) для L-рядов Дирихле. Вильтон [41] в 1930 г. вывел приближенное функциональное уравнение для произведения двух дзета-функций, Титчмарш в 1938 г. [39] для $\zeta^2(s)$.

В 1946 г. Линник [8], используя методы работы Суетуны [34], получил приближенное функциональное уравнение для L-рядов Дирихле с переменным основным модулем q характера χ (у Суетуны q был фиксированным), с последующим применением для теорем, определяющих густоту нулей L-рядов Дирихле. Все это послужило новому выводу теоремы Виноградова—Гольдбаха.

К тем же вопросам было применено приближенное функциональное уравнение L-рядов Дирихле, в несколько другой форме полученное в том же году Чудаковым [19]. Оно позволило дать новое доказательство теоремы Виноградова—Гольдбаха.

В последних годах — в 1952 — Вибелитц получил приближенное функциональное уравнение для степеней дзета—функции Римана [40] и Татудзава [35] — тоже для L-рядов Дирихле.

Недавно (1960) появилась работа А. О. Гельфонда [2], довольно общего характера, где рассматривается произведение конечного числа L-рядов Дирихле и некоторой степени $\zeta(s)$ и выводится приближенное функциональное уравнение для этого произведения.

Наряду с обобщениями уравнения (1.5), не выходящими за пределами натуральных чисел, как области определения соответствующей функции, исследовались различные функциональные уравнения в алгебраических полях и над формами. Так Мордель [27] в 1930 г. дал функциональное уравнение для дзета-функции квадратичных форм, Зигель [31] для дзета-функции

Дедекинда. В 1934 г. Поттер [29] получил приближенное функциональное уравнение для дзета-функции Эпштейна, определяемой рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(m, n)^{-s},$$

где $\Phi(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$, a, b, c — вещественны, $4ac-b^2>0$.

В 1957 г. Апостол и Склар [12] получили приближенное функциональное уравнение для сигнатурных рядов Гекке, определяемых следующим образом:

Существуют такие числа $\lambda>0$, $k>0$, $\gamma=\pm 1$, что функция $\Phi(s)$, для $\sigma>\sigma_0$ определена рядом

$$\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s},$$

аналитически продолжается, как мероморфная функция, на всю s — плоскость уравнением

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \Phi(s)=\gamma\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s) \Phi(k-s).$$

В последнее время появилось несколько работ Чандрасекхарана и Нарасимана [13] — [15], в которых иследуются приближенные функциональные уравнения функций

$$\Phi(s)=\sum a(n) \lambda_n^{-s},$$

$$\Psi(s)=\sum a(n) \mu_n^{-s},$$

удовлетворяющих уравнению

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \Phi(s)=(2\pi)^{s-\delta} \Gamma(\delta-s) \Psi(\delta-s), \qquad \delta>0.$$

где $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ — две монотонные возрастающие последовательности положительных чисел, $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ — две последовательности комплексных чисел.

В 1952 г. В. Фишер [20] получил приближенное функциональное уравнение для дзета-функции Дедекинда $Z(s)$ в случае вещественного квадратичного поля. Его результаты следующие.

Пусть $\mathfrak{R}$ — класс идеалов поля, d — дискриминант поля, X, Y — достаточно большие числа, такие, что

$$c_1<\frac{X}{Y}<c_2.$$

Тогда в области

$$t=2\pi\sqrt{\frac{XY}{d}},$$

$$-M<\sigma<M, \quad M>0$$

имеет место приближенное функциональное уравнение

$$Z(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a}<X}} N\mathfrak{a}^{-s}+\psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^{-1} \\ N\mathfrak{b}<Y}} N\mathfrak{b}^{s-1}+O\left(X^{\frac{1}{2}-\sigma}\right),$$

где

$$\psi(s)=4d^{\frac{1}{2}-s}(2\pi)^{2s-1} \sin^2\frac{\pi s}{2} \Gamma^2(1-s).$$

Дзета-функции квадратичных форм над алгебраическими полями исследует Раманатан [30]. Имеется ряд работ и других авторов.

Интересной областью в алгебраической теории чисел являются Z-функции Гекке, определяемые как ряды

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

где $\Xi(\mathfrak{a})$ — характер Гекке второго рода; сумма берётся по всем идеалам, принадлежащим классу $\mathfrak{R}$. Гекке в своей работе [24] установил продолжимость Z-функций на всю s-плоскость и вывел для них функциональное уравнение. О возможности использования этих функций для некоторых вопросов теории чисел, указывал еще Минковский [26]. Кубилюс в ряде своих работ по геометрии простых чисел ([4]—[7]) использовал Z-функции Гекке для изучения разных вопросов распределения простых чисел алгебраических полей.

Для ряда вопросов геометрии простых чисел, как, например, для уточнения теорем о густоте нулей Z-функций Гекке в критической полосе и других, желательно иметь приближенное функциональное уравнение для Z-функций Гекке.

В настоящей работе дано такое приближенное функциональное уравнение для случая мнимого квадратичного поля.

Доказательство в сущности опирается на идеи работы [22] Харди и Литльвуда. Перенос соответствующих идей на алгебраическое поле вызывает некоторые трудности. Следуя Фишеру [20], сначала доказывается приближенное функциональное уравнение для комбинации двух Z-функций нужное уравнение затем следует сравнительно просто.

План работы следующий. В § 2 даны определения и некоторые сведения по теории Z-функций Гекке. § 3 содержит вспомогательные леммы, часть которых (леммы 6—10) являются хорошо известными леммами ряда авторов, на которые в ходе работы приходится часто ссылаться. В § 4 дано ряд лемм, касающихся применения метода ван дер Корпута для оценки сумм, содержащих характеры Гекке. Следует отметить, что метод ван дер Корпута значительного эффекта не даёт и только при X больших по сравнению с Y, несколько улучшает остаточный член, главным образом для неглавных характеров. Метод тригонометрических сумм Виноградова дал бы несколько лучшую оценку, чем метод ван дер Корпута, однако тоже недостаточную, чтобы улучшить остаточный член на всем диапазоне соотношения X и Y.

Остаточный член вычислен элементарно и только для случая $m \ll |t|$ (m — показатель характера Гекке). Аналитические методы даёт возможность получить и общий случай, который будет опубликован позднее.

Приближенное функциональное уравнение для Z-функций Гекке над алгебраическим мнимым квадратичным полем в случае асимптотически равных X и Y имеет следующую форму:

В области

$$-H<\operatorname{Re}s<H,$$

$$|\operatorname{Im}s|=2\pi\sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}},$$

где $H>0$, $X>c_1$ и $Y>c_2$ – достаточно большие числа, d – дискриминант поля, $\mathfrak{m}$ – образующий идеал характера Ξ, равномерно по X, Y, s

$$Z(s,\ \mathfrak{K})=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}+\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{K}^*\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}+O\left(X^{\frac{1}{2}-\sigma}\ln^{\frac{1}{2}}X\right),$$

для любого класса идеалов. Функция $\psi(s)$ и класс идеалов $\mathfrak{K}^*$ те же самые, что и в полном функциональном уравнении Z-функций Гекке для того же поля.

Остаточный член приближенного функционального уравнения в теореме 2 дан в нескольких формах, соответствующих разным соотношениям X и Y. Так, например, при $X=Y$ остаточный член $R\ll X^{\frac{1}{2}-\sigma}\ln^{\frac{1}{2}}X$, при $X=Y^2$, $R\ll\ll X^{\frac{3}{8}-\sigma}\ln X$ и т. д. Кроме того, в теореме 3 остаточный член получен для достаточно большого, но фиксированного Y. В этом случае, при $X=Y$, $R=BX^{\frac{1}{4}+\varepsilon-\sigma}$ $\varepsilon>0$, при $X=Y^{\frac{1}{2}}$, $R=BX^{\frac{1}{8}+\varepsilon-\sigma}$ и т. д. B – величина, оцениваемая константой, зависящей только от поля K, идеала $\mathfrak{m}$ и ширины полосы, в которой имеет место приближенное функциональное уравнение.

§ 2. Определения

В данной работе рассматривается фиксированное мнимое квадратичное поле K с дискриминантом $-d<0$. Как известно (Хассе [10], 309 стр.), за целочисленный базис такого поля можно принять числа 1, ω, где

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\frac{1+i\sqrt{d}}{2},\quad \text{для}\quad d\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ \omega&=\frac{i}{2}\sqrt{d},\quad \text{для}\quad d\equiv 2,\ 3\ (\mathrm{mod}\ 4),\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

Все целые идеалы поля K распределяются на конечное число h классов идеалов (Гекке [3], теорема 96). Каждый целый идеал $\mathfrak{a}$ поля представляется посредством базиса в следующем виде

$$\mathfrak{a}=a(a_1,\ a_2+\omega),\tag{2.2}$$

где ω – в (2.1) определенное базисное число поля K, a, a_1, a_2 – целые рациональные числа. Если наибольший общий целый рациональный делитель всех чисел идеала $a=1$, идеал называется первообразным.

Пусть $\mathfrak{m}\neq 0$ – целый фиксированный идеал поля K. Обозначим через g число единиц η поля, удовлетворяющих сравнению

$$\eta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}),\tag{2.3}$$

то есть, таких, что разность $\eta-1$ принадлежит идеалу $\mathfrak{m}$. Расширим, следуя Дедекиндом – Гекке (Гекке [3], [24]), поле K присоединением идеальных чисел, которые составляют h неподобных сеток. Таким образом, каждому идеалу $\mathfrak{a}$ соответствует в точности одна система ассоциированных идеальных чисел.

Пусть $\chi(\alpha)$ — абелевый групповой характер по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, где α — любое идеальное число поля. Через $\chi_0(\alpha)$ обозначим главный групповой характер, такой, что

$$\chi_0(\alpha)=\begin{cases} 0, & (\alpha,\ \mathfrak{m})>1, \\ 1, & (\alpha,\ \mathfrak{m})=1. \end{cases}$$

Выделим из каждого смежного класса группы единиц поля K по подгруппе единиц, сравнимых с 1 по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, по одному представителю $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ \ldots,$ $\varepsilon_{e(\mathfrak{m})}$, где $e(\mathfrak{m})$ — индекс этой подгруппы.

Характер Гекке первого рода определяется следующим образом:

$$\Xi_1(\alpha)=\Xi_1(\alpha,\ \mathfrak{m},\ m_0)=\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^{m_0 g}=e^{im_0 g \arg\alpha}, \tag{2.4}$$

для любого $\alpha\neq 0$, m_0 — целое рациональное число. Образуем произведение $\chi(\alpha)\,\Xi_1(\alpha)$. Если среди выбранных единиц $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{e(\mathfrak{m})}$ найдется хоть одна единица ε, для которой $\chi(\varepsilon)\,\Xi_1(\varepsilon)\neq 1$, то

$$\sum_{j=1}^{e(\mathfrak{m})} \chi(\varepsilon_j)\,\Xi_1(\varepsilon_j)=0.$$

Это следует из мультипликативности характеров (Сравни, напр., Чудаков [11], стр. 39). Если же $\chi(\varepsilon_j)\,\Xi_1(\varepsilon_j)=1$ для всех $\varepsilon_j\left(j=1,\ 2,\ \ldots,\ e(\mathfrak{m})\right)$, то в таком случае $\chi(\varepsilon)\,\Xi_1(\varepsilon)=1$ и для всех других единиц поля K. Назовем в этом случае это произведение характером Гекке второго рода и обозначим его через

$$\Xi(\alpha)=\Xi(\alpha,\ \mathfrak{m},\ m_0,\ \chi)=\chi(\alpha)\,\Xi_1(\alpha,\ \mathfrak{m},\ m_0). \tag{2.5}$$

Идеал $\mathfrak{m}$ будем называть образующим идеалом, число $m_0 g$ — показателем характера. Непосредственно ясно, что когда $m_0=0$, характер Гекке второго рода $\Xi(\alpha)$ совпадает с групповым характером $\chi(\alpha)$.

Главным характером Гекке назовём характер

$$\Xi_0(\alpha)=\Xi(\alpha,\ \mathfrak{m},\ 0,\ \chi_0)=\chi_0. \tag{2.6}$$

Поскольку характер Гекке второго рода $\Xi(\alpha)$ имеет одинаковое значение для всей системы ассоциированных идеальных чисел, то он полностью определяется заданием идеала $\mathfrak{a}$, которому однозначно соответствует определённая система ассоциированных идеальных чисел. Поэтому мы будем употреблять обозначение $\Xi(\mathfrak{a})$, где характер, как функция от идеала, понимается вышеуказанным образом. Обозначения $\chi(\mathfrak{a})$ и $\Xi_1(\mathfrak{a})$ будут означать, что из каждой системы идеальных ассоциированных чисел берётся по одному представителю.

Пусть, далее, $N\mathfrak{a}$ обозначает, как обычно, норму идеала $\mathfrak{a}$, $s=\sigma+it$ — комплексное переменное, σ и t всегда вещественные числа. Определим при помощи характеров $\Xi(\mathfrak{a})$ ряды Дирихле в области их сходимости следующим образом.

$$Z(s)=Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}} \Xi(\mathfrak{a})\,N\mathfrak{a}^{-s}. \tag{2.7}$$

Сумма в (2.7) берётся по всем идеалам, принадлежащим фиксированному классу идеалов $\mathfrak{K}$ поля K.

Z – функции Гекке, определенные в (2.7), сходятся в полуплоскости $\sigma > 1$. В работе [24] Гекке установил для функций типа (2.7) продолжимость на всю s – плоскость и вывел их функциональное уравнение. Z – функция Гекке является целой для всякого не главного характера $\Xi(\mathfrak{a})$. В случае, когда $\Xi = \Xi_0$ – главный характер, $Z(s, \Xi)$ является всюду регулярной, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс.

В общем случае, когда поле K является алгебраическим полем n-той степени, определение характеров Гекке несколько более сложно, они зависят от системы основных единиц поля (Гекке [24], Кубилюс [6]). Поскольку мы здесь не касаемся полей более высокой степени, характеры Гекке определены для частного случая квадратичного мнимого поля.

Будем рассматривать лишь случай, когда характер $\Xi(\mathfrak{a})$ является первообразным. Случай, когда характер $\Xi(\mathfrak{a})$ – производный, легко сводится к первому случаю, так как обозначая через $\Xi'(\mathfrak{a})$ – характер, производящий $\Xi(\mathfrak{a})$, имеем

$$Z(s, \Xi) = \varphi(s, \Xi') Z(s, \Xi'), \tag{2.8}$$

где

$$\varphi(s, \Xi') = \prod_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{\Xi'(\mathfrak{g})}{N\mathfrak{g}^s}\right). \tag{2.9}$$

В случае первообразного характера $\Xi(\mathfrak{a})$, Z – функции Гекке удовлетворяют функциональному уравнению

$$Z(s, \Xi, \mathfrak{K}) = \psi(s, \Xi) Z(1-s, \overline{\Xi}, \mathfrak{K}^*). \tag{2.10}$$

В (2.10) $\overline{\Xi}(\mathfrak{a})$, как и в дальнейшем, означает сопряжённое значение характера. Класс $\mathfrak{K}^*$ определяется следующим образом.

Пусть $\mathfrak{K}^{-1}$ – класс идеалов, обратный к $\mathfrak{K}$, то есть, такой класс, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ из $\mathfrak{K}$, и для любого $\mathfrak{c}$ из $\mathfrak{K}^{-1}$, имеем $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (\lambda)$, где λ – число поля K, (λ) означает главный идеал, порождённый числом λ. Тогда, если $\mathfrak{d}$ – дифферента поля, то идеалы $\mathfrak{b}$ класса $\mathfrak{K}^*$ удовлетворяют соотношению

$$\mathfrak{b} \cdot \frac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{m}\mathfrak{d}} = (\mu). \tag{2.11}$$

для любого идеала $\mathfrak{c} \in \mathfrak{K}^{-1}$, μ – не обязательно целое число, но принадлежащее полю K. Кроме того $(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = 1$.

Функция $\psi(s, \Xi)$, входящая в функциональное уравнение (2.10), имеет следующий вид

$$\psi(s, \Xi) = \varkappa(\Xi) \psi_1(s, \Xi). \tag{2.12}$$

Множитель $\varkappa(\Xi)$ зависит только от характера $\Xi(\mathfrak{a})$:

$$\varkappa(\Xi) = i^{m_g} N\mathfrak{m}^{-\frac{1}{2}} \chi(-1) \Xi_1(\mathfrak{m}\mathfrak{d}) G(1, \chi). \tag{2.13}$$

$$G(1, \chi) = \sum_{\tau}^{\operatorname{mod} \mathfrak{m}} \chi(\tau) e^{2\pi i S\left(\frac{\tau}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}}\right)}. \tag{2.14}$$

τ в (2.14) пробегает какую-нибудь полную систему вычетов по $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$, и, кроме того, такую, что $\frac{\tau}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}}$ является главным идеалом.

Функция $\psi_1(s, \Xi)$ в (2.12) зависит от отношения гамма-функций

$$\psi_1(s, \Xi)=A^{1-2s}\frac{\Gamma\left(\frac{|m_0 g|}{2}+1-s\right)}{\Gamma\left(\frac{|m_0 g|}{2}+s\right)}, \tag{2.15}$$

где

$$A=\frac{1}{2\pi}\sqrt{dN\mathfrak{m}}. \tag{2.16}$$

Для упрощения записей, обозначим

$$m=m_0 g. \tag{2.17}$$

Также введём символы

$$E(\chi)=\begin{cases}1, & \text{если } \chi=\chi_0,\\ 0, & \text{,, } \chi\neq\chi_0.\end{cases} \tag{2.18}$$

$$E(m)=\begin{cases}1, & \text{если } m=0,\\ 0, & \text{,, } m\neq 0.\end{cases} \tag{2.19}$$

$$E(\Xi)=\begin{cases}1, & \text{если } \Xi=\Xi_0,\\ 0, & \text{,, } \Xi\neq\Xi_0.\end{cases} \tag{2.20}$$

$\varphi(\mathfrak{m})$, как обычно, означает функцию Эйлера, выражающую число классов вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, взаимно простых с модулем.

Также условимся из всех систем идеальных чисел исключать число 0, равно как и идеалы с $N\mathfrak{a}=0$. Константа, входящая в символ O, везде зависит, самое большое, только от поля K, идеала $\mathfrak{m}$ и возрастает с возрастанием ширины полосы $\operatorname{Re} s$.

§ 3. Вспомогательные леммы

В леммах 1-4 этого параграфа малые латинские буквы обозначают только целые рациональные числа, а в остальных леммах они каждый раз оговариваются особо.

Лемма 1. *Пусть в квадратичном мнимом поле K имеем два целые, неравные 0 идеалы $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{c}$, удовлетворяющие условиям:*

$$1)\quad \mathfrak{c} - \text{первообразный идеал}; \tag{3.1}$$

если представление идеалов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{c}$ через базис имеет вид

$$\mathfrak{m}=m(m_1,\ m_2+\omega),$$
$$\mathfrak{c}=(c_1,\ c_2+\omega),$$

где $1, \omega$ — составляют базис поля, то

$$2)\quad (m,\ c_1)=1. \tag{3.2}$$

$$3)\quad (m_1,\ c_1,\ m_2-c_2)=1. \tag{3.3}$$

Тогда произведение идеалов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{c}$ имеет следующее представление через базис

$$\mathfrak{m}\mathfrak{c}=mr\left(\frac{m_1c_1}{r^2},\ M_1+\omega\right), \tag{3.4}$$

где числа r и M_1 имеют значения

$$r=(m_1,\ c_1),$$

$$M_1=\frac{1}{r}(m_2c_1c_0-c_2mm_1m_0), \tag{3.5}$$

c_0 *и* m_0 *— целые рациональные числа, удовлетворяющие условию:*

$$c_1 c_0 - m m_1 m_0 = r. \tag{3.6}$$

M_1 *определяется с точностью по* $\mathrm{mod}\,\frac{m_1 c_1}{r^2}$.

Доказательство.

Пусть идеал $\mathfrak{mc}$, согласно (2.2), имеет базис

$$\mathfrak{mc} = a\,(a_1,\ a_2 + \omega). \tag{3.7}$$

Как известно, норма идеала связана с его базисным представлением следующим образом:

если

$$\mathfrak{a} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

и

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\omega_j,$$

где $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ — базис поля, то

$$N\mathfrak{a} = \pm\,|\,c_{ij}\,|.$$

(Ландау [25], Гекке [3]).

Поэтому из (3.7) имеем

$$N(\mathfrak{mc}) = a^2 a_1. \tag{3.8}$$

Формально произведение двух идеалов $\mathfrak{a} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r)$ и $\mathfrak{b} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_p)$ определяется, как идеал

$$\mathfrak{ab} = (\alpha_1\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_i\beta_k,\ \ldots,\ \alpha_r\beta_p).$$

Поэтому

$$\mathfrak{mc} = \Big(m m_1 c_1,\quad m m_1 (c_2 + \omega),\quad m c_1 (m_2 + \omega),\quad m\,(c_2 + \omega)(m_2 + \omega)\Big). \tag{3.9}$$

Но два идеала равны в том и только том случае, —

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r) = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_p), \text{ —}$$

если каждое α_i линейно выражается через числа β_j с целыми коэффициентами из K, даже с целыми рациональными, если базисы идеалов целочисленные (Гекке [3]).

Используя (3.8), а также известное свойство

$$N(\mathfrak{mc}) = N\mathfrak{m} \cdot N\mathfrak{c},$$

легко получаем для базиса (3.7) следующее выражение

$$\mathfrak{mc} = \frac{mr}{k}\left(\frac{k^2 m_1 c_1}{r^2},\quad a_2 + \omega\right). \tag{3.10}$$

Для определения чисел k и a_2, воспользуемся замечанием, что базисные элементы произведения $\mathfrak{mc}$ в (3.9) должны линейно выражаться через базисные элементы в (3.10). Из этого получаем ряд соотношений:

$$r \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k), \tag{3.11}$$

$$a_2 \equiv c_2 \left(\mathrm{mod}\,\frac{k c_1}{r}\right), \tag{3.12}$$

$$a_2 \equiv m_2 \left(\mathrm{mod}\,\frac{k m_1}{r}\right), \tag{3.13}$$

$$c_2 m_2 + \omega^2 + \omega\,(c_2 + m_2) = \frac{r}{k}\left(\frac{k^2 m_1 c_1}{r^2}\,x_1 + (a_2 + \omega)\,y_1\right), \tag{3.14}$$

где x_1 и y_1 — целые рациональные параметры. Решая диофантовые уравнения (3.12), (3.13) и имея в виду условие (3.3), получаем

$$k=1,$$

$$a_2 \equiv M_1 \left(\operatorname{mod} \frac{m_1 c_1}{r^2}\right),$$

где M_1 имеет вид, указанный в формулировке леммы. Из линейной независимости базисных чисел поля 1, ω вытекает, что $l_1+l_2\omega=0$ равносильно $l_1=l_2=0$ и поэтому нетрудно проверить, что два уравнения, получающиеся из (3.14), никаких новых ограничений на a_2 не налагает.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть идеалы* $\mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{c}$ *удовлетворяют условиям* (3.1)–(3.3) *леммы* 1, $\mathfrak{d}$ — *дифферента поля.*

Тогда базис идеала $\frac{1}{\mathfrak{mcd}}$ *имеет следующий вид*

$$\frac{1}{\mathfrak{mcd}}=\left(\frac{mr}{2N(\mathfrak{mc})}+i\frac{M_2\, mr}{\sqrt{d}\,N(\mathfrak{mc})},\quad -\frac{i}{\sqrt{d}\,mr}\right). \tag{3.15}$$

где

$$M_2=\begin{cases} M_1, & \textit{если}\quad \omega=\frac{i}{2}\sqrt{d},\\ M_1+\frac{1}{2}, & \quad ,, \qquad \omega=\frac{1+i\sqrt{d}}{2}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Здесь, как и в лемме 1, $r=(m_1, c_1)$, M_1 — *определено условиями* (3.5)–(3.6).

Доказательство. Известно (Гекке [3] теорема 101), что если идеал $\mathfrak{a}$ имеет базис $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, определённые из условий

$$S(\alpha_i\beta_j)=e_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{3.17}$$

где S — след произведения $\alpha_i\beta_j$, составляют базис идеала $\frac{1}{\mathfrak{ad}}$, причем идеал $\frac{1}{\mathfrak{ad}}$ состоит из всех таких чисел λ, которые удовлетворяют условию: $S(\lambda\alpha)$ — целое число для всех $\alpha\in\mathfrak{a}$. Будем искать базис идеала $\frac{1}{\mathfrak{mcd}}$ в форме

$$(r_1+r_2\omega,\quad r_3+r_4\omega).$$

По лемме 1 базис идеала $\mathfrak{mc}$ имеет вид

$$\mathfrak{mc}=mr\left(\frac{m_1c_1}{r^2},\quad M_1+\omega\right).$$

Рассмотрим отдельно два возможные случая, указанные в (2.1), когда ω может иметь либо форму $\frac{i}{2}\sqrt{d}$, либо $\frac{1+i\sqrt{d}}{2}$.

В первом случае, когда $\omega=\frac{i\sqrt{d}}{2}$, получаем из (3.17) 4 уравнения

$$2r_1\frac{mm_1c_1}{r}=1,$$

$$r_3=0,$$

$$r_1M_1-r_2\frac{d^2}{4}=0,$$

$$mr\left(2r_3M_1-r_4\frac{d^2}{2}\right)=1.$$

Используя (3.8) для выражения нормы идеала, получаем утверждение леммы с $M_2 = M_1$.

Аналогично в случае $\omega = \frac{1+i\sqrt{d}}{2}$ получаем ряд соотношений

$$2\left(r_1 + \frac{r_2}{2}\right)\frac{mc_1 m_1}{r} = 1,$$

$$r_3 + \frac{r_4}{2} = 0,$$

$$\left(r_1 + \frac{r_2}{2}\right)\left(M_1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{r_2 d^2}{4} = 0,$$

$$-2mr\frac{r_4 d^2}{4} = 1.$$

из которых следует утверждение леммы с $M_2 = M_1 + \frac{1}{2}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть идеалы* $\mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{c}$ *удовлетеоряют условиям* (3.1) – (3.3) *леммы* 1, $\vartheta = v_1 + v_2\omega$ – *число поля* K. *Тогда числа* μ, *удовлетворяющие условиям*

$$\mu \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}, \tag{3.18}$$

$$\mu \equiv \vartheta \pmod{\mathfrak{m}}, \tag{3.19}$$

имеют форму

$$\mu = mr\left\{\frac{m_1 c_1}{r^2} t_1 + (M_1 + \omega) t_2\right\} + \psi, \tag{3.20}$$

где t_1, t_2 – *целые рациональные параметры,*

$$\psi = (v_1 - c_2 v_2)\,[a_0 c_0 c_1 + m b_0 (c_2 + \omega)] + v_2 (c_2 + \omega), \tag{3.21}$$

a_0 *и* b_0 – *целые рациональные числа, удовлетворяющие условию*

$$r a_0 - m (m_2 - c_2) b_0 = 1. \tag{3.22}$$

Числа M_1, r, c_0 – *те же самые, что и в лемме* 1. *Число* ψ *сравним с* ϑ *по* mod $\mathfrak{m}$.

Доказательство. Так как числа λ, принадлежащие идеалу $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$, имеют вид $\lambda = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ с целыми рациональными x, y, то, имея в виду представление идеалов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{c}$ через базис, можем написать вид чисел μ, удовлетворяющих условиям (3.18) – (3.19), в следующей форме

$$\mu = c_1 x_1 + (c_2 + \omega) x_2 = v_1 + v_2\omega + m\,[m_1 y_1 + (m_2 + \omega) y_2]. \tag{3.23}$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – целые рациональные числа. Уравнение (3.23) равносильно системе

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 = v_1 + m(m_1 y_1 + m_2 y_2), \\ x_2 = v_2 + m y_2, \end{cases}$$

Обычная подстановка приводит к

$$r\left(\frac{c_1}{r} x_1 - \frac{mm_1}{r} y_1\right) = v_1 - c_2 v_2 + m(m_2 - c_2) y_2. \tag{3.24}$$

Для того, чтобы неопределённое уравнение (3.24) имело целочисленное решение x_1, y_1, y_2, необходимо условие

$$v_1 - c_2 v_2 + m(m_2 - c_2) y_2 \equiv 0 \pmod{r} = r y_3,$$

где y_3 – целое рациональное число.

Получаем

$$c_1 x_1 - m m_1 y_1 = r y_3.$$

Решая это уравнение обычным способом, получаем

$$x_1 = c_0 y_3 + \frac{mm_1}{r} t_1,$$

$$y_1 = m_0 y_3 + \frac{c_1}{r} t_1.$$

Здесь t_1 — целый рациональный параметр, c_0 и m_0 удовлетворяют условию (3.6) в формулировке леммы 1. Кроме того, y_2 и y_3 связаны условием

$$r y_3 + m(m_2 - c_2) y_2 = v_1 - c_2 v_2.$$

В силу условия (3.3) можем найти такие числа a_0, b_0, удовлетворяющие (3.22) и получаем

$$y_3 = a_0 (v_1 - c_2 v_2) + m(m_2 - c_2) t_2,$$
$$y_2 = b_0 (v_1 - c_2 v_2) + r t_2,$$

где t_2 — целый рациональный параметр. Таким образом имеем

$$x_1 = \frac{mm_1}{r} t_1 + m(m_2 - c_2) c_0 t_2 + (v_1 - c_2 v_2) a_0 c_0,$$
$$x_2 = mrt_2 + (v_1 - c_2 v_2) m b_0 + v_2,$$
$$y_1 = \frac{c_1}{r} t_1 + m(m_2 - c_2) m_0 t_2 + (v_1 - c_2 v_2) a_0 m_0,$$
$$y_2 = rt_2 + (v_1 - c_2 v_2) b_0.$$

Простой подсчёт убеждает в справедливости формулировки (3.20). Лемма доказана.

Замечание. Обозначив $F_1 = \operatorname{Re} \mu$, $F_2 = \operatorname{Im} \mu$, так что $\mu = F_1 + iF_2$, можем представить F_1 и F_2 следующим образом:

пусть $\psi = q_1 + q_2 \omega$, тогда,

$$F_1 = mr\left\{\frac{m_1 c_1}{r^2} t_1 + M_2 t_2\right\} + q_1 + \operatorname{Re}(q_2 \omega), \tag{3.25}$$

$$F_2 = mr\left\{\frac{\sqrt{d}}{2} t_2\right\} + q_2 \frac{\sqrt{d}}{2}, \tag{3.26}$$

где M_2 определено в лемме 2 условием (3.16).

Лемма 4. *Пусть идеалы* $\mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{c}$ *удовлетворяют условиям* (3.1)—(3.3) *леммы* 1, r *имеет значение, указанное в формулировке леммы* 1, M_2 — *определенно в лемме* 2 *условием* (3.16), l_1 *и* l_2 — *целые рациональные параметры,* F_1 *и* F_2 *имеют вид, указанный в* (3.25)—(3.26). *Обозначим через* λ *числа вида*

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} \frac{mr}{N(\mathfrak{mc})} + i \frac{M_2 mr}{\sqrt{d}\, N(\mathfrak{mc})}\right) l_1 - \frac{il_2}{\sqrt{d}\, mr}. \tag{3.27}$$

Тогда заменяя $F_1(t_1, t_2)$ *и* $F_2(t_1, t_2)$, *как функции от* t_1, t_2, *через полярные координаты, получим следующие соотношения:*

$$t_1 = \rho\left\{\frac{mr}{N(\mathfrak{mc})} \cos\varphi - \frac{2M_2 mr}{\sqrt{d}\, N(\mathfrak{mc})} \sin\varphi\right\} + A_1, \tag{3.28}$$

$$t_2 = \rho\left\{\frac{2}{\sqrt{d}\, mr} \sin\varphi\right\} + A_2, \tag{3.29}$$

$$A_1 l_1 + A_2 l_2 = -S(\lambda\psi), \tag{3.30}$$

где $\psi = q_1 + q_2 \omega$ — *число из леммы* 3.

Доказательство. Замена F_1 и F_2 через полярные координаты приводит к выражениям (3.28) и (3.29), причём

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{r}{mm_1c_1}\operatorname{Re}\psi + \frac{M_2q_2r}{m_1c_1m}, \\ A_2 &= -\frac{q_2}{mr}. \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

Рассматривая отдельно случаи $\omega = \frac{i\sqrt{d}}{2}$ и $\omega = \frac{1+i\sqrt{d}}{2}$, непосредственно убеждаемся в справедливости утверждения (3.30). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* α, β, γ — *числа поля* K, x, y, m — *целые рациональные параметры*, z_1, z_2, X_0 — *вещественные положительные числа*, $\mathfrak{p} = \alpha x + \beta y + \gamma$, $\bar{\mathfrak{p}}$ — *означает величину, комплексно-сопряжённую с* $\mathfrak{p}$.

Тогда имеет место формула

$$\sum_{\substack{x \quad y \\ N\mathfrak{p} > X_0}}\sum (N\mathfrak{p} - X_0)\, e^{-2\pi\sqrt{N\mathfrak{p}}(z_1+z_2) + \frac{m}{2}(\ln \mathfrak{p} - \ln \bar{\mathfrak{p}})} =$$

$$= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\ \iint\limits_{N\mathfrak{p}_1 > X_0} (N\mathfrak{p}_1 - X_0)\, e^{-2\pi\sqrt{N\mathfrak{p}_1}(z_1+z_2) + 2\pi i(l_1t_1 + l_2t_2)} \times$$

$$\times e^{\frac{m}{2}(\ln \mathfrak{p}_1 - \ln \bar{\mathfrak{p}}_1)}\, dt_1\, dt_2, \tag{3.32}$$

где через $\mathfrak{p}_1$ *обозначена функция двух переменных* $\mathfrak{p}_1 = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma$.

Доказательство. Построим функцию $f(t_1, t_2)$, принимая сначала $z > 2$:

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} (N\mathfrak{p}_1 - X_0)^z\, e^{-2\pi\sqrt{N\mathfrak{p}_1}(z_1+z_2) + \frac{m}{2}(\ln \mathfrak{p}_1 - \ln \bar{\mathfrak{p}}_1)}, & \text{если} \quad N\mathfrak{p}_1 > X_0, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Здесь, как и в (3.32), берётся основная ветвь логарифма.

Функция $f(t_1, t_2)$ является два раза дифференцируемой и вместе со своими производными абсолютно интегрируема. Поэтому можем применить формулу суммирования Пуассона (Морделл [28])

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f_0(m_1, m_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} e^{2\pi i(l_1x_1 + l_2x_2)} f_0(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Применяя эту формулу к функции $f(t_1, t_2)$, получим выражение, которое в правой части равномерно сходится по z в области $C \geqslant \operatorname{Re} z \geqslant c > 0$ и представляет собой в ней аналитическую функцию. По принципу аналитического продолжения, ряд, построенный для $z > 2$, существует и для всех других z, для которых $\operatorname{Re} z > 0$, и в том числе и для $z = 1$. Лемма доказана.

Формула (3.32) является обобщением формулы Липшитца, аналогичное обобщениям Эйгеля [31], и Фишера [20].

Следующие леммы этого параграфа являются хорошо известными леммами разных авторов, на которые часто будем ссылаться.

Лемма 6. *Пусть $f(x)$ — вещественная, k_0 раз дифференцируемая функция, непрерывная вместе со своими производными на интервале $[a, b]$, $b-a \geqslant 1$.*

Пусть далее, на всем интервале $[a, b]$

$$\lambda_{k_0} \leqslant |f^{(k_0)}(x)| \leqslant h\lambda_{k_0}. \tag{3.33}$$

Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} = O\left\{ h^{\frac{2}{K}} (b-a) \lambda_{k_0}^{\frac{1}{2K-2}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}} \lambda_{k_0}^{-\frac{1}{2K-2}} \right\}, \tag{3.34}$$

где $K=2^{k_0-1}$.

Это известная лемма ван дер Корпута, которую в той или в несколько иной форме можно найти в работах ван дер Корпута [16]—[18], Титчмарша [36]—[37], также в книге Титчмарша [9].

Лемма 7. *Пусть $a_{m,n}$ — любые вещественные или комплексные числа,*

$$S_{m,n} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu},$$

$|S_{m,n}| \leqslant G$, для $1 \leqslant m \leqslant M$, $1 \leqslant n \leqslant N$, $b_{m,n}$ — вещественные числа и такие что $0 \leqslant b_{m,n} \leqslant H$, причем каждое из выражений

$$\left.\begin{array}{l} b_{m,n} - b_{m+1,n} - b_{m,n+1} + b_{m+1,n+1}, \\ b_{m,n} - b_{m,n+1}, \\ b_{m,n} - b_{m+1,n}, \end{array}\right\} \tag{3.35}$$

постоянного знака для всех рассматриваемых значений m и n.

Тогда имеем

$$\left| \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} b_{m,n} \right| < 5GH. \tag{3.36}$$

Доказательство леммы в работе Титчмарша [38].

Условия (3.35), очевидно, требуют монотонности чисел $b_{m,n}$ по обоим индексам. Если $b_{m,n} = b(m, n)$, то условия (3.35) равносильны требованию, чтобы производные

$$\frac{\partial b(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 b(x, y)}{\partial x\, \partial y}$$

были постоянного знака в рассматриваемой области.

Лемма 8. *Пусть $0 < A < 1 < B$ — постоянные, $a < 0$, $b > 0$,*

$$T = |t| > A.$$

Тогда имеем

$$\int_{\xi}^{\infty} u^{a+it} {\sin \atop \cos} u\, du = \begin{cases} O(\xi^a), & \text{если } T < BT < \xi, \quad (3.37) \\ O\left(\frac{\xi^{a+1}}{\xi - T}\right), & \text{„ } T < \xi < BT, \quad (3.38) \\ O(\xi^a \sqrt{T}), & \text{„ } T \leqslant \xi, \quad (3.39) \end{cases}$$

$$\int_{0}^{\xi} u^{b+it} {\sin \atop \cos} u\, du = \begin{cases} O(\xi^{b+1} T^{-1}), & \text{если } \xi < AT < T, \quad (3.40) \\ O\left(\frac{\xi^{b+1}}{T - \xi}\right), & \text{„ } AT < \xi < T, \quad (3.41) \\ O(\xi^b \sqrt{T}), & \text{„ } A < \xi \leqslant T. \quad (3.42) \end{cases}$$

Если $J_m(u)$ — функция Бесселя первого рода, и

$$a<\frac{1}{2}, \quad m \leqslant T, \tag{3.43}$$

то

$$\int_{\xi}^{\infty} u^{a+it} J_m(u)\,du = \begin{cases} O\left(\xi^{a-\frac{1}{2}}\right), & \text{если } T<BT<\xi, \quad (3.44) \\ O\left(\dfrac{\xi^{a+\frac{1}{2}}}{\xi-T}\right), & \;,, \quad T<\xi<BT, \quad (3.45) \\ O\left(\xi^{a-\frac{1}{2}}\sqrt{T}\right), & \;,, \quad T\leqslant \xi. \quad (3.46) \end{cases}$$

Если выполнены условия

$$a>\frac{1}{2}, \quad m \leqslant T, \tag{3.47}$$

то

$$\int_{0}^{\xi} u^{a+it} J_m(u)\,du = \begin{cases} O\left(\xi^{a+\frac{1}{2}}T^{-1}\right), & \text{если } \xi<AT<T, \quad (3.48) \\ O\left(\dfrac{\xi^{a+\frac{1}{2}}}{T-\xi}\right), & \;,, \quad AT<\xi<T, \quad (3.49) \\ O\left(\xi^{a-\frac{1}{2}}\sqrt{T}\right), & \;,, \quad A<\xi\leqslant T. \quad (3.50) \end{cases}$$

Утверждения (3.37) — (3.42) являются известной леммой Харди — Литльвуда, которую, например, можно найти в [21], стр. 298 — 301. Утверждения (3.44) — (3.46) легко выводятся из указанной леммы Харди — Литльвуда, доказательство их приведено в лемме Апостола — Склара, в работе [12]. Утверждения (3.48) — (3.50) легко следуют как из соотношений, приведенных в выше указанной лемме Апостола — Склара, так и непосредственно из леммы Харди — Литльвуда.

Лемма 9. *Пусть $f(u)$ является в интервале $[x_1, x_2]$ положительной, монотонной и дифференцируемой функцией. $\mathfrak{R}$ — класс идеалов поля K. Тогда имеет место соотношение*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant x_2}} f(N\mathfrak{a}) = A\int_{x_1}^{x_2} f(u)\,du + O\left\{\int_{x_1}^{x_2} u^{-\frac{2}{3}} f(u)\,du + x_1^{\frac{1}{3}} f(x_1) + x_2^{\frac{1}{3}} f(x_2)\right\}. \tag{3.51}$$

Здесь $A>0$ и зависит только от поля K.

Лемма легко доказывается на основе известного равенства

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a}\leqslant x}} 1 = Ax + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right), \quad n \text{ — степень поля } K$$

(Ландау, [25], теорема 210).

Доказательство леммы приведено в работе Фишера [20].

Лемма 10. *Пусть ω_1, ω_2 — два линейно независимые числа мнимого квадратичного поля K, ν — любое число поля,*

$$F(x, y) = m \arg(x\omega_1 + y\omega_2 + \nu) - t\ln\left[(x\omega_1+y\omega_2+\nu)(x\bar\omega_1+y\bar\omega_2+\bar\nu)\right],$$

$$V=\sqrt{t^2+\frac{m^2}{4}}, \tag{3.52}$$

$|t|>0$, t — вещественное число, $n \geqslant 1$ — целое рациональное, $X \geqslant c_1$, где c_1 достаточно велико, m — вещественное.

Тогда в области

$$\left.\begin{aligned} X \leqslant |x| \leqslant 2X, \\ |y| \leqslant 2X, \end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x, y)\right| \leqslant c_2 (n-1)!\, VX^{-n}. \tag{3.54}$$

Кроме того, при всяком $n \geqslant 1$ и всяком фиксированном x из указанного интервала, существуют такие положительные постоянные c_3, c_4, что интервал изменения y $[-2X, 2X]$ можно разбить на $\ll c_3^n$ интервалов, в каждом из которых справедливо, по крайней мере, одно из неравенств

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} F(x, y)\right| \geqslant c_4^k (k-1)!\, VX^{-k}, \qquad (k=n,\ n+1) \tag{3.55}$$

также в области

$$\left.\begin{aligned} X \leqslant |y| \leqslant 2X, \\ |x| \leqslant 2X, \end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

имеет месмо неравенство

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, y)\right| \leqslant c_5 (n-1)!\, VX^{-n}, \tag{3.57}$$

и, при всяком фиксированном y из указанного интервала $X \leqslant |y| \leqslant 2X$, существуют такие постоянные c_6, c_7, что интервал изменения x $[-2X, 2X]$ можно разбить на $\ll c_6^n$ интервалов, в каждом из которых справедливо, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} F(x, y)\right| \geqslant c_7^k (k-1)!\, VX^{-k}, \qquad (k=n,\ n+1). \tag{3.58}$$

Лемма приводится в слегка изменённой и по аналогии дополненой форме из работы Кубилюса [6].

§ 4. Применение метода ван дер Корпута для оценки сумм, содержащих характеры Гекке

Лемма 11. *Пусть ω_1, ω_2 — два линейно независимые элементы поля, ν — любое число поля, m — целое рациональное число, P вещественное, $U \geqslant c_1$, где c_1 достаточно велико.*

$$F_1(x, y) = m \arg(x\omega_1 + y\omega_2 + \nu) + P\sqrt{(x\omega_1 + y\omega_2 + \nu)(x\bar{\omega}_1 + y\bar{\omega}_2 + \bar{\nu})}\,, \tag{4.1}$$

причем в (4.1) берётся основное значение аргумента комплексного числа, через черточку обозначено сопряженное комплексное число.

Тогда при условии

$$|m| \ll PU^{\frac{23}{50}}, \tag{4.2}$$

имеет место следующее неравенство

$$\sum_{\substack{x \\ U<(x\omega_1+y\omega_2+\nu)(x\bar{\omega}_1+y\bar{\omega}_2+\bar{\nu})\leqslant 2U}} \sum_{y} e^{iF_1(x,y)} \ll \begin{cases} P^{\frac{4}{131}} U^{1-\frac{8}{131}}, & \text{для } U^{\frac{141}{136}} \leqslant P < U^2, \\ P^{\frac{8}{519}} U^{1-\frac{20}{519}}, & \quad ,, \quad U^{\frac{89}{176}} \leqslant P < U^{\frac{5}{2}}, \end{cases} \tag{4.3}$$

где суммируется по всем целым рациональным x, y, удовлетворяющим условиям, указанным ниже знака суммы.

Доказательство. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} x\omega_1+y\omega_2+\nu&=Ve^{i\varphi},\\ \omega_1&=ae^{i\alpha},\\ \omega_2&=be^{i\beta}. \end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

Тогда вещественная функция $F_1(x, y)$ имеет вид

$$F_1(x, y)=m\varphi+PV.$$

Представляя аргумент φ в виде

$$\varphi=\frac{1}{2i}\left\{\ln(x\omega_1+y\omega_2+\nu)-\ln(x\bar\omega_1+y\bar\omega_2+\bar\nu)\right\},$$

получим, дифференцируя по x и по y:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=a\cos(\alpha-\varphi),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{a}{V}\sin(\alpha-\varphi),\tag{4.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=b\cos(\beta-\varphi),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{b}{V}\sin(\beta-\varphi).\tag{4.6}$$

Поэтому

$$\frac{\partial^5F_1(x, y)}{\partial x^5}=\frac{7!!\,a^5P}{V^4}\left\{\frac{8m\sin5(\alpha-\varphi)}{35PV}+\right.$$

$$\left.+\sin^2(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\left[\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{4}{7}\right]\right\},\tag{4.7}$$

$$\frac{\partial^6F_1(x, y)}{\partial x^6}=\frac{9!!\,a^6P}{V^5}\left\{\frac{4m\sin6(\alpha-\varphi)}{63PV}+\right.$$

$$\left.+\sin^2(\alpha-\varphi)\left[\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt7}\right)\right]\left[\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt7}\right)\right]\right\}.\tag{4.8}$$

Из (4.6) следует, что производные по y имеют в точности те же самые выражения, что и (4.7) – (4.8), с заменой a и α на b и β. Покажем, что при достаточно большом Z, в области

$$\begin{aligned} Z\leqslant|y|&\leqslant2Z,\\ |x|&\leqslant2Z, \end{aligned}\tag{4.9}$$

имеет место неравенство

$$|\sin(\alpha-\varphi)|\geqslant c_2,\tag{4.10}$$

где $c_2>0$ – постоянная.

Это доказывается таким же способом, как, например, в работе Кубилюса [6], в лемме 9:

$$\sin(\alpha-\varphi)=\frac{V}{a}\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{x\omega_1+y\omega_2+\nu}\right)=\frac{1}{aV}\operatorname{Im}\left(\omega_1(x\bar\omega_1+y\bar\omega_2+\bar\nu)\right)=$$

$$=\frac{1}{aV}\left\{y\operatorname{Im}(\omega_1\bar\omega_2)+\operatorname{Im}(\omega_1\bar\nu)\right\}.\tag{4.11}$$

В силу линейной независимости чисел ω_1 и ω_2,

$$\operatorname{Im}(\omega_1\bar\omega_2)\neq0.\tag{4.12}$$

Так как в области (4.9) V удовлетворяет неравенству

$$c_3Z\leqslant V\leqslant c_4Z,$$

при некоторых постоянных $c_3>0$, $c_4>0$, то из (4.11), в силу (4.12), следует неравенство (4.10). Те же самые рассуждения, примененные к области

$$\begin{aligned} Z\leqslant|x|&\leqslant2Z,\\ |y|&\leqslant2Z, \end{aligned}\tag{4.13}$$

позволяют доказать, что при достаточно большом Z и при некоторой постоянной $c_5 > 0$ имеет место в (4.13)

$$|\sin(\beta-\varphi)| \geqslant c_5 . \tag{4.14}$$

Область, в которой требуется оценить сумму (4.3), характеризуется условием

$$U < V^2 \leqslant 2U. \tag{4.15}$$

Это кольцо между двумя кривыми эллиптического типа, при достаточно большом U содержащая начало координат. Достаточно оценить (4.3) на части кольца, содержащейся в первом квадранте. Оценка суммы в других квадрантах вполне аналогична.

В силу условий (4.2) имеем, что в (4.7)–(4.8) первый член мал по сравнению со вторым, если

$$|\cos(\alpha-\varphi)| > \delta, \tag{4.16}$$

и

$$\left|\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{4}{7}\right| > \delta, \tag{4.17}$$

для (4.7), и

$$\left|\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right| > \delta, \tag{4.18}$$

$$\left|\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right| > \delta, \tag{4.19}$$

для (4.8). Применяя в областях, где выполнено (4.16)–(4.17) для (4.7), или соответственно (4.18)–(4.19) для (4.8), лемму ван дер Корпута (лемма 6) с $h=\delta^{-1}$, $k_0=5$ и $k_0=6$, получаем

$$\sum_{\substack{x\\ U<V^2\leqslant 2U\\ 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{4}}}^{*} e^{iF_1(x,y)} \ll \begin{cases} \delta^{-\frac{1}{8}}\sqrt{U}\,(P\delta U^{-2})^{\frac{1}{30}} + U^{\frac{7}{16}}(P\delta U^{-2})^{-\frac{1}{30}} & \text{при } k_0=5, \\ \delta^{-\frac{1}{16}}\sqrt{U}\,(P\delta U^{-\frac{5}{2}})^{\frac{1}{62}} + U^{\frac{15}{32}}(P\delta U^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{62}} & \text{при } k_0=6. \end{cases}$$

Звездочка означает, что сумма берется по тем секторам, где выполнены условия (4.16)–(4.17), и соответственно (4.18)–(4.19). Так как раствор углов, в которых

$$|\cos(\alpha-\varphi)| \leqslant \delta,$$

или

$$\left|\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{4}{7}\right| \leqslant \delta,$$

и соответственно

$$\left|\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right| \leqslant \delta,$$

или

$$\left|\sin^2(\alpha-\varphi)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right| \leqslant \delta,$$

не больше $O(\delta)$, то оставшиеся секторы оцениваем тривиально — по их площади:

$$\sum_{\substack{x,\,y\\ U<V^2\leqslant 2U\\ 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{4}}}^{**} e^{iF_1(x,y)} \ll \delta U.$$

В секторе $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ получим те же самые оценки применяя лемму 6 для производных по y.

Далее, суммируя по всем y от 0 до y_0, где $V^2(y, y_0) = 2U$ (а в секторе $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ по всем x от 0 до $x_0 = y_0$), получаем

$$\sum_{U < V^2 \leqslant 2U} e^{iF_1(x,y)} \ll \begin{cases} P^{\frac{1}{30}} U^{\frac{14}{15}} \delta^{-\frac{11}{120}} + P^{-\frac{1}{30}} U^{\frac{241}{240}} \delta^{-\frac{1}{30}} + \delta U, & k_0 = 5, \\ P^{\frac{1}{62}} U^{\frac{119}{124}} \delta^{-\frac{23}{496}} + P^{-\frac{1}{62}} U^{\frac{1001}{992}} \delta^{-\frac{1}{62}} + \delta U, & k_0 = 6. \end{cases}$$

Выбирая

$$\text{для} \quad k_0 = 5, \quad \delta = P^{\frac{4}{131}} U^{-\frac{8}{131}},$$

$$,, \quad k_0 = 6, \quad \delta = P^{\frac{8}{519}} U^{-\frac{20}{519}},$$

и проверив интервалы применения этих оценок, получаем (4.3). Лемма доказана.

Для удобства записей в следующих леммах введём условные показатели, определив их следующим образом:

$$\sum_{U < V^2 \leqslant 2U} e^{iF_1(x,y)} \ll P^{2k'} U^{1-k},$$

$$2k' = \begin{cases} \frac{4}{131}, \\ \frac{8}{519}, \end{cases} \quad k = \begin{cases} \frac{8}{31}, & \text{для} \quad U^{\frac{141}{136}} \leqslant P \leqslant U^2, \\ \frac{20}{519}, & ,, \quad U^{\frac{89}{176}} \leqslant P \leqslant U^{\frac{5}{2}}, \\ k' = k = 0, & ,, \quad P > U^{\frac{5}{2}}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Лемма 12. *Пусть $\Xi(\mathfrak{b})$ — характер Гекке второго рода с показателем m и образующим идеалом $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{B}$ — фиксированный класс идеалов поля K, $U \geqslant c$, $c > 0$ — достаточно большое число, $P \gg 1$ — вещественное, α — то же. Тогда при условии*

$$m \ll P U^{\frac{23}{50}} \tag{4.21}$$

имеет место неравенство

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \\ U < N\mathfrak{b} \leqslant 2U}} \overline{\Xi}(\mathfrak{b}) \cos(P\sqrt{N\mathfrak{b}} + \alpha) \ll P^{2k'} U^{1-k}, \tag{4.22}$$

где k' и k имеют значения, указанные в лемме 11 *формулами* (4.20).

Доказательство. Согласно определениям (2.4)—(2.5) выразим характер $\overline{\Xi}$ в виде произведения

$$\overline{\Xi}(\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{b}) e^{-im \arg \mathfrak{b}}. \tag{4.23}$$

Выберем из класса идеалов $\mathfrak{B}^{-1}$, обратного к классу $\mathfrak{B}$, идеал $\mathfrak{b}_0$ и положим $\mathfrak{b} = \frac{(\varkappa)}{\mathfrak{b}_0}$. Очевидно, что когда $\mathfrak{b}$ пробегает все идеалы класса $\mathfrak{B}$, удовлетворяющие условию $U < N\mathfrak{b} \leqslant 2U$, $(\varkappa)$ пробегает все главные идеалы, делящие $\mathfrak{b}_0$, или $\varkappa$ — все целые неассоциированные числа идеала $\mathfrak{b}_0$, удовлетворяющие условию

$$UN\mathfrak{b}_0 < N\varkappa \leqslant 2UN\mathfrak{b}_0. \tag{4.24}$$

Поэтому

$$\mathfrak{S} = \Xi(\mathfrak{b}_0) \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{b}_0 \\ UN\mathfrak{b}_0 < N\varkappa \leqslant 2UN\mathfrak{b}_0}} \overline{\chi(\varkappa)}\, e^{-im \arg \varkappa} \cos(PN\mathfrak{b}_0^{-\frac{1}{2}} \sqrt{N\varkappa} + \alpha). \tag{4.25}$$

Разобьем сумму (4.25) на ряд сумм, где каждый $\varkappa$ принадлежит тому же самому классу вычетов по $\bmod \mathfrak{m}$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \Xi(\mathfrak{b}_0) \sum_{\nu}^{\bmod \mathfrak{m}} \overline{\chi(\nu)} \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{b}_0 \\ \varkappa \equiv \nu (\bmod \mathfrak{m}) \\ UN\mathfrak{b}_0 < N\varkappa \leqslant 2UN\mathfrak{b}_0}} e^{-im \arg \varkappa} \times$$

$$\times \left\{ e^{i(PN\mathfrak{b}_0^{-\frac{1}{2}} \sqrt{N\varkappa} + \alpha)} + e^{-i(PN\mathfrak{b}_0^{-\frac{1}{2}} \sqrt{N\varkappa} + \alpha)} \right\}. \tag{4.26}$$

Но, как показано в лемме 3, числа поля K, принадлежащие идеалу $\mathfrak{b}_0$ и сравнимые с числом ν по модулю другого идеала, обладают базисом ω_1, ω_2 и представимы в форме $\varkappa = x\omega_1 + y\omega_2 + \nu$. Из (4.26) имеем

$$\mathfrak{S} \ll \sum_{\nu}^{\bmod \mathfrak{m}} \left| \sum_{UN\mathfrak{b}_0 < \varkappa\bar{\varkappa} \leqslant 2UN\mathfrak{b}_0} e^{iF_1(x, y)} \right|, \tag{4.27}$$

где функция $F_1(x, y)$ удовлетворяет всем условиям леммы 11. В (4.27), как и в (4.26) вторая сумма суммируется по какой-нибудь полной системе вычетов по $\bmod \mathfrak{m}$.

Как известно из теории алгебраических чисел, в каждом классе идеалов существует целый идеал, норма которого не превосходит $\sqrt{d}$, где d — дискриминант поля (Гекке [3], теорема 96). Поэтому идеал $\mathfrak{b}_0$ можем так выбрать, чтобы $N\mathfrak{b}_0 \ll 1$. Далее, применив лемму 11, получаем (4.22). Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $\Xi(\mathfrak{b})$ — характер Гекке второго рода с показателем m, $\mathfrak{B}$ — фиксированный класс идеалов поля K, $X \geqslant c_1$, $Y \geqslant c_2$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — достаточно большие числа, K, α — вещественные константы, k' и k — показатели из леммы* 11, *определенные в* (4.20).

Тогда при условии

$$m \ll X^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{23}{50}}, \tag{4.28}$$

$$n > 1 - k, \tag{4.29}$$

имеет место неравенство

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \\ N\mathfrak{b} > Y}} \Xi(\mathfrak{b})\, N\mathfrak{b}^{-n} \cos(K\sqrt{XN\mathfrak{b}} + \alpha) \ll R = X^{k'} Y^{1-k-n}, \tag{4.30}$$

где, если подставить значения k' и k:

$$R = \begin{cases} X^{\frac{2}{131}} Y^{1-n-\frac{8}{131}}, & \text{для } Y^{\frac{141}{68}} \leqslant X < Y^4, \quad (4.31) \\ X^{\frac{4}{519}} Y^{1-n-\frac{20}{519}}, & \quad ,, \quad\; Y^{\frac{89}{88}} \leqslant X < Y^5. \quad (4.32) \end{cases}$$

Доказательство. Разобъем сумму (4.30) на ряд сумм по интервалам

$$\mathfrak{S}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}\\ 2^rY<N\mathfrak{b}\leqslant 2^{r+1}Y}}\Xi(\mathfrak{b})\,N\mathfrak{b}^{-n}\cos(K\sqrt{XN\mathfrak{b}}+\alpha). \tag{4.33}$$

Так как $N\mathfrak{b}^{-n}$ является монотонной функцией от $N\mathfrak{b}$, то по лемме 7 имеем

$$\mathfrak{S}\ll\sum_{r=0}^{\infty}(2^rY)^{-n}\left|\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}\\ 2^rY<N\mathfrak{b}\leqslant 2^{r+1}Y}}\Xi(\mathfrak{b})\cos(K\sqrt{XN\mathfrak{b}}+\alpha)\right|. \tag{4.34}$$

Для оценки модуля суммы в (4.34) применим лемму 12, полагая в ней $U=2^rY$, $P=K\sqrt{X}$. Так как, в силу (4.28), выполняется условие (4.21), то получаем

$$\mathfrak{S}\ll\sum_{r=0}^{\infty}(2^rY)^{1-n-k}X^{k'}=X^{k'}Y^{1-n-k}\sum_{r=0}^{\infty}2^{r(1-n-k)}. \tag{4.35}$$

Поскольку имеет место (4.29), то ряд в (4.35) сходится и получаем (4.30). Неравенства (4.31)–(4.32) легко следуют из (4.30). Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $\Xi(\mathfrak{b})$ – характер Гекке второго рода с показателем m, $\mathfrak{B}$ – фиксированный класс идеалов поля, $X\geqslant c_1$ и $Y\geqslant c_2$, где c_1, c_2 – достаточно большие положительные числа, K, α – вещественные константы, k' и k – числа из леммы* 11.

Тогда при выполнении условий

$$m\ll X^{\frac{1}{2}+\frac{23k'}{50}}Y^{\frac{23}{50}(1-n-k)}, \tag{4.36}$$

$$n<1-k, \tag{4.37}$$

имеет место неравенство

$$\mathfrak{S}=\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\Xi(\mathfrak{b})\,N\mathfrak{b}^{-n}\cos(K\sqrt{XN\mathfrak{b}}+\alpha)\ll R=X^{k'}Y^{1-k-n}, \tag{4.38}$$

или, более подробно,

$$R=\begin{cases} X^{\frac{2}{131}}Y^{1-n-\frac{8}{131}}, & \text{для}\quad Y^{\frac{141}{68}}\leqslant X<Y^4, \quad (4.39)\\ X^{\frac{4}{519}}Y^{1-n-\frac{20}{519}}, & \quad ,,\quad\; Y^{\frac{89}{88}}\leqslant X<Y^5. \quad (4.40)\end{cases}$$

Доказательство. Разбивая сумму (4.38) аналогично, как и в лемме 13, на ряд сумм, имеем

$$\mathfrak{S}=\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y_0}}\Xi(\mathfrak{b})\,N\mathfrak{b}^{-n}\cos(K\sqrt{XN\mathfrak{b}}+\alpha)+$$

$$+\sum_{r=0}^{r_1}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}\\ 2^{-r-1}Y<N\mathfrak{b}\leqslant 2^{-r}Y}}\Xi(\mathfrak{b})\,N\mathfrak{b}^{-n}\cos(K\sqrt{XN\mathfrak{b}}+\alpha), \tag{4.41}$$

где r_1 и Y_0 связаны условием $-Y_0=2^{-r_1-1}Y$. В силу монотонности $N\mathfrak{b}^{-n}$, применяя лемму 12 и выбирая $Y_0 \asymp \dot{X}^{k'} Y^{1-k-n}$, получаем (4.38) и также (4.39)–(4.40). Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть ω_1, ω_2 — два линейно независимые элементы поля K, ν — любое число поля, m — вещественное, $U \geqslant c_1$, где $c_1>0$ достаточно велико, $t>0$,*

$$F_2(x, y)=m\arg(x\omega_1+y\omega_2+\nu)-t\ln\left\{(x\omega_1+y\omega_2+\nu)(x\bar{\omega}_1+y\bar{\omega}_2+\bar{\nu})\right\}, \tag{4.42}$$

причем в (4.42) берется основная ветвь логарифма.

Тогда имеет место следующее неравенство

$$\sum_{x}\sum_{y}\limits_{U<(x\omega_1+y\omega_2+\nu)(x\bar{\omega}_1+y\bar{\omega}_2+\bar{\nu})\leqslant 2U} e^{iF_2(x,y)} \ll R, \tag{4.43}$$

где суммируется по всем целым рациональным x, y удовлетворяющим условию, указанному под знаком суммы,

$$V=\sqrt{t^2+\frac{m^2}{4}}, \tag{4.44}$$

а R определяется следующим образом:

$$R=\begin{cases} U^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}+UV^{-\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}+\delta U, & \delta>0, \quad (4.45)\\ U^{\frac{3}{4}}V^{\frac{1}{6}}\delta^{-\frac{1}{3}}+UV^{-\frac{1}{6}}\delta^{-\frac{1}{6}}+\delta U, & \delta>0, \quad (4.46)\\ U^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}+U^{\frac{3}{4}}V^{\frac{1}{6}}+UV^{-\frac{1}{6}}. & \quad (4.47)\end{cases}$$

Доказательство. В лемме Кубилюса ([6], лемма 10) показано, что производные функции $F_2(x, y)$ можно так выразить:

$$\frac{\partial^n F_2(x, y)}{\partial y^n}=2(-1)^n(n-1)!\,U_1V\cos(n\varphi+\vartheta), \tag{4.48}$$

если принять

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}_2(x\omega_1+y\omega_2+\nu)^{-1}&=U_1e^{i\varphi},\\ t+\frac{m}{2}i&=Ve^{i\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{4.49}$$

Несколько изменяя формулировку леммы 10, можем утверждать, что область

$$\left.\begin{aligned} X_1\leqslant |x|&\leqslant 2X_1,\\ |y|&\leqslant 2X_1, \end{aligned}\right\} \tag{4.50}$$

можно разбить на конечное число секторов $\varphi_1<\varphi\leqslant\varphi_2$, где в каждом из них выполняется по меньшей мере одно из двух неравенств

$$\left|\frac{\partial^k F_2(x, y)}{\partial y^k}\right| \geqslant c_2(k-1)!\,\frac{V}{X_1^k}, \qquad k=n,\ n+1, \tag{4.51}$$

при достаточно большом X_1 и $c_2>0$. Оценка сверху тривиальна в (4.50):

$$\left|\frac{\partial^n F_2(x, y)}{\partial y^n}\right| \leqslant c_3(n-1)!\,\frac{V}{X_1^n}. \tag{4.52}$$

Аналогичные неравенства сверху и снизу можно получить и для производных по x в области

$$\left.\begin{aligned} X_1\leqslant |y|&\leqslant 2X_1\\ |x|&\leqslant 2X_1 \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

Разделяем все кольцо $U < V^2 \leqslant 2U$ на секторы, где имеет место $|\cos(n\varphi + \vartheta)| > \delta$, и на секторы с условием $|\cos(n\varphi+\vartheta)| \leqslant \delta$, в первых применяем лемму 6 с

$$k_0 = 2,$$

в остальных секторах оцениваем тривиально. Тем самим получаем (4.45).

Аналогично, применяя ту же лемму 6 с

$$k_0 = 3,$$

имеем (4.46).

Наконец, для получения оценки (4.47), всю исследуемую область подразделяем на секторы, в которых имеет место (4.51) с $k=2$, или с $k=3$. Первый квадрант разделим прямой $y=x$. В части квадранта $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{4}$ каждый сектор, полученный на основе предыдущего разделения, делим на области типа (4.50). Применяя в каждой из таких областей лемму 6 с $k_0=2$, или $k_0=3$, в зависимости от того, какого типа сектор — с выполнением (4.51) для $k=2$, или для $k=3$, суммируя все такие области, и далее, суммируя по всем значениям второго переменного, получаем

$$\sum_{\substack{U<V^2\leqslant 2U\\ 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{4}}} e^{iF_1(x,y)} \ll U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} + U^{\frac{3}{4}} V^{\frac{1}{6}} + UV^{-\frac{1}{6}};$$

так как области типа (4.50) полностью исчерпают сектор $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{4}$. В другой части первого квадранта, где $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, то же самое производим с заменой y на x и (4.53) вместо (4.51). Этим приходим к (4.47). Лемма доказана.

Если для сокращения ввести показатели l', l, то (4.45)—(4.47) запишем следующим образом

$$R = V^{2l'} U^{1-l'-l}. \tag{4.54}$$

Лемма 16. *Пусть $\Xi(\mathfrak{b})$ — характер Гекке второго рода с показателем m, $s=\sigma+it$ — комплексное переменное, $X \geqslant c_1$, $Y \geqslant c_2$, где $c_1>0$, $c_2>0$ — достаточно большие числа, $\mathfrak{B}$ — фиксированный класс идеалов поля K, $|m| \leqslant t$,*

$$t = c\sqrt{XY}. \tag{4.55}$$

Тогда, при выполнении условий

$$\sigma < 1 - l, \tag{4.56}$$

где l — число из леммы 15, имеем следующее неравенство

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} \ll R_1, \tag{4.57}$$

где

$$R_1 \ll \begin{cases} X^{\frac{1}{6}} Y^{\frac{5}{6}-\sigma}, & \text{для } X \leqslant Y^{\frac{1}{3}},\ \sigma < \frac{5}{6}, & (4.58)\\ X^{-\frac{1}{12}} Y^{\frac{11}{12}-\sigma} + X^{\frac{1}{4}} Y^{\frac{3}{4}-\sigma}, & \text{,,}\ \ Y^{\frac{1}{3}} \leqslant X \leqslant Y^{\frac{2}{3}},\ \sigma < \frac{3}{4}, & (4.59)\\ X^{\frac{1}{16}} Y^{\frac{7}{8}-\sigma}, & \text{,,}\ \ Y^{\frac{2}{3}} \leqslant X \leqslant Y^2,\ \sigma < \frac{7}{8}. & (4.60) \end{cases}$$

Доказательство. Такими же преобразованиями, как и в лемме 12, можем свести сумму (4.57) к

$$\mathfrak{S} \ll Y_0 + \sum_{r=0}^{r_1} (2^{-r-1} Y)^{-\sigma} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \\ 2^{-r-1} Y < N\mathfrak{b} \leqslant 2^{-r} Y}} e^{iF_2(x, y)} \right|, \tag{4.61}$$

где $Y_0 = 2^{-r_1-1} Y$, а функция $F_2(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 15. Получаем

$$\mathfrak{S} \ll Y_0 + X^{l'} Y^{1-l-\sigma} \sum_{r=0}^{r_1} 2^{-(r+1)(1-l-\sigma)} \ll X^{l'} Y^{1-l-\sigma}.$$

Пусть $X \leqslant Y^{\frac{1}{3}}$. Для определения l, l' берем оценку (4.45) и полагаем $U = Y$ (так как R является возрастающей функцией от U, то для U берём длину наибольшего интервала)

$$R \ll X^{\frac{1}{4}} Y^{\frac{3}{4}} \delta^{-\frac{1}{2}} + \delta Y.$$

Выбирая $\delta = X^{\frac{1}{6}} Y^{-\frac{1}{6}}$, получаем оценку (4.58).

Пусть, далее, $Y^{\frac{1}{3}} < X \leqslant Y^{\frac{2}{3}}$. В этом случае выбираем оценку (4.47):

$$R \ll X^{\frac{1}{4}} Y^{\frac{3}{4}} + X^{\frac{1}{12}} Y^{\frac{5}{6}} + X^{-\frac{1}{12}} Y^{\frac{11}{12}}. \tag{4.62}$$

Так как в (4.62) на рассматриваемом интервале средный член меньше либо первого, либо третьего, то этим и получаем (4.59).

И наконец, на интервале $Y^{\frac{2}{3}} \leqslant X \leqslant Y^2$ выбираем для R оценку (4.46), и полагая

$$\delta = X^{\frac{1}{16}} Y^{-\frac{1}{8}},$$

получаем (4.60). Лемма доказана.

§ 5. Вывод фундаментального тождества

Теорема 1. *Пусть* $Z(s, \mathfrak{R})$ — *функция Гекке для фиксированного класса идеалов мнимого квадратичного поля* $K(\sqrt{d})$. $\psi(s)$ — *функция из функционального уравнения Гекке, определённая в* (2.12) — (2.16),

$$\Phi_0(s) = \frac{2\pi X^{2-s} \varphi(\mathfrak{m})}{\sqrt{d}\,(s-2)(s-1) N\mathfrak{m}} E(\Xi), \tag{5.1}$$

$X \geqslant c_1$, $Y \geqslant c_2$, *где* c_1, c_2 — *достаточно велики*,

$$\Psi_1(s) = \Theta(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ 0 < N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_0^L x^{1-2s} (x^2 - L^2) J_m(x)\, dx, \tag{5.2}$$

$$\Psi_2(s) = \Theta(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} > Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_L^\infty x^{1-2s} (x^2 - L^2) J_m(x)\, dx, \tag{5.3}$$

$$\Theta(s)=\left(\frac{A}{2}\right)^{3-2s}\chi(\Xi), \tag{5.4}$$

$$L=4\pi\sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{dN\mathfrak{m}}}, \tag{5.5}$$

$J_m(x)$ — *функция Бесселя,*

$\mathfrak{R}^*$ — *класс идеалов, определённый в* (2.11),

$\Xi(\mathfrak{a})$ — *характер Гекке второго рода с образующим идеалом* $\mathfrak{m}$ *и показателем* m, d — *дискриминант поля.*

Тогда в области

$$\operatorname{Re} s>\frac{4}{5}, \tag{5.6}$$

имеет место тождество

$$F(X,\ Y,\ s-1)-XF(X,\ Y,\ s)=\Phi_0(s)+\Psi_2(s)-\Psi_1(s), \tag{5.7}$$

где $F(X,\ Y,\ s)$ *обозначает функцию*

$$F(X,\ Y,\ s)=Z(s,\ \mathfrak{R})-\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}-\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть идеал $\mathfrak{m}$, согласно (2.2), представим в форме

$$\mathfrak{m}=m(m_1,\ m_2+\omega).$$

Выберем из класса $\mathfrak{R}^{-1}$, обратного к классу $\mathfrak{R}$, первообразный идеал $\mathfrak{c}$, с базисом $c_1,\ c_2+\omega$, удовлетворяющий условиям

$$\Xi(\mathfrak{c})\neq 0, \tag{5.9}$$

$$(c_1,\ m)=1, \tag{5.10}$$

$$(c_1,\ m_1,\ c_2-m_2)=1, \tag{5.11}$$

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{c}},\ \mathfrak{m}\right)=1. \tag{5.12}$$

Выбор первообразного идеала возможен в силу теоремы, что в каждом классе идеалов существует первообразный идеал (Хассе [10], стр. 385).

Согласно замечанию в § 2, примем, что $\Xi(\mathfrak{a})$ — первообразный характер. Рассмотрим функцию

$$\Phi(s)=Z(s-1,\ \mathfrak{R})-XZ(s,\ \mathfrak{R})-\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{s-1}}+X\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{s}}. \tag{5.13}$$

Легко видеть, что

$$\Phi(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}>X}}\frac{N\mathfrak{a}-X}{N\mathfrak{a}^s}\,\Xi(\mathfrak{a}). \tag{5.14}$$

Положим

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}=(\nu). \tag{5.15}$$

Согласно определению обратного класса идеалов, (ν) — главный идеал, т. е. ν — число поля K. Когда в (5.15) $\mathfrak{a}$ будет пробегать идеалы класса $\mathfrak{R}$, нормы которых больше X, ν будет пробегать все целые неассоциированные числа идеала $\mathfrak{c}$, нормы которых больше $XN\mathfrak{c}$.

Поэтому из (5.14) получаем

$$\Phi(s)=N\mathfrak{c}^{s-1}\,\Xi(\mathfrak{c})\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|\,(\nu)\\ N\nu>XN\mathfrak{c}}}\frac{N\nu-XN\mathfrak{c}}{N\nu^{s}}\,\Xi(\nu). \tag{5.16}$$

$\Phi(s)$ является функцией, регулярной во всей плоскости s, за исключением случая, когда $\Xi(\mathfrak{a})=\Xi_0(\mathfrak{a})$ есть главный характер. В этом случае $\Phi(s)$ имеет в точках $s=1$ и $s=2$ простые полюсы с вычетами, равными 1 (Гекке [24], Кубилюс [6], [7]).

Поэтому сначала примем, что

$$s>2. \tag{5.17}$$

Замечая, что в полуплоскости $\operatorname{Re}s>0$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{N\nu^{s}}=\frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma^{2}(s)}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}e^{-2\pi\sqrt{N\nu}(z_1+z_2)}\,dz_1\,dz_2,$$

из (5.16) получаем

$$\Phi(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}\,\Xi(\mathfrak{c})}{\Gamma^{2}(s)}\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|\,(\nu)\\ N\nu>XN\mathfrak{c}}}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}(N\nu-XN\mathfrak{c})\times$$

$$\times\,\Xi(\nu)\,e^{-2\pi\sqrt{N\nu}(z_1+z_2)}\,dz_1\,dz_2. \tag{5.18}$$

Сумму по ν в (5.18) разобъем на ряд сумм, соответствующих различным классам вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, которым принадлежат ν:

$$\Phi(s)=\sum_{\vartheta}^{\operatorname{mod}\mathfrak{m}}\Phi_{\vartheta}(s). \tag{5.19}$$

Суммирование в (5.19) производится по какой-нибудь полной системе вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, а

$$\Phi_{\vartheta}(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\,\Xi(\mathfrak{c})}{\Gamma^{2}(s)}\sum_{\substack{\mathfrak{c}\,|\,(\nu)\\ \nu\equiv\vartheta(\operatorname{mod}\mathfrak{m})\\ N\nu>XN\mathfrak{c}}}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}(N\nu-XN\mathfrak{c})\times$$

$$\times\,e^{-2\pi\sqrt{N\nu}(z_1+z_2)+\frac{m}{2}(\ln\nu-\ln\bar{\nu})}\,dz_1\,dz_2. \tag{5.20}$$

Через $\bar{\nu}$ обозначаем число, сопряженное с ν, а для логарифма берется его основная ветвь.

Числа ν, принадлежащие идеалу $\mathfrak{c}$ и сравнимые с ϑ по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, по лемме 3 имеют вид

$$\nu=mr\left\{\frac{m_1c_1}{r^{2}}\,t_1+(M_1+\omega)\,t_2\right\}+\psi,$$

причем M_1, r, ψ имеют в лемме 3 указанные значения, t_1 и t_2 пробегают такие целые рациональные числа, чтобы имело место $\nu\bar{\nu}=N\nu>XN\mathfrak{c}$. Поэтому

$$\Phi_{\vartheta}(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\,\Xi(\mathfrak{c})}{\Gamma^{2}(s)}\sum_{\substack{t_1\ t_2\\ N\nu>XN\mathfrak{c}}}\sum\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}(N\nu-XN\mathfrak{c})\times$$

$$\times\,e^{-2\pi\sqrt{N\nu}(z_1+z_2)+\frac{m}{2}(\ln\nu-\ln\bar{\nu})}\,dz_1\,dz_2. \tag{5.21}$$

Ряд (5.21) сходится абсолютно и равномерно по s, t_1, t_2 для $s>2$, поэтому можем переменить порядок суммирования и интегрирования:

$$\Phi_\vartheta(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\,\Xi(\mathfrak{c})}{\Gamma^2(s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\sum_{\substack{t_1\ t_2\\ N\nu>XN\mathfrak{c}}}\sum(N\nu-XN\mathfrak{c})\times$$

$$\times e^{-2\pi\sqrt{N\nu}(z_1+z_2)+\frac{m}{2}(\ln\nu+\ln\bar\nu)}dz_1\,dz_2.$$

Применив к ряду по t_1 и t_2 формулу (3.32), из леммы 5 имеем

$$\Phi_\vartheta(s)=\frac{N\mathfrak{c}^{s-1}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\,\Xi(\mathfrak{c})}{\Gamma^2(s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\iint\limits_{N\nu>XN\mathfrak{c}}(N\nu-XN\mathfrak{i})\times$$

$$\times e^{-2\pi\sqrt{N\nu}(z_1+z_2)+\frac{m}{2}(\ln\nu-\ln\bar\nu)+2\pi i(l_1t_1+l_2t_2)}dt_1\,dt_2\,dz_1\,dz_2. \tag{5.22}$$

Произведём замену переменных

$$\operatorname{Re}\nu=\rho\cos\varphi,$$

$$\operatorname{Im}\nu=\rho\sin\varphi.$$

Тогда

$$N\nu=\rho^2,\qquad \frac{1}{2}(\ln\nu-\ln\bar\nu)=i\varphi.$$

Якобиян преобразования равен

$$J=\frac{2\rho}{\sqrt{d}\;N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}.$$

так как по лемме 4 старые переменные t_1 и t_2 так выражаются через новые:

$$\left.\begin{aligned}t_1&=\rho\left\{\frac{mr}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}\cos\varphi-\frac{2M_2\,mr}{\sqrt{d}\;N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}\sin\varphi\right\}+A_1,\\ t_2&=\rho\left\{\frac{2}{\sqrt{d}\;mr}\sin\varphi\right\}+A_2,\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

где числа M_2, A_1, A_2 определяются соответственно формулами (3.16), (3.31). Вычислим выражение

$$P=l_1t_1+l_2t_2. \tag{5.24}$$

Обозначив

$$a=\frac{mr}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}l_1,\quad b=-\left(\frac{2M_2\,mr}{\sqrt{d}\;N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}l_1-\frac{2}{\sqrt{d}\;mr}l_2\right); \tag{5.25}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha, \tag{5.26}$$

после подстановки выражений (5.23) в (5.24), получаем

$$P=\rho\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)+A_1l_1+A_2l_2. \tag{5.27}$$

По лемме 4, последний двучлен в (5.27) равен отрицательному следу произведения $\lambda\psi$, если принять за

$$\lambda=\left(\frac{1}{2}\;\frac{mr}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}+i\frac{M_2\,mr}{\sqrt{d}\;N(\mathfrak{m}\mathfrak{c})}\right)l_1-\frac{i}{\sqrt{d}\;mr}l_2, \tag{5.28}$$

а ψ определяется в (3.21). Таким образом, из (5.27) имеем

$$P=\rho\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)-S(\lambda\psi). \tag{5.29}$$

Выясним смысл числа α.

Согласно (5.26),

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} = \operatorname{arc\,tg}\left\{-\frac{\frac{2M_2 mr}{\sqrt{d}\,N(\mathfrak{mc})}l_1 - \frac{2}{\sqrt{d}\,mr}l_2}{\frac{mr}{N(\mathfrak{mc})}l_1}\right\} =$$

$$= -\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\frac{M_2 mr}{\sqrt{d}\,N(\mathfrak{mc})}l_1 - \frac{1}{\sqrt{d}\,mr}l_2}{\frac{mr}{2N(\mathfrak{mc})}l_1}\right\}. \tag{5.30}$$

Сравнив (5.30) и (5.28), легко заключаем, что

$$\alpha = -\arg\lambda.$$

Также нетрудно проверить, что

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{N\lambda}.$$

Поэтому

$$P = 2\rho\sqrt{N\lambda}\cos(\alpha-\varphi) - S(\lambda\psi). \tag{5.31}$$

Теперь формула (5.22) примет вид

$$\Phi_\theta(s) = \frac{2N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\overline{\Xi}(\mathfrak{c})}{\sqrt{d}\;N\mathfrak{m}\,\Gamma^2(s)}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\int_{\rho>\sqrt{XN\mathfrak{c}}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\times$$

$$\times\,\rho(\rho^2-XN\mathfrak{c})\,e^{-2\pi\rho(z_1+z_2)+mi\varphi+4\pi i\rho\sqrt{N\lambda}\cos(\alpha-\varphi)-2\pi iS(\lambda\psi)}\,dz_1\,dz_2\,d\rho\,d\varphi. \tag{5.32}$$

Вычислим член суммы (5.32), отвечающий

$$l_1 = l_2 = N\lambda = S(\lambda\psi) = 0.$$

Обозначив его через $\Phi_0^*(s)$, имеем

$$\Phi_0^*(s) = \frac{2N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\overline{\Xi}(\mathfrak{c})}{\sqrt{d}\;N\mathfrak{m}\cdot\Gamma^2(s)}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\int_{\rho>\sqrt{NX\mathfrak{c}}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho(\rho^2-XN\mathfrak{c})\times$$

$$\times\,e^{-2\pi\rho(z_1+z_2)+mi\varphi}\,dz_1\,dz_2\,d\rho\,d\varphi. \tag{5.33}$$

Но, как известно,

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{mi\varphi}\,d\varphi = \begin{cases} 0, & m\neq 0,\\ 2\pi, & m=0.\end{cases}$$

Согласно введенному обозначению в (2.19), а также замечая, что

$$\Xi(\mathfrak{c},\ \mathfrak{m},\ 0) = \chi(\mathfrak{c}),$$

имеем из (5.33)

$$\Phi^*(s) = \frac{2N\mathfrak{c}^{s-2}(2\pi)^{2s+1}\chi(\vartheta)\overline{\chi}(\mathfrak{c})E(m)}{\sqrt{d}\;N\mathfrak{m}\cdot\Gamma^2(s)}\int_0^\infty\int_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\int_{\rho>\sqrt{XN\mathfrak{c}}}\rho(\rho^2-XN\mathfrak{c})\times$$

$$\times\,e^{-2\pi\rho(z_1+z_2)}\,dz_1\,dz_2\,d\rho.$$

Поскольку, в силу $s>2$, имеем абсолютно и равномерно сходящиеся интегралы, можем переменить порядок интегрирования и проинтегрировать по z_1, z_2. Так как

$$\int_0^\infty z_i^{s-1}e^{-2\pi\rho z_i}\,dz_i = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi\rho)^s}, \qquad i=1,\ 2,$$

то имеем

$$\Phi_0^*(s)=\frac{4\pi\cdot Nc^{s-2}\chi(\vartheta)\bar{\chi}(c)E(m)}{\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}}\int\limits_{\rho>\sqrt{XNc}}\rho^{1-2s}(\rho^2-XNc)\,d\rho.$$

Интегрируя последнее выражение по ρ, получаем

$$\Phi_0^*(s)=\frac{2\pi X^{2-s}\chi(\vartheta)\bar{\chi}(c)E(m)}{\sqrt{d}\,(s-2)(s-1)N\mathfrak{m}}. \tag{5.34}$$

Имея в виду выражение для λ в (5.28), заключаем на основе леммы 2, что когда l_1 и l_2 пробегают все возможные целые рациональные значения, кроме одновременного $l_1=l_2=0$, λ пробегает все неассоциированные числа идеала $\frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}}$, и такие, что $N\lambda>0$. Таким образом из (5.32) имеем

$$\Phi_\vartheta(s)-\Phi_0^*(s)=\frac{2Nc^{s-2}(2\pi)^{2s}\chi(\vartheta)\,\Xi(c)}{\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}\cdot\Gamma^2(s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\sum_{\frac{1}{\mathfrak{m}c\mathfrak{d}}|(\lambda)}{}^{*}\int\limits_{\rho>\sqrt{XNc}}\rho(\rho^2-XNc)\times$$

$$\times e^{-2\pi\rho(z_1+z_2)+mi\varphi+4\pi i\rho\sqrt{N\lambda}\cos(\alpha-\varphi)-2\pi iS(\lambda\psi)}\,dz_1\,dz_2\,d\rho\,d\varphi. \tag{5.35}$$

Звёздочка над суммой в (5.35) указывает, что $N\lambda\neq 0$. Зделав замену переменных в (5.35)

$$\varphi-\alpha=\gamma,$$

а также имея в виду определение бесселевой функции 1 рода

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi}e^{i\nu\cos\gamma+iu\gamma}\,d\gamma=2\pi\cdot i^u J_u(\nu), \tag{5.36}$$

(Ватсон [1], § 2.2), получаем

$$\Phi_\vartheta(s)-\Phi_0^*(s)=\frac{2Nc^{s-2}(2\pi)^{2s+1}i^m\chi(\vartheta)\,\Xi(c)}{\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}\cdot\Gamma^2(s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\sum_{\frac{1}{\mathfrak{m}c\mathfrak{d}}|(\lambda)}{}^{*}\int\limits_{\rho>\sqrt{XNc}}\times$$

$$\times\rho(\rho^2-XNc)\,e^{-2\pi\rho(z_1+z_2)-2\pi iS(\lambda\psi)+mi\alpha}J_m(4\pi\rho\sqrt{N\lambda})\,dz_1\,dz_2\,d\rho. \tag{5.37}$$

После замены переменных $4\pi\rho\sqrt{N\lambda}=u$ (5.37) примет вид

$$\Phi_\vartheta(s)-\Phi_0^*(s)=\frac{Nc^{s-2}(2\pi)^{2s-3}i^m\chi(\vartheta)\,\Xi(c)}{8\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}\cdot\Gamma^2(s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty z_1^{s-1}z_2^{s-1}\sum_{\frac{1}{\mathfrak{m}c\mathfrak{d}}|(\lambda)}{}^{*}\times$$

$$\times\frac{1}{N\lambda^2}\int\limits_{u>L_0}u(u^2-L_0^2)\,e^{-\frac{u}{2\sqrt{N\lambda}}(z_1+z_2)-2\pi iS(\lambda\psi)-mi\arg\lambda}J_m(u)\,dz_1\,dz_2\,du, \tag{5.38}$$

где

$$L_0=4\pi\sqrt{XNc\cdot N\lambda}. \tag{5.39}$$

Пусть $\mathrm{Re}\,s>2$. В этой области выполним интегрирование по z_1, z_2, так как ряд по λ сходится и поэтому законна перемена порядка интегрирования. Получаем

$$\Phi_\vartheta(s)-\Phi_0^*(s)=\frac{Nc^{s-2}(4\pi)^{2s-3}i^m\chi(\vartheta)\,\Xi(c)}{\sqrt{d}\,N\mathfrak{m}}\sum_{\frac{1}{\mathfrak{m}c\mathfrak{d}}|(\lambda)}{}^{*}\frac{1}{N\lambda^{2-s}}\int\limits_{u>L_0}u^{1-2s}(u^2-L_0^2)\times$$

$$\times e^{-2\pi iS(\lambda\psi)-im\arg\lambda}J_m(u)\,du. \tag{5.40}$$

Пусть

$$(\lambda)=\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}. \tag{5.41}$$

Когда (λ) пробегает все главные идеалы, делящие $\frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{b}$ будет пробегать все идеалы класса $\mathfrak{R}^*$, определенного в (2.11). Таким образом

$$\Phi_\vartheta(s)-\Phi_0^*(s)=\frac{(4\pi)^{2s-2}\, i^m \chi(\vartheta)\,\Xi(\mathfrak{c})}{\sqrt{d}\; N\mathfrak{m}\cdot(dN\mathfrak{m})^{s-2}}\sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*}{}^{*}\frac{1}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_{u>L} u^{1-2s}(u^2-L^2)\times$$

$$\times e^{-2\pi i S\left(\frac{\mathfrak{b}\psi}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right)-im\arg\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}} J_m(u)\,du. \tag{5.42}$$

Исследуем сумму

$$\sum_{\vartheta}^{\operatorname{mod}\mathfrak{m}}\chi(\vartheta)\,e^{-2\pi i S\left(\frac{\mathfrak{b}\psi}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right)}=\chi(-1)\sum_{\psi_1}^{\operatorname{mod}\mathfrak{m}}\chi(\psi_1)\,e^{2\pi i S\left(\frac{\mathfrak{b}\psi_1}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right)}=\chi(-1)\,G\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}},\ \chi\right). \tag{5.43}$$

Здесь суммируется по какой-нибудь полной системе вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, и такой, что числа ψ_2, где

$$(\psi_2)=\frac{\mathfrak{b}(\psi_1)}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}},\qquad \psi_1\equiv\vartheta\ (\operatorname{mod}\mathfrak{m})$$

принадлежат полю K.

Как известно из теории алгебраических чисел (например, Гекке [24]), суммы $G(\alpha,\ \chi)$ обладают свойством

$$G(\alpha,\ \chi)=G(\beta,\ \chi),$$

если χ – групповой характер по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, и $\alpha\equiv\beta\ (\operatorname{mod}\mathfrak{m})$. Также

$$G(\alpha\beta,\ \chi)=\overline{\chi(\alpha)}\,G(\beta,\ \chi),\qquad (\alpha,\ \mathfrak{m})=1,$$

$$G(\alpha,\ \chi)=0,\qquad (\alpha,\ \mathfrak{m})>1.$$

Если ввести обозначение

$$G(1,\ \chi)=\sum_{\tau}^{\operatorname{mod}\mathfrak{m}}\chi(\tau)\,e^{2\pi i S\left(\frac{\tau}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}}\right)}, \tag{5.44}$$

где τ пробегает какую-нибудь полную систему вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, и такую, что $\frac{(\tau)}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}}$ есть главный идеал, то получим, имея в виду условие (5.12),

$$G\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}},\ \chi\right)=\begin{cases}\overline{\chi}(\mathfrak{b})\,\chi(\mathfrak{c})\,G(1,\ \chi), & \text{если } (\mathfrak{b},\ \mathfrak{m})=1,\\ 0, & \text{,, } (\mathfrak{b},\ \mathfrak{m})>1.\end{cases} \tag{5.45}$$

Также получаем

$$e^{-mi\arg\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}}=\overline{\Xi}_1(\mathfrak{b})\,\Xi_1(\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{d}). \tag{5.46}$$

Суммируя по всем ϑ, принадлежащим полной системе вычетов по $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, все разности $\Phi_\vartheta(s)-\Phi_0^*(s)$, получим

$$\Phi(s)-\Phi_0(s)=\frac{A^{s-2s}\, i^m\chi(-1)\,\Xi_1(\mathfrak{m}\mathfrak{d})\,G(1,\ \chi)}{2^{s-2s}\sqrt{N\mathfrak{m}}}\sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*}{}^{*}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\times$$

$$\times\int\limits_{u>L}u^{1-2s}(u^2-L^2)\,J_m(u)\,du, \tag{5.47}$$

где

$$\Phi_0(s)=\frac{2\pi X^{2-s}E(m)\bar{\chi}(\mathfrak{c})}{\sqrt{d}\,(s-2)(s-1)N\mathfrak{m}}\sum_{\vartheta}^{\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}}\chi(\vartheta).$$

Но, как известно,

$$\sum_{\vartheta}^{\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}}\chi(\vartheta)=\begin{cases}\varphi(\mathfrak{m}), & \text{если } \chi=\chi_0,\\ 0, & \quad,, \quad \chi\neq\chi_0.\end{cases}$$

Употребляя в (2.20) введенный символ $E(\Xi)$, получим (5.1). Наконец, если ввести во § 2 определенную функцию $\varkappa(\Xi)$, получим из (5.47)

$$\Phi(s)-\Phi_0(s)=\left(\frac{A}{2}\right)^{3-2s}\varkappa(\Xi)\sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*}{}^{*}\frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_{u>L}u^{1-2s}(u^2-L^2)\,J_m(u)\,du. \quad (5.48)$$

Интеграл в (5.48) имеет смысл в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>\frac{5}{4}$. В этой области ряд сходится абсолютно и равномерно по s, поэтому функция, определяемая формулой (5.48), по принципу аналитического продолжения, является аналитической и регулярной функцией в области $\mathrm{Re}\,s>\frac{5}{4}$. Прибавление и вычитание одинаковых членов не изменит области сходимости, если полученные интегралы будем понимать как обобщенные, т. е. не имеющие особенностей в окрестности нуля. (Ср., например, Фишер [20].)

Используя введенные в (5.2) и (5.3) функции $\Psi_1(s)$, $\Psi_2(s)$, получаем

$$\Phi(s)-\Phi_0(s)=\left(\frac{A}{2}\right)^{3-2s}\varkappa(\Xi)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ 0<N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_0^\infty u^{1-2s}(u^2-L^2)\,J_m(u)\,du+$$
$$+\Psi_2(s)-\Psi_1(s). \quad (5.49)$$

Пусть теперь

$$\mathrm{Re}\,s>\frac{5}{4}. \quad (5.50)$$

Известно (Ватсон [1], § 13.24), что

$$\int\limits_0^\infty J_p(z)\,z^{q-1}\,dz=2^{q-1}\frac{\Gamma\left(\frac{|p|+q}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{|p|-q}{2}\right)}. \quad (5.51)$$

если

$$\mathrm{Re}\,q<\frac{3}{2},\quad \mathrm{Re}\,(|p|+q)>0.$$

Применив формулу (5.51) для (5.49) и использовав определение функции $\psi(s)$, получаем

$$\Phi(s)-\Phi_0(s)=\psi(s-1)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ 0<N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}-X\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ 0<N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}+$$
$$+\Psi_2(s)-\Psi_1(s).$$

Теперь, согласно определению (5.8), получаем тождество (5.7).

Теорема доказана.

§ 6. Оценка остаточных членов

Лемма 17. *Пусть*

$$\mathfrak{M}_1(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}>Y}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}^{*}\mathfrak{P}_1(s),\tag{6.1}$$

$$\mathfrak{P}_1(s)=\int\limits_{L_1}^{\infty}x^{1-2s}(x^2-L^2)\,J_m(x)\,dx-\int\limits_{L}^{\infty}x^{1-2s}(x^2-L^2)\,J_m(x)\,dx,\tag{6.2}$$

$$L_1=4\pi\sqrt{\frac{(X+X^{\alpha})\,N\mathfrak{b}}{dN\mathfrak{m}}},\quad 0\leqslant\alpha<1,\quad L=4\pi\sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{dN\mathfrak{m}}},\tag{6.3}$$

$$s=\sigma+it,\quad |t|=T=2\pi\sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}},\tag{6.4}$$

где $\mathfrak{R}^*$, Ξ, $J_m(x)$, $N\mathfrak{m}$, d, m *имеют обычные значения, определенные в* § 2 *или* § 5.

Тогда, если $m\ll T$, *в области*

$$\operatorname{Re}s>-H,\tag{6.5}$$

где $H>0$ — *любое фиксированное число, функция* $\mathfrak{M}_1(s)$ *является аналитической и регулярной, и имеет место неравенство*

$$\mathfrak{M}_1(s)\ll R,\tag{6.6}$$

где

$$R=\begin{cases} X^{1-\sigma}\ln Y, & \text{для } \begin{cases} X\leqslant Y^{\frac{1}{3-4\alpha}}, \\ X\leqslant Y^{\frac{5}{3}}, \end{cases} & (6.7)\\ X^{1+\varepsilon-\sigma},\quad \varepsilon>0, & \text{,,}\quad Y^{\frac{5}{3}}<X\leqslant Y^{\frac{1}{3-4\alpha}}, & (6.8)\\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma}\,Y^{\frac{1}{4}}\ln Y, & \text{,,}\quad Y^{\frac{1}{3-4\alpha}}<X\leqslant Y^{\frac{2k+1}{2k'+1-2\alpha}}, & (6.9)\\ X^{\frac{3}{4}+k'-\sigma}\,Y^{-\frac{1}{4}-k}, & \text{,,}\quad Y^{\frac{2k+1}{2k'+1-2\alpha}}<X, & (6.10)\\ X^{\frac{3}{4}-\sigma}\,Y^{-\frac{1}{4}+\varepsilon},\quad \varepsilon>0, & \text{,,}\quad X\leqslant Y^{\frac{1-k-\varepsilon}{1-k'-2\alpha}}, & (6.11)\\ X^{\frac{5}{12}+\frac{2\alpha}{3}+\frac{k'}{3}-\sigma}\,Y^{\frac{1}{12}-\frac{k}{3}}, & \text{,,}\quad Y^{\frac{1-k-\varepsilon}{1-k'-2\alpha}}<X. & (6.12)\end{cases}$$

Числа k' *и* k *определенны в лемме* 13 *формулами* (4.30) — (4.32).

Оценки (6.7) — (6.10) *равномерны по* X, Y, σ, *оценки* (6.11) — (6.12) *имеют место при достаточно большом, но фиксированном* Y, *кроме того, оценки* (6.10) *и* (6.12) *имеют место при условии*

$$|m|\ll X^{\frac{1}{2}}\,Y^{\frac{23}{50}}.\tag{6.13}$$

Доказательство. Функцию (6.2) можем записать следующим образом:

$$\mathfrak{P}_1(s) = \int_L^{L_1} d\mathfrak{Q}_1(s,\ z), \tag{6.14}$$

где

$$\mathfrak{Q}_1(s,\ z) = \int_z^{\infty} x^{1-2s}(x^2 - z^2)\, J_m(x)\, dx. \tag{6.15}$$

Интеграл (6.15) имеет смысл в области

$$\operatorname{Re} s > \frac{5}{4} \tag{6.16}$$

(Ватсон [1], § 13.24) и в этой области возможно дифференцирование функции $\mathfrak{Q}_1(s,\ z)$ по z, так как в рассматриваемой области изменения аргументов x и z

$$L \leqslant z \leqslant L_1,$$

$$z \leqslant x < \infty,$$

подинтегральная функция, равно как и ее производная по z, являются абсолютно интегрируемыми и регулярными функциями двух переменных x, z равномерно по s в (6.16):

$$\mathfrak{P}_1(s,\ z) = -2\int_L^{L_1} z \int_z^{\infty} x^{1-2s} J_m(x)\, dx\, dz. \tag{6.17}$$

В области (6.16) (это возможно и в несколько более широкой полуплоскости) проинтегрируем (6.17) k_1 раз по частям, имея в виду формулы дифференцирования бесселевых функций:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x), \\ &\frac{d}{dx}[x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x). \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Обозначая через $(\tau)_r$ — произведение следующих r чисел

$$(\tau)_r = \tau(\tau+1)(\tau+2)\ldots(\tau+r-1),$$

где τ — любое число поля, получаем

$$\int_z^{\infty} x^{1-2s} J_m(x)\, dx = -\sum_{n_1=0}^{k_1-1} 2^{n_1}\left(s + \frac{m}{2}\right)_{n_1} z^{1-2s-n_1} J_{m+1+n_1}(z) +$$

$$+ 2^{k_1}\left(s + \frac{m}{2}\right)_{k_1} \int_z^{\infty} x^{1-2s-k_1} J_{m+k_1}(x)\, dx. \tag{6.19}$$

Функция $\mathfrak{P}_1(s)$, если в (6.17) интеграл по x заменить рядом (6.19), является аналитической и регулярной функцией в области

$$\operatorname{Re} s > \frac{1}{4} - \frac{k_1}{2}. \tag{6.20}$$

То же самое относится и к функции $\mathfrak{M}_1(s)$, так как она для любого конечного s из (6.20) мажорируется абсолютно сходящимся рядом, как это будет видно из дальнейшего. Сначала докажем (6.7) – (6.10).

Оценим часть суммы (6.1), отвечающую интервалу

$$Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a, \qquad 0 \leqslant b < a \leqslant 1. \tag{6.21}$$

Имеем

$$\mathfrak{M}_1^*(s) = 2\sum_{n_1=0}^{k_1=1} 2^{n_1}\left(s+\frac{m}{2}\right)_{n_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_L^{L_1} z^{2-2s-n_1} J_{m+1+n_1}(z)\,dz +$$

$$+ 2^{k_1+1}\left(s+\frac{m}{2}\right)_{k_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_L^{L_1} z \int_z^{\infty} x^{1-2s-k_1} J_{m+k_1}(x)\,dx\,dz. \tag{6.22}$$

Оценивая интегралы в (6.22) по лемме 8, причем пользуемся формулой (3.45), а также оценивая по максимуму модуля подинтегральной функции, имеем:

$$\mathfrak{M}_1^*(s) \ll \sum_{n_1=0}^{k_1-1} (2T)^{n_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \min\left\{ \frac{L^{\frac{5}{2}-2\sigma-n_1}}{L-2T},\ X^{\alpha} N\mathfrak{b} L^{\frac{1}{2}-2\sigma-n_1} \right\} +$$

$$+ (2T)^{k_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \min\left\{ L^{\frac{5}{2}-2\sigma-k_1} \ln Y,\ X^{\alpha} N\mathfrak{b} \frac{L^{\frac{3}{2}-2\sigma-k_1}}{L-2T} \right\}. \tag{6.23}$$

Применяя для оценки сумм по нормам идеалов лемму 9, получаем

$$\mathfrak{M}_1^*(s) \ll \min\left\{ X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{-\frac{1}{4}} \ln Y,\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a} E(a) \right\} \sum_{n_1=0}^{k_1-1} (1+Y^{b-1})^{-\frac{n_1}{2}} +$$

$$+ \min\left\{ X^{\frac{5}{4}-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a} E(a) \ln Y,\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y \right\} (1+Y^{b-1})^{-\frac{k_1}{2}}, \tag{6.24}$$

где

$$E(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geqslant \frac{1}{3}, \\ Y^{\varepsilon},\ \varepsilon > 0, & \quad ,, \quad a < \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{6.25}$$

Выбирая k_1 достаточно большим, один раз $\ll 1$, другой раз $\gg Y^{1-b} \ln Y$, получаем

$$\mathfrak{M}_{1,1}^*(s) \ll \min\left\{ X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{\frac{3}{4}-b} \ln Y,\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{\frac{1}{4}+a-b} E(a) \right\}, \tag{6.26}$$

$$\mathfrak{M}_{1,2}^*(s) \ll \min\left\{ X^{\frac{5}{4}-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a} E(a) \ln Y,\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y \right\}, \tag{6.27}$$

$$\mathfrak{M}_1^*(s) = \min\left\{ \mathfrak{M}_{1,1}^*(s),\ \mathfrak{M}_{1,2}^*(s) \right\}.$$

Заменив в (6.26) – (6.27) a через b, а b через 0, получим оценку для интервала

$$Y < N\mathfrak{b} < Y + Y^b: \tag{6.28}$$

$$\mathfrak{M}_1^{**}(s) \ll \min\left\{X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{\frac{3}{4}} \ln Y,\ X^{\frac{5}{4}-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+b} E(b) \ln Y,\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y\right\}. \tag{6.29}$$

Наконец для оставшегося интервала

$$N\mathfrak{b} > Y + Y^a \tag{6.30}$$

оценку получим, если в (6.22) интеграл в первой сумме проинтегрируем еще k_2 раз по частям, с учетом (6.18). Это даст

$$\mathfrak{M}_1^{***}(s) \ll \sum_{n_1=0}^{k_1-1} (2T)^{n_1} \sum_{n_2=0}^{k_2-1} (2T)^{n_2} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} > Y+Y^a}} \Xi(\mathfrak{b})\, N\mathfrak{b}^{s-2} L^{2-2s-n_1-n_2} J_{m+2+n_1+n_2}(L) \right| +$$

$$+ \sum_{n_1=0}^{k_1-1} (2T)^{n_1+k_2} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} > Y+Y^a}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \frac{L^{\frac{5}{2}-2\sigma-n_1-k_2}}{L-2T} + (2T)^{k_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} > Y+Y^a}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \times$$

$$\times L^{\frac{5}{2}-2\sigma-k_1} \ln L. \tag{6.31}$$

Применяя в (6.31) хорошо известное асимптотическое разложение бесселевой функции

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3+2p}{4}\pi\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{6.32}$$

(Ватсон [1]) сумму с характерами Гекке оцениваем по лемме 13. Это даёт при достаточно больших k_1 и k_2

$$\mathfrak{M}_1^{***}(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma+k'} Y^{-\frac{1}{4}-k+2(1-a)}. \tag{6.33}$$

Подбор наилучших оценок из (6.26), (6.27), (6.29) и (6.33) приводит к оценкам (6.7) – (6.10), так как

$$\mathfrak{M}_1(s) = \mathfrak{M}_1^{***}(s) + \mathfrak{M}_1^{**}(s) + \mathfrak{M}_1^{*}(s). \tag{6.34}$$

Понижение показателя, даваемая методом ван дер Корпута, не только леммой 13, но и с применением леммы 6 для других порядков производных, является недостаточным, чтобы повлиять на оценки (6.7) – (6.9), оно применимо только для (6.10) и при неравномерных оценках по Y, которые даны в следующей части леммы – в (6.12).

Теперь оценим сумму (6.1) при условии, что Y является постоянным, хотя и достаточно большим числом. В этом случае любое число вида $1 + Y^{-u}$ является постоянным и мы имеем право применить оценку (3.44) леммы 8. Таким образом, в интервале $Y + Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y + Y^a$ имеем

$$\mathfrak{M}_1^{*}(s) \ll \sum_{n_1=0}^{k_1-1} (2T)^{n_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \min\left\{L^{\frac{3}{2}-2\sigma-n_1},\ X^{\alpha} N\mathfrak{b} L^{\frac{1}{2}-2\sigma-n_1}\right\} +$$

$$+ (2T)^{k_1} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y+Y^b \leqslant N\mathfrak{b} < Y+Y^a}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \min\left\{L^{\frac{5}{2}-2\sigma-k_1},\ X^{\alpha} N\mathfrak{b} L^{\frac{1}{2}-2\sigma-k_1}\right\}. \tag{6.35}$$

Если $k_1 \gg Y^{1-b} \ln Y$, то

$$\mathfrak{M}_1^*(s) \ll \min\left\{X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{-\frac{1}{4}+a-b},\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{\frac{1}{4}+a-b}\right\} E(a). \tag{6.36}$$

Если $C < k_1 \ll 1$, то

$$\mathfrak{M}_1^*(s) \ll \min\left\{X^{\frac{5}{4}-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a},\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a}\right\} E(a). \tag{6.37}$$

Объединяя полученные оценки, имеем:

$$\mathfrak{M}_1^*(s) \ll \min\left\{X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{-\frac{1}{4}+a-b},\ X^{\frac{5}{4}-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a},\ X^{\frac{1}{4}+\alpha-\sigma} Y^{-\frac{3}{4}+a}\right\} E(a). \tag{6.38}$$

Выбрав первую величину из (6.38) и положив

$$Y^b = 2^r, \quad Y^a = 2^{r+1},$$

суммируя по всем r от 0 до $\ll \ln Y$, получим, что для интервала

$$Y < N\mathfrak{b} < Y + Y^a,$$

имеет место

$$\mathfrak{M}_1^*(s) \ll X^{\frac{3}{4}-\sigma} Y^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{6.39}$$

Выбрав для оценки интервала $N\mathfrak{b} \geqslant Y + Y^a$ ту же самую (6.33) и подбирая интервалы соотношения X и Y так, чтобы получить наименьшую оценку, приходим к формулам (6.11)–(6.12). Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть*

$$\mathfrak{M}_2(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ 0 < N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \mathfrak{P}_2(s), \tag{6.40}$$

$$\mathfrak{P}_2(s) = \int_0^{L_1} x^{1-2s}(x^2 - L_1^2)\, J_m(x)\, dx - \int_0^{L} x^{1-2s}(x^2 - L^2)\, J_m(x)\, dx, \tag{6.41}$$

и $\mathfrak{R}^*$, Ξ, $J_m(x)$, $N\mathfrak{m}$, L_1, L, d, m, k, k' *имеют те же значения, что и в лемме* 17.

Тогда в области

$$\operatorname{Re} s < H, \tag{6.42}$$

где $H > 0$ *— любое фиксированное число, имеет место оценка*

$$\mathfrak{M}_2(s) \ll R,$$

где R *имеет те же значения, что и в лемме* 17. *Кроме того, функция* $\mathfrak{M}_2(s)$ *является в* (6.42) *аналитической и регулярной функцией. Относительно оценок имеют силу те же самые оговорки, что и в лемме* 17, *с той разницей, что вместо условия* (6.13) *для* (6.10) *и* (6.12), *должно выполняться условие*

$$|m| \ll X^{\frac{1}{2}+\frac{23k'}{50}} Y^{\frac{23}{50}\left(\frac{3}{4}-k\right)}. \tag{6.43}$$

Доказательство. Записав функцию $\mathfrak{P}_2(s)$ в виде аналогичного интеграла от дифференциала некоторой функции $\mathfrak{Q}_2(s, z)$, можем легко проверить законность дифференцирования по параметру z в области ее регулярности. Таким образом получим

$$\mathfrak{P}_2(s) = -2\int_L^{L_1} z \int_0^z x^{1-2s} J_m(x)\,dx\,dz. \tag{6.44}$$

Интеграл имеет смысл в области

$$\operatorname{Re}(1-2s+|m|) > 0, \tag{6.45}$$

так как бесселевая функция $J_m(x)$ в окрестности 0 ведет себя как x^m (Ватсон [1], § 2.11). В области (6.45) проинтегрируем (6.44) k_3 раз по частям, используя (6.18):

$$\mathfrak{P}_2(s) = -2\sum_{n_3=0}^{k_3-1} \frac{2^{-n_3-1}}{\left(1-s+\frac{m}{2}\right)_{n_3+1}} \int_L^{L_1} z^{3-2s+n_3} J_{m+n_3}(z)\,dz +$$

$$+ -\frac{2^{-k_3-1}}{\left(1-s+\frac{m}{2}\right)_{k_3}} \int_L^{L_1} z \int_0^z x^{1-2+k_3} J_{m+k_3}(x)\,dx\,dz. \tag{6.46}$$

Очевидно, формула (6.46) является аналитическим продолжением (6.44) на более широкую область

$$\operatorname{Re}(1-2s+m+2k_3) > 0, \tag{6.47}$$

и поэтому и $\mathfrak{M}_2(s)$ является аналитической и регулярной функцией в (6.47), так как для любого s из этой области она мажорируется абсолютно сходящимся рядом. Пусть $0 \leqslant b < a \leqslant 1$. На интервале $Y - Y^a \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant Y - Y^b$ имеем, применяя, формулу (3.49) леммы 8:

$$\mathfrak{M}_2^*(s) \ll T^{-1}\sum_{n_3=0}^{k_3-1}(2T)^{-n_3} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y-Y^a<N\mathfrak{b}\leqslant Y-Y^b}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\min\left\{\frac{L^{\frac{7}{2}-2\sigma+n_3}}{L-2T},\ X^{\alpha} N\mathfrak{b} L^{\frac{3}{2}-2\sigma+n_3}\right\} +$$

$$+(2T)^{-k_3} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ Y-Y^a<N\mathfrak{b}\leqslant Y-Y^b}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\min\left\{L^{\frac{5}{2}-2\sigma+k_3}\ln Y,\ X^{\alpha} N\mathfrak{b}\,\frac{L^{\frac{3}{2}-2\sigma+k_3}}{L-2T}\right\}. \tag{6.48}$$

Так как $L \leqslant T$, то сравнив (6.48) и (6.23), находим их полную асимптотическую эквивалентность. То же самое можно сказать и про интервалы

$$Y - Y^b < N\mathfrak{b} < Y,$$
$$0 < N\mathfrak{b} \leqslant Y - Y^a.$$

Остается еще один возможный случай $N\mathfrak{b} = Y$. Так как число таких идеалов $\ll Y^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то получаем

$$\mathfrak{M}_2^{****}(s) \ll T^{-1}Y^{\sigma-2+\varepsilon}\sum_{n_3=0}^{k_3-1}(2T)^{-n_3}\min\left\{(2T)^{\frac{5}{2}-2\sigma+n_3+\frac{1}{2}},\ X^{\alpha}\,Y(2T)^{\frac{3}{2}-2\sigma+n_3}\right\} +$$

$$+(2T)^{-k_3}Y^{\sigma-2+\varepsilon}\min\left\{(2T)^{3-2\sigma+k_3},\ X^{\alpha}\,Y(2T)^{\frac{1}{2}-2\sigma+k_3}\right\}. \tag{6.49}$$

Поскольку оценка (6.49) не выше любой из (6.7)–(6.10), то этим равномерные оценки доказаны.

Доказательство оценок при фиксированном Y протекает вполне аналогично соответствующему доказательству в лемме 17, так что нецелесообразно его повторять.

Лемма доказана.

§ 7. Приближенное функциональное уравнение Z-функций Гекке

Теорема 2. *Пусть $Z(s, \mathfrak{R})$ — функция Гекке для любого фиксированного класса идеалов $\mathfrak{R}$, $X \geqslant c_1$ $Y \geqslant c_2$, где c_1, c_2 — достаточно большие положительные числа. $\psi(s)$ — функция из функционального уравнения Гекке, определенная в (2.12)–(2.16), $\mathfrak{R}^*$ — класс идеалов, определенный в (2.11), $\mathfrak{m}$ — производящий идеал характера Ξ, d — дискриминант поля, H — достаточно большое положительное фиксированное число, m — показатель характера Ξ.*

Тогда в области

$$\left.\begin{aligned} -H < \operatorname{Re} s < H,\\ m \ll |\operatorname{Im} s| = 2\pi \sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}} \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

имеет место приближенное функциональное уравнение

$$Z(s, \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} + O(R), \tag{7.2}$$

равномерно по X, Y, s.

R определяется следующим образом:

$$R = \begin{cases} X^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln^{\frac{1}{2}} Y, & \text{для} \quad X \leqslant Y \ln^2 Y, \qquad (7.3)\\ X^{\frac{1}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y, & \quad ,, \quad Y\ln^2 Y < X \leqslant Y^{\frac{3+4k}{1+4k'}} \ln^{-4} Y, \qquad (7.4)\\ X^{\frac{1}{2}-\sigma} Y^{-\frac{1}{2}}, & \quad ,, \quad Y^{\frac{3-4k}{1-4k'}} \leqslant X, \ \Xi = \Xi_0, \qquad (7.5)\\ X^{\frac{3}{4}+\frac{k'}{2}-\sigma} Y^{-\frac{1}{8}-\frac{k}{2}}, & \quad ,, \quad \left\{\begin{aligned} &Y^{\frac{3+4k}{1+4k'}} \ln^{-4} Y < X, \ \Xi \neq \Xi_0,\\ &Y^{\frac{3+4k}{1+4k'}} \ln^{-4} Y < X \leqslant Y^{\frac{3-4k}{1-4k_1}}, \ \Xi = \Xi_0. \end{aligned}\right. \qquad (7.6) \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В § 5 мы получили фундаментальное тождество

$$F(X, Y, s-1) - XF(X, Y, s) = \Phi_0(X, s) + \Psi_2(X, Y, s) - \Psi_1(X, Y, s). \tag{7.7}$$

Заменяя в (7.7) X через $X + X^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, получим

$$\begin{aligned} F(X+X^\alpha, Y, s-1) - (X+X^\alpha) F(X+X^\alpha, Y, s) = \Phi_0(X+X^\alpha, s) + \\ + \Psi_2(X+X^\alpha, Y, s) - \Psi_1(X+X^\alpha, Y, s). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Введем новую функцию

$$\Omega(s) = F(X, Y, s) - F(X+X^\alpha, Y, s). \tag{7.9}$$

Согласно определению функции F в (5.8), имеем

$$\Omega(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ X\leqslant N\mathfrak{a}<X+X^\alpha}}\Xi(\mathfrak{a})N\mathfrak{a}^{-s}. \tag{7.10}$$

Сравнив определения функций $\Psi_1(s)$ и $\Psi_2(s)$ в (5.2)–(5.3) и определения функций $\mathfrak{M}_1(s)$ и $\mathfrak{M}_2(s)$ в (6.1)–(6.3) и в (6.40)–(6.41) находим

$$\Psi_2(X+X^\alpha,\ Y,\ s)-\Psi_2(X,\ Y,\ s)=\Theta(s)\mathfrak{M}_1(s), \tag{7.11}$$

$$\Psi_1(X+X^\alpha,\ Y,\ s)-\Psi_1(X,\ Y,\ s)=\Theta(s)\mathfrak{M}_2(s), \tag{7.12}$$

где $\Theta(s)$ – целая функция, зависящая только от Ξ и s и оцениваемая $\Theta(s)\ll 1$, как это следует из (5.4). Вычитая из (7.7) уравнение (7.8) и используя (7.9), (7.11) и (7.12), можем выразить $F(X,\ Y,\ s)$ следующим образом:

$$F(X,\ Y,\ s)=X^\alpha\Big\{\Phi_0(X,\ s)-\Phi_0(X+X^\alpha,\ s)-\Theta(s)\big(\mathfrak{M}_1(s)+\mathfrak{M}_2(s)\big)-$$
$$-\big(\Omega(s-1)-(X+X^\alpha)\,\Omega(s)\big)\Big\}. \tag{7.13}$$

Как видно из формулы (7.10), $\Omega(s)$ является аналитической и регулярной функцией в любой конечной области комплексного переменного s, то же самое относится и к функции $\Phi_0(s)$ за исключением точек $s=1$ и $s=2$. $\Theta(s)$ – целая функция во всей области s. Как было показано в леммах 17 и 18, $\mathfrak{M}_1(s)$ и $\mathfrak{M}_2(s)$ являются аналитическими и регулярными функциями в достаточно широкой полосе $[-H<\sigma<H]$. Поэтому можем утверждать, что $F(X,\ Y,\ s)$, как сумма этих функций, в области

$$-H<\operatorname{Re}s<H, \qquad |t|>0, \tag{7.14}$$

где $H>0$ – любое фиксированное число, является аналитической и регулярной функцией.

Из выражения (5.1) можем оценить разность функций $\Phi_0(s)$:

$$\Phi_0(X,\ s)-\Phi_0(X+X^\alpha,\ s)\ll X^{1-\sigma}Y^{-1}E(\Xi). \tag{7.15}$$

Далее,

$$\Omega(s-1)-(X+X^\alpha)\,\Omega(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ X\leqslant N\mathfrak{a}<X+X^\alpha}}\Xi(\mathfrak{a})N\mathfrak{a}^{-s}\Big\{N\mathfrak{a}-(X+X^\alpha)\Big\}. \tag{7.16}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках в (7.16), на рассматриваемом интервале не превышает X^α. Если $\alpha\geqslant\frac{1}{3}$, то применяем для оценки суммы по нормам идеалов лемму 9. Если $\alpha<\frac{1}{3}$, то результат леммы хуже, чем тривиальная оценка, получаемая применением того факта, что число идеалов с $N\mathfrak{a}=Z$ не более $\ll Z^\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Если ввести символ

$$E(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha\geqslant\frac{1}{3},\\ X^\varepsilon, & \quad ,, \quad \alpha<\frac{1}{3},\end{cases} \tag{7.17}$$

получим

$$\Omega(s-1)-(X+X^\alpha)\,\Omega(s)\ll X^{2\alpha-\sigma}E(\alpha). \tag{7.18}$$

Из (7.13), (7.15), (7.18) имеем

$$F(X,\ Y,\ s)\ll X^{1-\alpha-\sigma}Y^{-1}E(\Xi)+X^{\alpha-\sigma}E(\alpha)+X^{-\alpha}|\mathfrak{M}_1(s)|. \tag{7.19}$$

Пусть $X^{3-4\alpha} \leqslant Y$. Применяя для $\mathfrak{M}_1(s)$ оценки (6.7)–(6.8) и выбирая

$$X^{\alpha} = X^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} Y, \tag{7.20}$$

получаем

$$F(X,\ Y,\ s) \ll X^{\frac{1}{4}-\sigma} \ln^{\frac{1}{4}} Y, \quad \text{для} \quad X \leqslant Y \ln^2 Y. \tag{7.21}$$

Аналогично поступая в интервале $Y^{\frac{1}{3-4\alpha}} < X \leqslant Y^{\frac{2k+1}{1+2k'-2\alpha}}$ имеем

$$X^{\alpha} = X^{\frac{1}{4}} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y.$$

$$F(X,\ Y,\ s) \ll X^{\frac{1}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y, \quad \text{для} \quad Y \ln^2 Y < X \leqslant Y^{\frac{3+4k}{1+4k'}} \ln^{-4} Y \tag{7.22}$$

и в случае $X > Y^{\frac{3+4k}{1+4k'}} \ln^{-4} Y$, отдельно рассматривая $\Xi \neq \Xi_0$ и $\Xi = \Xi_0$, получаем оценки (7.5)–(7.6).

Так как

$$F(X,\ Y,\ s) = Z(s,\ \mathfrak{R}) - \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} - \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}, \tag{7.23}$$

то из аналитичности и регулярности функции $F(X,\ Y,\ s)$ в области (7.14) следует аналитичность и регулярность правой части уравнения (7.23). Таким образом, в области

$$-H < \operatorname{Re} s < H,$$

$$|\operatorname{Im} s| = 2\pi \sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}}$$

имеет место уравнение

$$Z(s,\ \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} + O(R),$$

где R определено формулами (7.3)–(7.6).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $Z(s,\ \mathfrak{R})$ — функция Гекке от любого фиксированного класса идеалов $\mathfrak{R}$, $X \geqslant c_1$, $Y \geqslant c_2$ — достаточно большие числа, причем Y — фиксированное, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\psi(s)$ — функция из функционального уравнения функций Гекке, определенная в (2.12)–(2.16), $\mathfrak{R}^*$ — класс идеалов, определенный в (2.11), $\mathfrak{m} \neq 0$ — производящий идеал характера Ξ, d — дискриминант поля, H — достаточно большое фиксированное число, m — показатель Ξ $(\mathfrak{a})$.*

Тогда в области

$$\left.\begin{aligned} &-H < \operatorname{Re} s < H, \\ &|\operatorname{Im} s| = 2\pi \sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}} \end{aligned}\right\}, \tag{7.24}$$

имеет место приближенное функциональное уравнение

$$Z(s,\ \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} + BR, \tag{7.25}$$

где R определяется следующим образом

$$R=\begin{cases} X^{\frac{3}{8}-\sigma}Y^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}, \quad \varepsilon>0, & \text{для} \quad \begin{cases} X\leqslant Y^{\frac{3-4k}{1-4k'}}, & \Xi\neq\Xi_0, \\ X\leqslant Y^{3+\varepsilon}, & \Xi=\Xi_0, \end{cases} \quad (7.26) \\ X^{\frac{1}{2}-\sigma}Y^{-\frac{1}{2}}, & \quad ,, \qquad X\geqslant Y^{3+\varepsilon}, \quad \Xi=\Xi_0, \quad (7.27) \\ X^{\frac{5}{16}+\frac{k'}{4}-\sigma}Y^{\frac{1}{16}-\frac{k}{4}}, & \quad ,, \qquad X\geqslant Y^{\frac{3-4k}{1-4k'}}, \quad \Xi\neq\Xi_0. \quad (7.28) \end{cases}$$

B в (7.25) — величина оцениваемая константой, зависящей от поля K, образующего идеала $\mathfrak{m}$ и от H.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2, с той лишь разницей, что в леммах 17 и 18 берутся оценки (6.11) — (6.12).

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
15.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I, Москва, 1949.
2. Гельфонд А. О. О некоторых функциональных уравнениях, являющихся следствием уравнений типа Римана. Известия АН СССР, 24, № 4 (1960), 469—474.
3. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. Гостехиздат, 1940.
4. Кубилюс И. Распределение простых чисел гауссова поля в секторах. Ученые записки ЛГУ, серия мат. 19 (1950), 40—52.
5. Кубилюс И. О разложении простых чисел на два квадрата. Доклады АН СССР, т. LXXVII, № 5 (1951), 791—794.
6. Кубилюс И. О некоторых задачах геометрии простых чисел. Мат. сборник, новая сер. 31 (73) (1952), 507—542.
7. Кубилюс И. Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел. Ученые записки Вильнюсского ГУ, серия мат. физ. и хим. наук, т. IV (1955), 5—43. На литовском яз. Резюме на русск. яз.
8. Линник Ю. В. О густоте нулей L—рядов. Известия АН СССР, т. 10, № 1 (1946), 35—46.
9. Титчмарш Е. К. Теория дзета—функции Римана. Москва, 1953.
10. Хассе Г. Лекции по теории чисел. Москва, 1953.
11. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L—функций Дирихле. М.—Л., 1947.
12. Apostol T. M. Sklar Abe. The approximative functional equation of Hecke's Dirichlet series. Trans. Amer. Math. Soc., 86 (1957), 446—462.
13. Chandrasekharan K., Narasiman R. Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions. Acta arithmetica, 1961, 6, № 4, 487—503.
14. Chandrasekharan K., Narasiman R. Hecke's functional equation and arithmetical identities. Annales of Math., 74, № 1 (1961), 1—23.
15. Chandrasekharan K., Narasiman R. On Hecke's functional equation. Bull. Amer. Math. Soc., 67, № 2 (1961), 182—185.
16. J. G. van der Corput. Zahlentheoretische Abschätzungen. Math. Annalen, 84 (1921), 53—79.
17. J. G. van der Corput. Verschärfung der Abschätzungen ' beim Teilerprobleme. Math. Annalen, 87 (1922), 39—65.

18. J. G. van der Corput. Neue zahlentheoretische Abschätzungen. I. Math. Annalen, 89 (1923), 215—254. II. Math. Zeitschrift, 29 (1929), 397—426.

19. Čudakov N. G. On Goldbach—Vinogradov theorem. Ann. Math., 2, 48 (1947), 515—545.

20. Fischer W. Über die Zeta—funktion des reel-quadratischen Zahlkörpers. Math. Zeitschrift, 57 (1952), Heft 1, 94—115.

21. Hardy G. H. and Litllewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. Math. Zeitschrift, 10 (1921), 238—317.

22. Hardy G. H. and Litllewood J. E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications to the divisors problems of Dirichlet and Piltz. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 21 (1922), 39—74.

23. Hardy G. H. and Litllewood J. E. The approximate functional equation for $\zeta(s)$ and $\zeta^2(s)$. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 29 (1929), 81—97.

24. Hecke E. Über eine neue Art von Zetafunktion und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I. Math. Zeitschrift, Bd. 1 (1918), 357—376. II. Math. Zeitschrift, Bd. 6 (1920), 11—51.

25. Landau E. Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. 1927.

26. Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen (II), Leipzig—Berlin, 1911.

27. Mordell L. J. The zeta-functions arising from quadratic forms and their functional equations. Quart. J. of Math. (Oxford) 1930, 77—101.

28. Mordel L. J. Poissons summation formula in several variables and some applications to the theory of numbers. Proc. Cambr. Phil. Soc. 25 (1929), 412—420.

29. Potter H. S. A. Approximative equations for the Epstein zeta-function. Proc. of the London Math. Soc. (2), 36, (1934), 501—515.

30. Ramanathan K. G. Zeta-functions of quadratic forms. Acta arithm., 7, N 1 (1961), 39—69.

31. Siegel C. L. Neuer Beweis der Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion, Math. Annalen, 85 (1922), 123—128.

32. Siegel C. L. Über Riemann Nachlass zur analytische Zahlentheorie. Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astron. und Phys. Abt. B. Studien, vol. 2 (1932) 45—80.

33. Suetuna Z. The zeros of the L—functions on the critical line. Tohôku Math. Journal, vol. 29 (1925), 313—331.

34. Suetuna Z. Über die approximative Funktionalgleichung für Dirichletische L—Funktionen. Japanese J. of Math. 9 (1932), 111—116.

35. Tatuzawa T. The approximate functional equation for Dirichlet L—series. Japanese J. of Math. 22 (1952), 19—25.

36. Titchmarsh E. C. For an account of van der Corput's method and references. Quart. Journal of Math. (Oxford) 2 (1931), 161—173.

37. Titchmarsh E. C. On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann's. Quart. J. of Math. 2 (1931) 161—173, 2 (1931), 313—320, 3 (1932) 133—141, 5 (1934), 98—105, 5 (1934) 195—210.

38. Titchmarsh E. C. On the Epstein zeta—function. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 36 (1934), 485—500.

39. Titchmarsh E. C. The approximate functional equation for $\zeta^2(s)$. Quart. J. of Math. (Oxford) vol. 9 (1938), 109—114.

40. Wiebelitz R. Über approximativ Funktionalgleichung der potenzen der Riemannsche Funktion-zeta. Nachr. Gessel. Wiss. Göttingen, 6 (1952), 263—270.

41. Wilton An approximate equation for the product of two ζ—functions. Proc. Lond. Math. Soc. (2), vol. 31 (1930), 11—107.

HEKĖS Z-FUNKCIJŲ ARTUTINĖ FUNKCIONALINĖ LYGTIS KVADRATINIO MENAMO KŪNO ATVEJU

K. BULOTA

(Reziumė)

Nagrinėsime kvadratinį menamą skaičių kūną K su diskriminantu $-d<0$. $\Xi(\mathfrak{a})$—Hekės antros rūšies charakterio su generuojančiu idealu $\mathfrak{m}\neq 0$. Hekės Z-funkcijos kiekvienai fiksuotai kūno idealų klasei, definuojamos Dirichle eilute

$$Z(s, \mathfrak{R})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

jos konvergavimo srityje $\operatorname{Re} s>1$. Kaip žinoma, ([6], [24]), $Z(s, \mathfrak{R})$ analitiškai pratęsiama į pusplokštumę $\operatorname{Re} s<0$ funkcionaline lygtimi

$$Z(s, \Xi, \mathfrak{R})=\psi(s, \Xi) Z(1-s, \overline{\Xi}, \mathfrak{R}^*).$$

Eilei pirminių skaičių geometrijos klausimų, kaip pavyzdžiui, Hekės Z—funkcijų nulinių vietų „kritinėje" juostoje $0\leqslant\operatorname{Re} s\leqslant 1$ tankio klausimams, naudinga turėti artutinę funkcionalinę lygtį.

Šiame darbe išvedama sekanti artutinė funkcionalinė Hekės Z—funkcijų lygtis minėto kūno atveju:

$$Z(s, \mathfrak{R})=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}+\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}+O(R)$$

srityje

$$-H<\operatorname{Re} s<H,$$

$$|\operatorname{Im} s|=2\pi\sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}},$$

kur X, Y—pakankamai dideli skaičiai, $H>0$.

Liekamasis narys R turi keletą formų:

1) Tolygiai X, Y, s atžvilgiu, kai $X=Y$,

$$R=X^{\frac{1}{2}-\sigma}\ln^{\frac{1}{2}} X.$$

Taip pat nurodoma ir daugiau R išraiškų kitų X ir Y santykių atvejais.

2) Prie fiksuoto, nors ir gana didelio Y, tolygiai s atžvilgiu

$$R=X^{\frac{1}{4}+\varepsilon-\sigma}, \quad \varepsilon>0, \quad \text{jei} \quad X=Y,$$

o taip pat nurodyti ir kiti atvejai, kai $X\neq Y$.

THE APPROXIMATE FUNCTIONAL EQUATION OF HECKE'S Z—FUNCTIONS FOR THE ALGEBRAIC QUADRATIC IMMAGINARY NUMBER FIELDS

K. BULOTA

(Summary)

Let us have an algebraic quadratic immaginary number field K. If Ξ—character Hecke of the second kind with an generating ideal $\mathfrak{m}\neq 0$, than the Z—funkction of Hecke is definiting for the half-plane $\operatorname{Re} s>1$ by Dirichlet series

$$Z(s, \mathfrak{R})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}.$$

As is vell known ([6], [24]), the function $Z(s, \mathfrak{R})$ can by analytically continued thraughout the half-plane $\operatorname{Re} s<0$ and that it satisfies the functional equation

$$Z(s, \Xi, \mathfrak{R})=\psi(s, \Xi)\cdot Z(1-s, \overline{\Xi}, \mathfrak{R}^*).$$

For the some questions of the prime numbers geometry, f. e., to the theorems of density of the zeros of Z-functions Hecke's in the „critical" stripe $0\leqslant \operatorname{Re} s\leqslant 1$ it is useful to have the approximate functional equastion.

In this paper is developed the followed approximate functional equation for the field K:

$$Z(s, \mathfrak{R})=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}\\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}+\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}+O(R),$$

if

$$-H<\operatorname{Re} s<H,$$

$$|\operatorname{Im} s|=2\pi\sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}}.$$

Where X, Y—enough large number, $H>0$, d—diskriminant of field.

The rest-term R haves some forms:

1) Uniformly in X, Y, s

$$R=X^{\frac{1}{2}-\sigma}\ln^{\frac{1}{2}} X, \quad \text{if} \quad X=Y,$$

also is given some other forms or R by $X\neq Y$.

2) Suppose that Y is fixed although enough large, than

$$R=X^{\frac{1}{4}+\varepsilon-\sigma}, \quad \varepsilon>0, \quad \text{if} \quad X=Y$$

and is given some other forms of R too, when $X\neq Y$.

The rest-terms are given suppose that the exponent of Hecke character $m\leqslant|\operatorname{Im} s|$.