II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК ·2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

ОДНА ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ГАУССОВА ПОЛЯ

И. М. ВАЙТКЕВИЧЮС

1. В настоящее время в теории распределения простых чисел основное внимание сосредоточено на улучшении оценок остаточных членов в асимптотических законах. Работы в основном ведутся в двух направлениях: улучшаются оценки остаточных членов сверху, и в то же время много работ посвящено оценкам снизу, аналогичным хорошо известной теореме И. Е. Литтлвуда для простых рациональных чисел. В 1953 г. П. Туран [7] новым методом получил теорему, которая даёт лучшую оценку, чем теорема Литтлвуда: *пусть* $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ *означает некоторый нуль функции* $\zeta(s)$ *Римана с условием* $\beta_0\geqslant\frac{1}{2}$ и

$$T\geqslant\max\left(c_1,\quad \operatorname{expexp}\left(60\ln^2|\rho_0|\right)\right).$$

Тогда

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)|\geqslant T^{\beta_0}e^{-21\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}},$$

где

$$\Delta(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\Lambda(n)-x,$$

а $\Lambda(n)$ — известная функция Мангольдта. c_1 (и в дальнейшем $c_2, c_3, \ldots$) — некоторая положительная константа.

До последнего времени еще не удалось получить такого типа теорем для простых чисел других числовых полей и для простых рациональных чисел в арифметических прогрессиях. Но методом Турана можно получить некоторые теоремы, которые дают новые оценки остаточных членов сверху. Так С. Кнаповски [4] в 1957 г. доказал следующую теорему для арифметических прогрессий:

если

$$T\geqslant\max\left(c_2,\quad \operatorname{expexp}\left(150\,(k\ln k)^2\right)\right),$$

то

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,k,l)|\leqslant T^{\delta(T)}\exp\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}\right)\left(\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,k,1)|+\sqrt{T}\right),$$

где

$$\delta(T)\to 0$$

при $T \to \infty$. Здесь

$$\Delta(x,\ k,\ l) = \pi(x,\ k,\ l) - \frac{1}{h} \int_2^x \frac{du}{\ln u},$$

$\pi(x,\ k,\ l)$ означает число простых чисел в арифметической прогрессии $l,\ l+k,\ l+2k, \ldots,\ k \geqslant 3,\ 0<l<k,\ (l,\ k)=1$ и $h=\varphi(k)$ — функция Эйлера.

Аналогичные теоремы для числа простых идеалов получил В. Стась [5], [6].

В этой статье получены некоторые оценки, связанные с простыми числами гауссова поля в секторах. Сам асимптотический закон распределения простых чисел гауссова поля в секторах с остаточным членом доказал в 1949 г. И. П. Кубилюс [1]. Был получен следующий результат:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N(\mathfrak{p}) \leqslant x \\ \varphi_1 < \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} 1 = \frac{2}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-c_1 \sqrt{\ln x}}\right),$$

где $N(\mathfrak{p})$ означает норму простого гауссового числа $\mathfrak{p}$, x, φ_1, φ_2 — любые действительные числа, удовлетворяющие условиям $x>2$, $0<\varphi_2-\varphi_1 \leqslant 2\pi$. Этот закон даёт нетривиальную асимптотику для углов

$$\varphi_2 - \varphi_1 \geqslant e^{-c_2 \sqrt{\ln x}}.$$

Основным аппаратом для исследования распределения простых чисел и простых идеалов числовых полей служат так называемые Z — функции Гекке. В случае гауссова поля рассматривается специальный класс функций Гекке, определяемых рядом

$$Z(s,\ \lambda^{4n}) = \sum_{\alpha \neq 0}{}' \frac{\lambda^{4n}(\alpha)}{N(\alpha)^s} = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \frac{\lambda^{4n}(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

где знак $'$ показывает, что суммируется и умножается соответственно по всем целым и по всем простым неассоциированным гауссовым числам. $N(\alpha)$, как обычно, обозначает норму числа α, $s=\sigma+it$ — комплексное переменное. Ряд сходится абсолютно при $\sigma>1$. Величина $\lambda^{4n}(\alpha)$ называется характером Гекке первого рода и определяется равенством

$$\lambda^{4n}(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^{4n} = e^{4ni \arg \alpha},$$

где n — любое целое рациональное число.

Если $n=0$, то функция $Z(s,\ \lambda^{4n})$ совпадает с функцией Дедекинда

$$Z(s) = \sum_{\alpha \neq 0}{}' \frac{1}{N(\alpha)^s} = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}, \quad s=\sigma+it, \quad \sigma>1.$$

В дальнейшем будем придерживаться выше введенных обозначений. Кроме того, полагаем

$$|t|+2=T, \quad |n|+2=M.$$

Необходимые нам свойства функций Гекке, а также функции $\zeta(s)$ Римана, сформулируем в виде лемм.

2. **Лемма 1.** *Функция*

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{s-1},\quad s=\sigma+it$$

является целой на всей плоскости. При $\sigma\geqslant-\frac{3}{2}$ *выполняется неравенство*

$$\left|\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right|\leqslant c_4\left\{1+T^{\frac{1-\sigma}{2}}\right\}\ln T.$$

Эти свойства хорошо известны из теории функции $\zeta(s)$ Римана.

Лемма 2. *Пусть* $N(t,\ n)$ *означает число нулей* $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$ *функции* $Z(s,\ \lambda^{4n})$ *в прямоугольнике*

$$0<\beta_n<1,\quad |\gamma_n|\leqslant T.$$

Тогда

$$N(t+1,\ n)-N(t,\ n)\leqslant c_5\ln MT.$$

Доказательство см. [2], стр. 28, лемма 12.

Из этой леммы следует, что

$$N(t,\ n)\leqslant c_5\,T\ln MT.$$

Лемма 3. *Функция* (логарифмическая производная функции $Z(s,\ \lambda^{4n})$)

$$\frac{Z'}{Z}\ (s,\ \lambda^{4n})$$

в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ *имеет полюсы в нулях функции* $Z(s,\ \lambda^{4n})$ *и полюс первого порядка в точке* $s=1$ *с вычетом* -1 *при* $n=0$, *а в остальной части плоскости является регулярной для всех* n. *Для каждого целого числа* $\nu\geqslant 2$ *существует действительное число* T_ν *такое, что*

$$\nu\leqslant T_\nu\leqslant\nu+1,$$

а на отрезках $t=T_\nu$, $0\leqslant\sigma\leqslant 2$ *не существует нулей функции* $Z(s,\ \lambda^{4n})$ *и имеет место оценка*

$$\left|\frac{Z'}{Z}\ (s,\ \lambda^{4n})\right|\leqslant c_6\ln^2 M\nu.$$

(См. [2], стр. 29, лемма 13.)

Лемма 4. *Если* $0\leqslant\delta\leqslant 10^{-10}$, $s=\sigma+it$, *то в полосе*

$$\delta^{\frac{1}{10}}\leqslant\sigma\leqslant 2\delta^{\frac{1}{10}}$$

можно построить такую ломаную линию $L(\delta)$, *не проходящую через нули функции* $Z(s,\ \lambda^{4n})$, *отрезки которой параллельны соответственно действительной и мнимой осям и:*

а) *каждому целому числу* ν *соответствует такое действительное число* T_ν, *что* $\nu<T_\nu<\nu+1$ *и на отрезках* $t=T_\nu$, $\delta^{\frac{1}{10}}\leqslant\sigma\leqslant 2\delta^{\frac{1}{10}}$

$$\left|\frac{Z'}{Z}\ (s,\ \lambda^{4n})\right|<c_7\ln^2 M(|\nu|+6);$$

б) *на отрезках, параллельных мнимой оси*

$$\left| \frac{Z'}{Z}(s, \lambda^{4n}) \right| < c_8 \ln^2 M(|t|+6),$$

где c_7 *и* c_8 *зависят от* δ.

Доказательство с несущественными изменениями совпадает с доказательством леммы 13 в работе [2], стр. 29.

Переход от простых гауссовых чисел на всей плоскости к простым числам в секторе осуществляется по следующей лемме:

Лемма 5. *Пусть* φ_1, φ_2 — *действительные числа, удовлетворяющие условиям* $2\Delta \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\Delta$, $\Delta > 0$. *Существует периодическая функция* $f(\varphi)$ *с периодом* $\frac{\pi}{2}$, *обладающая свойствами*:

а) $f(\varphi) = 1$, *если* $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$,

$0 \leqslant f(\varphi) \leqslant 1$, *если* $\varphi_1 - \Delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ *или* $\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 + \Delta$,

$f(\varphi) = 0$, *если* $\varphi_2 + \Delta \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \Delta$;

б) *функция* $f(\varphi)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{4ni\varphi}.$$

Кроме того

$$a_0 = \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta),$$

$$|a_n| \leqslant \min\left(\frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \ \frac{2}{\pi|n|}, \ \frac{2}{\pi|n|}\left(\frac{r}{2|n|\Delta}\right)^r\right), \quad n \neq 0$$

где r — *целое положительное число.*

(См. [2], стр. 25, лемма 9.)

Для оценок некоторых сумм с комплексными числами снизу воспользуемся теоремой Турана ([7], стр. 52, теорема X).

Лемма 6. *Пусть* $m > 0$, $k \leqslant N$, *а* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ — *любые комплексные числа, удовлетворяющие условиям*

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \cdots \geqslant |z_k|, \quad |z_1| \geqslant 1.$$

Тогда для любых комплексных чисел b_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ *в интервале* $m \leqslant \nu \leqslant m + N$ *существует такое целое число* ν_0, *для которого выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{j=1}^{k} b_j z_j^{\nu_0} \right| \geqslant \left(\frac{1}{48e^2} \frac{N}{m+2N} \right)^N \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \left| \sum_{l=1}^{j} b_l \right|.$$

В дальнейшем будем рассматривать функции

$$\bar{\Delta}(x) = \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x}' \Lambda(\alpha) - x = \sum_{1 \leqslant n \leqslant} A(n) - x$$

и

$$\tilde{\Delta}(x, \varphi_1 \varphi_2) = \sum_{\substack{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x \\ \varphi_1 < \arg\alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha) - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)x = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} A(n, \varphi_1 - \varphi_2) - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)x,$$

где

$$A(n) = \sum_{N(\mathfrak{p})^l = n} \ln N(\mathfrak{p}),$$

$$A(n, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\substack{N(\mathfrak{p})^l = n \\ \varphi_1 < \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}),$$

$l > 0$ — целое число.

3. Рассмотрим интервал

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-iT_\nu}^{1+\eta+iT_\nu} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds,$$

где $s = \sigma + it$, T_ν — числа леммы 3, а функция $F(s)$ определяется равенством

$$F(s) = -\frac{Z'}{Z}(s) - \zeta(s),$$

где $Z(s)$ — функция Дедекинда, а $\zeta(s)$ — функция Римана. Параметры η и ξ удовлетворяют условиям $0 < \eta < 1$, $\xi > 1$. Точнее их определим позже.

Функция $F(s)$ выражается суммой

$$F(s) = \sum_{\alpha \neq 0}' \frac{\Lambda(\alpha)}{N(\alpha)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n) - 1}{n^s}.$$

Тогда

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A(n) - 1\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-iT_\nu}^{1+\eta+iT_\nu} \left(\frac{\xi}{n}\right)^s \frac{ds}{s^{k+1}}.$$

По известной формуле $(a > 0)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{r^s}{s^{k+1}}\, ds = \begin{cases} \frac{1}{k!} \ln^k r, & \text{если } r \geqslant 1, \\ 0, \text{ если } r \leqslant 1, \end{cases}$$

и для интеграла I получаем соотношение

$$I = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \xi} \left(A(n) - 1\right) \frac{1}{k!} \ln^k \frac{\xi}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A(n) - 1\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta+iT_\nu}^{1+\eta+i\infty} \left(\frac{\xi}{n}\right)^s \frac{ds}{s^{k+1}} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(A(n) - 1\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\eta-i\infty}^{1+\eta-iT_\nu} \left(\frac{\xi}{n}\right)^s \frac{ds}{s^{k+1}} = S_1 - S_2 - S_3,$$

где S_1, S_2, S_3 соответственно означает первую, вторую и третью суммы. Отсюда

$$|I| \leqslant |S_1| + |S_2| + |S_3|. \tag{3.1}$$

4. Сумму S_1 выразим через максимум функции $\tilde{\Delta}(x)$ в интервале $1 \leqslant \leqslant x \leqslant \xi$. Имеем:

$$A(n)-1=\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant n} A(m)-n\Big)-\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} A(m)-(n-1)\Big)=\tilde{\Delta}(n)-\tilde{\Delta}(n-1).$$

Тогда

$$S_1=\frac{1}{k!}\sum_{1\leqslant n\leqslant \xi}\Big(A(n)-1\Big)\ln^k\frac{\xi}{n}=\frac{1}{k!}\sum_{1\leqslant n\leqslant \xi}\Big(\tilde{\Delta}(n)-\tilde{\Delta}(n-1)\Big)\ln^k\frac{\xi}{n}.$$

Применяя к последней сумме формулу частного суммирования Абеля, получаем:

$$|S_1|\leqslant\frac{1}{k!}\Big|\tilde{\Delta}(1)\Big(\ln^k\frac{\xi}{1}-\ln^k\frac{\xi}{2}\Big)+\tilde{\Delta}(2)\Big(\ln^k\frac{\xi}{2}-\ln^k\frac{\xi}{3}\Big)+\cdots+$$
$$+\tilde{\Delta}\Big([\xi]-1\Big)\Big(\ln^k\frac{\xi}{[\xi]-1}-\ln^k\frac{\xi}{[\xi]}\Big)+\tilde{\Delta}\Big([\xi]\Big)\ln^k\frac{\xi}{[\xi]}\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{k!}\ln^k\xi\cdot\max_{1\leqslant x\leqslant\xi}|\tilde{\Delta}(x)| \tag{4.1}$$

5. Оценим суммы S_2 и S_3. Пусть

$$\nu\leqslant T_\nu<\nu+1,\quad \nu>2, \tag{5.1}$$
$$\xi=\nu^{k+1}, \tag{5.2}$$
$$\eta=\frac{1}{\ln\xi}, \tag{5.3}$$
$$(\nu^{K_0}<)\ \nu^{K_0+N_0}\leqslant T<\nu^{K_0+N_0+1}\ (<\nu^{3K_0}), \tag{5.4}$$
$$T>c_{10},$$

где

$$K_0=d\,\frac{\ln T}{\ln\ln T},\quad d\geqslant 2, \tag{5.5}$$
$$N_0=\ln^{\frac{1}{d}}T(\ln\ln T)^2. \tag{5.6}$$

Нетрудно убедиться, что из (5.4) при $T>c_{10}$ получаются неравенства

$$\ln^{\frac{1}{3d}}T\leqslant\nu\leqslant\ln^{\frac{1}{d}}T, \tag{5.7}$$

а из (5.5) и (5.6) непосредственно видно, что

$$K_0>N_0.$$

Пусть число k удовлетворяет условиям

$$K_0\leqslant k+1\leqslant K_0+N_0. \tag{5.8}$$

Так как

$$A(n)-1=O(\ln n),$$

то получаем:

$$|S_2|\leqslant c_9\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\cdot\frac{1}{2\pi}\,\frac{\xi^{1+\eta}}{n^{1+\eta}}\int_{T_\nu}^{\infty}\frac{dt}{t^{k+1}}\leqslant c_9\,\frac{e}{2\pi}\,\frac{\xi}{kT_\nu^{k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\eta}}\leqslant$$
$$\leqslant c_9\,\frac{e}{2\pi}\,\frac{\xi}{kT_\nu^k}\Big(1+\frac{1}{\eta^2}\Big).$$

Воспользовавшись соотношениями (5.1), (5.2) и (5.3) имеем:

$$|S_2| \leqslant c_{11}\, \nu^{k+1} \cdot \frac{1}{\nu^k}\, \frac{1}{k}\, (1+\ln^2\xi) \leqslant c_{11}\, \nu k \ln \nu.$$

Далее, по (5.7), (5.8) и (5.5)

$$|S_2| \leqslant c_{11} \ln^{1+\frac{1}{d}} T \leqslant c_{11} \ln^2 T. \tag{5.9}$$

Такая же оценка получается и для суммы S_3.

Подставляя (4.1) и (5.9) в (3.1), для интеграла I имеем неравенство

$$|I| \leqslant \frac{\ln^k \xi}{k!} \max_{1 \leqslant x \leqslant \xi} |\tilde{\Delta}(x)| + 2c_{11} \ln^2 T. \tag{5.10}$$

6. Выразим интеграл I через сумму по нулям функции $Z(s)$. Для этой цели воспользуемся интегральной теоремой Коши. Пусть $C(T_\nu)$ есть контур, который состоит из отрезка I, соединяющего точки $1+\eta-iT_\nu$ и $1+\eta+iT_\nu$, отрезка II прямой $t=T_\nu$ от прямой $\sigma=1+\eta$ до линии $L(\delta)$ леммы 4, части III линии $L(\delta)$ от прямой $t=T_\nu$ до прямой $t=-T_\nu$, и, наконец, отрезка IV прямой $t=-T_\nu$ от линии $L(\delta)$ до прямой $\sigma=1+\eta$.

Интеграл на отрезке I равняется нашему интегралу I. Подинтегральная функция внутри контура имеет полюсы в нулях $\rho=\beta+i\gamma$ функции $Z(s)$. По интегральной теореме Коши имеем:

$$I + \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{(\mathrm{II})} + \int\limits_{(\mathrm{III})} + \int\limits_{(\mathrm{IV})}\right) \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds = \sum_{\rho \in U(T_\nu)} \frac{\xi^\rho}{\rho^{k+1}},$$

где сумма берётся по всем нулям функции $Z(s)$, принадлежащим области $U(T_\nu)$, которую ограничивает контур $C(T_\nu)$. Отсюда получаем:

$$\left|\sum_{\rho \in U(T_\nu)} \frac{\xi^\rho}{\rho^{k+1}}\right| \leqslant |I| + \left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{(\mathrm{II})} + \int\limits_{(\mathrm{III})} + \int\limits_{(\mathrm{IV})}\right) \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds\right|. \tag{6.1}$$

Оценим последние три интеграла. Обозначим их соответственно I_2, I_3, I_4. Имеем:

$$|I_2| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\mathrm{II})} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta^{\frac{1}{10}}}^{1+\eta} \frac{\xi^\sigma}{T_\nu^{k+1}} |F(s)|\, d\sigma.$$

Воспользовавшись леммами 3 и 1, получаем:

$$|I_2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T_\nu^{k+1}} \int\limits_{\delta^{\frac{1}{10}}}^{1+\eta} \xi^\sigma \left\{ c_6 \ln^2 2(T_\nu+2) + 1 + c_4 \left(1 + \left(2(T_\nu+2)\right)^{\frac{1-\sigma}{2}}\right) \ln 2(T_\nu+2) \right\} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_{12} \frac{1}{T_\nu^{k+1}} \int\limits_{\delta^{\frac{1}{10}}}^{1+\eta} \xi^\sigma (2T_\nu)^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln^2 T_\nu\, d\sigma \leqslant c_{13} \frac{\ln^2 T_\nu}{T_\nu^{k+1}} T_\nu^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{1+\eta} \xi^\sigma\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_{13} \frac{\ln^2 T_\nu}{T_\nu^{k+1}} T_\nu^{\frac{1}{2}} \xi^{1+\eta} (1+\eta).$$

Применяя соотношения (5.1), (5.2), (5.3), (5.7), окончательно имеем:

$$|I_2| \leqslant c_{13} \frac{\ln^2(\nu+1)}{\nu^{k+1}} (\nu+1)^{\frac{1}{2}} e\xi\left(1+\frac{1}{\ln\xi}\right) \leqslant c_{14} \frac{\ln^2\nu}{\nu^{k+1}} \nu^{\frac{1}{2}} \nu^{k+1} =$$

$$= c_{14} \nu^{\frac{1}{2}} \ln^2\nu \leqslant c_{14} \ln^{\frac{1}{2d}} T\cdot\frac{1}{d} \ln\ln T \leqslant c_{15}\ln T,\ T > c_{16}. \tag{6.2}$$

Такую же оценку получим и для интеграла I_4.

Для интеграла I_3, применяя леммы 4 и 1, имеем:

$$|I_3| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\mathrm{III})} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \xi^{2\delta^{\frac{1}{10}}} \left\{ \int\limits_{-T_\nu}^{T_\nu} \left(c_7 \ln^2 2(|t|+6) + 1 + c_4\left(1+\left(2(|t|+2)\right)^{\frac{1}{2}\left(1-\delta^{\frac{1}{10}}\right)}\right) \ln 2(|t|+2) \right) \times\right.$$

$$\times \frac{dt}{\left(t^2+\delta^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{k+1}{2}}} + \sum_{m=0}^{T_\nu} \left(c_8 \ln^2 2(m+6) + 1 + c_4\left(1+\left(2(m+2)\right)^{\frac{1}{2}\left(1-\delta^{\frac{1}{10}}\right)}\right) \ln 2(m+2) \right) \times$$

$$\left.\times \frac{1}{\left(m^2+\delta^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{k+1}{2}}} \right\} \leqslant c_{17} \xi^{2\delta^{\frac{1}{10}}} \delta^{-\frac{k+1}{10}} \left\{ \int\limits_{-T_\nu}^{T_\nu} (|t|+2)^{\frac{1}{2}\left(1-\delta^{\frac{1}{10}}\right)} \ln^2 2(|t|+6)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{T_\nu} (m+2)^{\frac{1}{2}\left(1-\delta^{\frac{1}{10}}\right)} \ln^2(m+6) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_{17} \xi^{2\delta^{\frac{1}{10}}} \delta^{-\frac{k+1}{10}} \left\{ 2T_\nu (T_\nu+2)^{\frac{1}{2}\left(1+\delta^{\frac{1}{10}}\right)} \ln^2(T_\nu+6) + \right.$$

$$\left. + T_\nu(T_\nu+2)^{\frac{1}{2}\left(1-\delta^{\frac{1}{10}}\right)} \ln^2(T_\nu+6) \right\} \leqslant c_{18} \xi^{2\delta^{\frac{1}{10}}} \delta^{-\frac{k+1}{10}} T_\nu^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}}} \ln^2 T_\nu.$$

Пусть $\delta = 10^{-10}$. Тогда, используя (5.1) и (5.8), получаем:

$$|I_3| < c_{18} \xi^{\frac{1}{5}} (\nu+1)^{\frac{29}{20}} \ln^2(\nu+1)\cdot 10^{k+1} \leqslant c_{19} \xi^{\frac{1}{5}} \nu^{\frac{29}{20}} \ln^2\nu\cdot e^{(K_0+N_0)\ln 10}.$$

Но $\ln 10 < 3$, а соотношения (5.2), (5.8) и (5.5) показывают, что $\xi \leqslant T$. Тогда, полагая $T \geqslant c_{20}$ и используя (5.7), (5.5) и (5.6), имеем:

$$|I_3| \leqslant c_{19} T^{\frac{1}{5}} \left(\ln^{\frac{1}{d}} T\right)^{\frac{29}{20}} \cdot \frac{1}{d^2} (\ln\ln T)^2 \cdot e^{3\left(d\frac{\ln T}{\ln\ln T} + \ln^{\frac{1}{d}} T (\ln\ln T)^2\right)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{21} T^{\frac{1}{5}} e^{\frac{29}{20d}\ln\ln T + 2\ln\ln\ln T + 3d\frac{\ln T}{\ln\ln T} + 3\ln^{\frac{1}{d}}(\ln\ln T)^2} \leqslant c_{21} T^{\frac{1}{5}} e^{(3d+2)\frac{\ln T}{\ln\ln T}}. \tag{6.3}$$

Эти оценки не являются наилучшими, но для наших целей их вполне достаточно.

Оценки интегралов I_2, I_3 и I_4 и неравенства (5.10) и (6.1) дают:

$$\left|\sum_{\rho\in U(T_\nu)}\frac{\xi^\rho}{\rho^{k+1}}\right|\leqslant\frac{\ln^k\xi}{k!}\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\tilde{\Delta}(x)|+2c_{11}\ln^2T+2c_{15}\ln T+$$

$$+c_{21}T^{\frac{1}{5}}e^{(3d+2)\frac{\ln T}{\ln\ln T}}\leqslant\frac{\ln^k\xi}{k!}\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\tilde{\Delta}(x)|+c_{22}T^{\frac{1}{5}}e^{(3d+2)\frac{\ln T}{\ln\ln T}},\qquad(6.4)$$

$$T>c_{23}.$$

7. Оценим сумму в неравенстве (6.4) снизу. Все вычисления почти полностью совпадают с вычислениями в книге Турана [7], стр. 118—119. Поэтому здесь ограничимся лишь кратким их изложением. Пусть $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ есть некоторый нуль функции $Z(s)$ в области $U(T_\nu)$ с условиями

$$|\gamma_0|\leqslant\exp(\sqrt{\ln\ln T}),\quad \beta_0=\varepsilon(\exp\sqrt{\ln\ln T}),\quad \beta_0\geqslant\frac{1}{2}.$$

Обозначим нашу сумму W и перепишем её в виде

$$|W|=\left|\sum_{\rho\in U(T_\nu)}\frac{\xi^\rho}{\rho^{k+1}}\right|=\frac{\xi^{\beta_0}}{|\rho_0|^{k+1}}\left|\sum_{\rho\in U(T_\nu)}\xi^{\rho-\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k+1}\right|=$$

$$=\left(\frac{\nu^{\beta_0}}{|\rho_0|}\right)^{k+1}\left|\sum_{\rho\in U(T_\nu)}\left(\nu^{\rho-\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k+1}\right|.$$

Число членов этой суммы по лемме 2 не превосходит

$$2N(T_\nu)\leqslant 2c_5T_\nu\ln T_\nu<\ln^{\frac{1}{d}}T(\ln\ln T)^2,\quad T>c_{24}.$$

Подбираем в лемме 6 соответствующие величины следующим образом:

$$z_j=\nu^{\rho-\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho},\quad b_j=1,$$

$$m=K_0=d\frac{\ln T}{\ln\ln T},$$

$$N=\ln^{\frac{1}{d}}T(\ln\ln T)^{\frac{3}{2}}.$$

Если

$$T\geqslant\max\left(c_{26},\ \exp\exp(6d\ln^2|\rho_0|)\right),\qquad(7.1)$$

то все условия леммы 6 выполнены и окончательный результат всех вычислений, которых здесь не приводим, такой:

$$|W|>T^{\beta_0}|\rho_0|^{-d\frac{\ln T}{\ln\ln T}}e^{-3\ln^{\frac{1}{d}}T(\ln\ln T)^2}.\qquad(7.2)$$

8. Полученая оценка (7.2) вместе с (6.4) дают неравенство

$$\frac{\ln^k T}{k!} \max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x)| \geqslant T^{\beta_0} |\rho_0|^{-d\frac{\ln T}{\ln\ln T}} e^{-3d\ln^{\frac{1}{d}} T(\ln\ln T)^3} - c_{22} T^{\frac{1}{5}} e^{(3d+2)\frac{\ln T}{\ln\ln T}}. \quad (8.1)$$

Если выполняется (7.1), то

$$|\rho_0| < e^{\sqrt{\ln\ln T}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} T^{\beta_0} |\rho_0|^{-d\frac{\ln T}{\ln\ln T}} e^{-3\ln^{\frac{1}{d}} T(\ln\ln T)^3} \geqslant \frac{1}{2} T^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-3\ln^{\frac{1}{d}} T(\ln\ln T)^3}}{\left(e^{\sqrt{\ln\ln T}}\right)^{d\frac{\ln T}{\ln\ln T}}} =$$

$$= \frac{1}{2} T^{\frac{1}{2}} e^{-3\ln^{\frac{1}{d}} T(\ln\ln T)^3} \cdot e^{-d\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} > c_{22} T^{\frac{1}{5}} e^{(3d+2)\frac{\ln T}{\ln\ln T}}. \quad (8.2)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\ln^k T}{k!} \max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x)| \geqslant \frac{1}{2} T^{\beta_0} |\rho_0|^{-d\frac{\ln T}{\ln\ln T}} e^{-3\ln^{\frac{1}{d}} T(\ln\ln T)^3} > T^{\beta_0} e^{-2d\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}. \quad (8.3)$$

Наконец, если $T > c_{26}$, то по формуле Стирлинга имеем

$$\frac{1}{k!} \ln^k T < \left(\frac{e\ln T}{k}\right)^k < \left(\frac{2e\ln T}{k+1}\right)^k < e^{\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}.$$

Тогда при $d=5$ из (8.1), (8.2) и (8.3) с условием (7.1) получаем оценку

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x)| \geqslant T^{\beta_0} e^{-11\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}. \quad (8.4)$$

В общем случае для числа простых идеалов любого числового поля В. Стась [6] получил оценку

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x)| > T^{\beta_0} \exp\left\{-2\frac{\ln T \ln\ln\ln T}{\ln\ln T}\right\}. \quad (8.5)$$

В нашем частном случае гауссова поля оценка (8.4) является лучшей, чем (8.5).

9. Рассмотрим функцию

$$F_1(s) = \sum_{\alpha\neq 0}{}' \frac{f(\arg\alpha)\,\Lambda(\alpha)}{N(\alpha)^s} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{Z'}{Z}(s, \lambda^{4n}),$$

где $f(\arg\alpha)$ — функция $f(\varphi)$ леммы 5. Пусть $x\geqslant 3$ и числа T_x совпадают с числами T_ν леммы 4. Обозначим

$$\nu = [\sqrt{x} - \delta], \quad a = 1 + \eta_1 = 1 + \frac{1}{\ln x},$$

где δ — величина леммы 4. Тем же способом, каким доказывается теорема 24 в книге [3] стр. 69, нетрудно доказать соотношение

$$\sum_{1\leqslant N(\alpha)\leqslant x} f(\arg\alpha)\,\Lambda(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT_x}^{a+iT_x}\frac{x^s}{s}F_1(s)\,ds+R(x), \tag{9.1}$$

где

$$|R(x)|\leqslant c_{27}\left(\frac{x^a}{T_x(a-1)}+\frac{x\ln^2 x}{T_x}+\ln x\right).$$

Так как по лемме 4

$$\sqrt{x}-1\leqslant T_x\leqslant\sqrt{x},$$

то

$$|R(x)|\leqslant c_{27}\left(\frac{x^{1+\frac{1}{\ln x}}}{\frac{\sqrt{x}}{2}\,\frac{1}{\ln x}}+\frac{x\ln^2 x}{\frac{\sqrt{x}}{2}}+\ln x\right)<c_{28}\sqrt{x}\ln^2 x. \tag{9.2}$$

Обозначим

$$\tilde{\Delta}_1(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)=\sum_{1\leqslant N(\alpha)\leqslant x} f(\arg\alpha)\,\Lambda(\alpha)-\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta)^x=$$

$$=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}A_1(n)-\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta)^x, \tag{9.3}$$

где

$$A_1(n)=\sum_{N(\mathfrak{p})^l=n} f(\arg\mathfrak{p})\ln N(\mathfrak{p}).$$

Тогда из соотношений (9.3), (9.1) и неравенства (9.2) получаем:

$$\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\,x+\tilde{\Delta}_1(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iT_x}^{a+iT_x}\frac{x^s}{s}F_1(s)+c_{28}\sqrt{x}\ln^2 x. \tag{9.4}$$

Обозначим интеграл в правой части последнего равенства через $I(x)$. Тогда

$$I(x)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT_x}^{a+iT_x}\frac{x^s}{s}\frac{Z'}{Z}(s,\ \lambda^{4n})\,ds. \tag{9.5}$$

Пусть $C(T_x)$ есть контур, состоящий из отрезка I прямой $\sigma=a$, соединяющего точки $a-iT_x$ и $a+iT_x$, отрезка II прямой $t=T_x$ от прямой $\sigma=a$ до линии $L(\delta)$ леммы 4, части III линии $L(\delta)$ между прямыми $t=T_x$ и $t=-T_x$ и, наконец, отрезка IV прямой $t=-T_x$ от линии III до прямой $\sigma=a$. Вычислим по этому контуру интеграл

$$I_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT_x}^{a+iT_x}\frac{x^s}{s}\frac{Z'}{Z}(s,\ \lambda^{4n})\,ds. \tag{9.6}$$

Подынтегральная функция внутри контура имеет полюсы в нулях $\rho_n=\beta_n+$ $+i\gamma_n$ функции $Z(s,\ \lambda^{4n})$ и простой полюс в точке $s=1$ с вычетом -1 при

$n=0$. Интеграл на отрезке I равняется интегралу $I_1(x)$, интегралы по остальным отрезкам обозначим соответственно $I_2(x)$, $I_3(x)$ и $I_4(x)$. Тогда по интегральной теореме Коши получаем:

$$I(x)=a_0 x+\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left\{\sum_{\rho_n\in U(T_x)}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}-I_2(x)-I_3(x)-I_4(x)\right\}, \tag{9.7}$$

где суммируется по всем нулям функции $Z(s, \lambda^{4n})$, принадлежащим внутренней области $U(T_x)$ контура $C(T_x)$. Так как по лемме 5 $a_0=$ $=\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta)$, то соотношения (9.4), (9.6) и (9.7) дают неравенство

$$|\tilde{\Delta}_1(x, \varphi_1, \varphi_2)|\leqslant\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\sum_{\rho_n\in U(T_x)}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}\right|+\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\{I_2(x)+I_3(x)+I_4(x)\}\right|+$$
$$+c_{28}\sqrt{x}\ln^2 x. \tag{9.8}$$

10. Оценим сумму и интегралы в правой части неравенства (9.8). Имеем:

$$|I_2(x)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\mathrm{II})}\frac{x^s}{s}\frac{Z'}{Z}(s, \lambda^{4n})\,ds\right|\leqslant c_{29}\int\limits_{\delta^{\frac{1}{10}}}^{1+\frac{1}{\ln x}}\frac{x^\sigma}{\sqrt{x}}\left|\frac{Z'}{Z}(s, \lambda^{4n})\right|d\sigma.$$

По лемме 4 получаем:

$$|I_2(x)|\leqslant c_{29}\frac{\ln^2 x\ln^2 M}{\sqrt{x}}\int\limits_{\delta^{\frac{1}{10}}}^{1+\frac{1}{\ln x}}x^\sigma\,d\sigma<c_{30}\sqrt{x}\ln^2 x\ln^2 M. \tag{10.1}$$

Аналогично оцениваем и интеграл $I_4(x)$. Далее по той же лемме

$$|I_3(x)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\mathrm{III})}\frac{x^s}{s}\frac{Z'}{Z}(s, \lambda^{4n})\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant c_{31}x^{2\delta^{\frac{1}{10}}}\left\{\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{\ln^2(|t|+6)\ln^2 M}{\sqrt{t^2+\delta^{\frac{1}{5}}}}dt+\sum_{m=0}^{\sqrt{x}+1}\frac{\ln^2(m+6)\ln^2 M}{\sqrt{m^2+\delta^{\frac{1}{5}}}}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant c_{32}x^{2\delta^{\frac{1}{10}}}\ln^3 x\ln^2 M. \tag{10.2}$$

Для суммы имеем:

$$\left|\sum_{\rho_n\in U(T_x)}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}\right|\leqslant c_{33}x^{\varepsilon(\sqrt{x})}\sum_{\rho_n\in U(T_x)}\frac{1}{|\rho_n|}<c_{34}x^{\varepsilon(\sqrt{x})}\sum_{m=1}^{\sqrt{x}+1}\frac{\ln M(m+2)}{m}\leqslant$$
$$\leqslant c_{34}x^{\varepsilon(\sqrt{x})}\ln M\cdot\ln^2 x, \tag{10.3}$$

где $\varepsilon(\sqrt{x})=\max\limits_{\rho_n}\beta_n$ (максимум берётся по всем нулям ρ_n), $\varepsilon(\sqrt{x})\geqslant\frac{1}{2}$.

Оценки (10.3), (10.2) и (10.1) и неравенство (9.9), если положим $\delta=10^{-10}$, дают

$$|\tilde{\Delta}_1(x, \varphi_1, \varphi_2)| \leqslant c_{34} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|\, x^{\varepsilon(\sqrt{x})} \ln M \cdot \ln^2 x +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \cdot \left\{ 2 c_{30} \sqrt{x} \ln^2 x \cdot \ln^2 M + c_{32}\, x^{28^{\frac{1}{10}}} \ln^3 x \cdot \ln^2 M \right\} <$$

$$< c_{35}\, x^{\varepsilon(\sqrt{x})} \ln^2 x \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \ln^2 M. \qquad (10.4)$$

Оценим последнюю сумму в правой части. Имеем:

$$S \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \ln^2 M = |a_0| \ln 2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} |a_n| \ln^2(|n|+2).$$

Пусть $\Delta=\exp(-c_{36}\sqrt{\ln x})$. Тогда

$$S \leqslant |a_0| \ln 2 + 2 \sum_{1\leqslant n \leqslant \Delta^{-1}} |a_n| \ln^2(n+2) + 2 \sum_{n>\Delta^{-1}} |a_n| \ln^2(n+2).$$

По лемме 5 при $r=2$

$$|a_n| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{\pi |n|}, & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant \Delta^{-1}, \\ \dfrac{2}{\pi} \dfrac{2}{|n|^3 \Delta^2}, & \text{если } n > \Delta^{-1}. \end{cases}$$

Поэтому

$$S \leqslant |a_0| \ln 2 + c_{37} \sum_{1\leqslant n\leqslant \Delta^{-1}} \frac{\ln^2(n+2)}{n} + \frac{c_{38}}{\Delta^2} \sum_{n>\Delta^{-1}} \frac{\ln^2(n+2)}{n^3} \leqslant |a_0| \ln 2 + c_{39} (\ln \Delta^{-1})^3 +$$

$$+\frac{c_{40}}{\Delta^2} \cdot \frac{(\ln \Delta^{-1})^2}{\Delta^{-2}} \leqslant |a_0| \ln 2 + c_{39} \ln^3\left(e^{c_{37}\sqrt{\ln x}}\right) + c_{40} \ln^2\left(e^{c_{37}\sqrt{\ln x}}\right) =$$

$$= |a_0| \ln 2 + c_{41} \ln^{\frac{3}{2}} x + c_{42} \ln x \leqslant c_{43} \ln^{\frac{3}{2}} x. \qquad (10.5)$$

Таким образом для функции $\tilde{\Delta}_1(x, \varphi_1, \varphi_2)$ из (10.4) и (10.5) получаем оценку

$$|\tilde{\Delta}_1(x, \varphi_1, \varphi_2)| < c_{44}\, x^{\varepsilon(\sqrt{x})} \ln^{\frac{7}{2}} x. \qquad (10.6)$$

Но

$$\tilde{\Delta}_1(x, \varphi_1, \varphi_2) = \tilde{\Delta}(x, \varphi_1, \varphi_2) + \Theta_1 \tilde{\Delta}(x, \varphi_1-\Delta, \varphi_1) + \Theta_2 \tilde{\Delta}(x, \varphi_2, \varphi_2+\Delta), \quad (10.7)$$

где $|\Theta_1| \leqslant 1$, $|\Theta_2| \leqslant 1$ и

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x, \varphi_1-\Delta, \varphi_1) &\leqslant \tilde{\Delta}_1(x, \varphi_1-\Delta, \varphi_1), \\ \tilde{\Delta}(x, \varphi_2, \varphi_2+\Delta) &\leqslant \tilde{\Delta}_1(x, \varphi_2, \varphi_2+\Delta). \end{aligned}\right\} \qquad (10.8)$$

Так как неравенство (10.6) доказано для любых действительных φ_1, φ_2, то из него, в частности, следует

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\Delta}_1(x,\ \varphi_1-\Delta,\ \varphi_1)&=O\left(x^{\varepsilon(\sqrt{x})}\ln^{\frac{7}{2}}x\right),\\ \tilde{\Delta}_1(x,\ \varphi_2,\ \varphi_2+\Delta)&=O\left(x^{\varepsilon(\sqrt{x})}\ln^{\frac{7}{2}}x\right).\end{aligned}\right\}\tag{10.9}$$

Теперь из (10.7), (10.8) и (10.9) получаем

$$|\tilde{\Delta}(x_1\ \varphi_1,\ \varphi_2)|<c_{45}\,x^{\varepsilon(\sqrt{x})}\ln^{\frac{7}{2}}x.\tag{10.10}$$

Отсюда следует неравенство

$$\max_{1\leq x\leq T}|\tilde{\Delta}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)|<c_{45}\,T^{\varepsilon(\sqrt{T})}\ln^{\frac{7}{2}}T.\tag{10.11}$$

Соединяя вместе неравенства (10.11) и (8.4), получаем окончательную оценку

$$\max_{1\leq x\leq T}|\tilde{\Delta}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)|<c_{45}\,T^{\varepsilon(\sqrt{T})-\beta_0}\,e^{11\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}\ln^{\frac{7}{2}}T\cdot\max_{1\leq x\leq T}|\tilde{\Delta}(x)|<$$

$$<c_{45}\,T^{\delta(T)}\,e^{12\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}\max_{1\leq x\leq T}|\tilde{\Delta}(x)|,\tag{10.12}$$

где $\delta(T)=\varepsilon(\sqrt{T})-\beta_0$.

11. Выведем теперь аналогичное неравенство для функции $\pi(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$, выражающей число простых гауссовых чисел, норма которых не превосходит действительного числа x и которые принадлежат некоторому сектору. Обозначим

$$\Delta(x)=\pi(x)-\int_2^x\frac{du}{\ln u},\tag{11.1}$$

$$\Delta(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)=\pi(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)-\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\int_0^x\frac{du}{\ln u},\tag{11.2}$$

где $\pi(x)$ выражает число всех простых неассоциированных гауссовых чисел с нормой, не превосходящей x. Пусть

$$S(x)=\sum_{\substack{1\leq N(\alpha)\leq x\\ \varphi_1<\arg\alpha\leq\varphi_2}}\Lambda(\alpha).$$

Тогда по определению функции $\tilde{\Delta}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ получаем

$$\Delta(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)=\sum_{2\leq m\leq x}\left\{A(m,\ \varphi_1,\ \varphi_2)-A(m-1,\ \varphi_1,\ \varphi_2)\right\}\frac{1}{\ln m}-$$

$$-\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O(\sqrt{x}\ln x)=$$

$$=\sum_{2\leq m\leq x}\frac{\tilde{\Delta}(m,\ \varphi_1,\ \varphi_2)-\tilde{\Delta}(m-1,\ \varphi_1,\ \varphi_2)}{\ln m}+O(\sqrt{x}\ln x).$$

По формуле частного суммирования Абеля имеем

$$|\Delta(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)| \leqslant \frac{1}{\ln 2} \max_{2\leqslant m\leqslant x} |\tilde{\Delta}(m,\ \varphi_1,\ \varphi_2)| + O(\sqrt{x}\ln x),$$

откуда

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)| \leqslant \frac{1}{\ln 2} \max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)| + O(\sqrt{T}\ln T). \tag{11.3}$$

Далее имеем:

$$\tilde{\Delta}(x) = \sum_{1\leqslant N(\alpha)\leqslant x}{}' \Lambda(\alpha) - x = 2\sum_{m=2}^{x} \Big(\pi(m) - \pi(m-1)\Big)\ln m - x + O(\sqrt{x}\ln x) =$$

$$= 2\sum_{m=2}^{x}\left(\Delta(m) + \int_2^m \frac{du}{\ln u} - \Delta(m-1) - \int_2^{m-1}\frac{du}{\ln u}\right)\ln m - \sum_{m=1}^{x} 1 + O(\sqrt{x}\ln x) =$$

$$= 2\sum_{m=2}^{x}\Big(\Delta(m) - \Delta(m-1)\Big)\ln m + 2\sum_{m=3}^{x}\left\{\int_{m-1}^{m}\frac{du}{\ln u} - \frac{1}{\ln m}\right\}\ln m + O(\sqrt{x}\ln x).$$

Но

$$\int_{m-1}^{m}\frac{du}{\ln u} \leqslant \frac{1}{\ln(m-1)}$$

и

$$\sum_{m=2}^{x}\Big(\Delta(m) - \Delta(m-1)\Big)\ln m = -\sum_{m=2}^{x}\Big(\ln m - \ln(m-1)\Big)\Delta(m) + \ln([x]+1)\Delta(x);$$

таким образом

$$|\tilde{\Delta}(x)| \leqslant \max_{1\leqslant m\leqslant x}|\Delta(m)| \cdot 2\ln(x+1) + 2\sum_{m=3}^{x}\left\{\frac{\ln m}{\ln(m-1)} - 1\right\} + O(\sqrt{x}\ln x) \leqslant$$

$$\leqslant 3\ln x \cdot \max_{1\leqslant m\leqslant x}|\Delta(m)| + \sum_{m=3}^{x}\frac{1}{m\ln m} + O(\sqrt{x}\ln x).$$

Отсюда

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\tilde{\Delta}(x)| \leqslant 3\ln T \max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)| + c_{46}\sqrt{T}\ln T. \tag{11.4}$$

В совокупности неравенства (11.3), (10.2) и (11.4) дают следующий результат:

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2)| \leqslant \frac{1}{\ln 2} T^{\delta(T)} e^{12\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} \max_{1\leqslant x\leqslant T}|\tilde{\Delta}(x)| + c_{46}\sqrt{T}\ln T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln 2} T^{\delta(T)} \ln T\, e^{12\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}\left\{3\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)| + c_{46}\sqrt{T}\right\} + c_{46}\sqrt{T} <$$

$$< T^{\delta(T)} e^{13\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}}\left\{\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)| + \sqrt{T}\right\},$$

который можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. *Пусть* $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ — *некоторый нуль функции Дедекинда с условиями*

$$\beta_0 = \varepsilon\,(\exp\sqrt{\ln\ln T}),\quad |\gamma_0| \leqslant \exp(\sqrt{\ln\ln T}),\quad \beta_0 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда для функций $\Delta(x)$ *и* $\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2)$, *определяемых равенствами* (11.1) *и* (11.2), *при условии*

$$T \geqslant \max\left(c_{25},\ \exp\exp\,(30\ln^2|\rho_0|)\right)$$

имеет место неравенство

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2)| < T^{\delta(T)} e^{13\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} \left\{\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\Delta(x)| + \sqrt{T}\right\},$$

где

$$\delta(T) \to 0,\quad T \to \infty.$$

Замечание. Если для всех функций $Z(s, \lambda^{4n})$ выполняется гипотеза Римана, то тогда $\delta(T) \equiv 0$ и имеют место оценки

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x, \varphi_1, \varphi_2)| < e^{12\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} \max_{1\leqslant x\leqslant T} |\tilde{\Delta}(x)|,$$

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2)| < e^{13\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} \left\{\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\Delta(x)| + \sqrt{T}\right\}.$$

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
12.IV.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Кубилюс. Распределение простых чисел гауссова поля в секторах и контурах. Ученые записки ЛГУ, сер. матем., № 137, 1950, 40—52.
2. J. Kubilius. Daugiamatės analizinės skaičių teorijos klausimais. Vilniaus Valst. Univ. Mokslo Darbai, IV tomas, 1955, 5—41.
3. Н. Г. Чудаков. Введение в теорию функций Дирихле. Гостехиздат, 1947.
4. S. Knapowski. On prime number in an aritmetical progression. Acta Arithmetika IV, 1957, 57—70.
5. W. Stas. Über einige Abschätzung in Idealklassen. Acta arithmetica, 1960, N 1, 1—10.
6. W. Stas. O pewnym oszacowaniu reszty w twierdzeniu o rozkładzie ideałów pierwszych. Prace Matematyczne V, 1961, 53—60.
7. P. Turán. Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, 1953.

GAUSO KŪNO PIRMINIŲ SKAIČIŲ ASIMPTOTINIO PASISKIRSTYMO DĖSNIO LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMAS

J. VAITKEVIČIUS

(Reziumė)

Gauso skaičių kūne nagrinėjamos funkcijos

$$\Delta(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\ln u}$$

ir

$$\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2) = \pi(x, \varphi_1, \varphi_2) - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\int_2^x \frac{du}{\ln u},$$

kur $\pi(x)$ ir $\pi(x, \varphi_2, \varphi_2)$ atitinkamai reiškia skaičių neasocijuotų pirminių Gauso skaičių visoje plokštumoie ir sektoriuje $\varphi_2 - \varphi_1$. Turano metodu išvedama teorema: tegul $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ yra kuri nors Dedekindo Z—funkcijos nulinė vieta, tenkinanti sąlygas

$$\beta_0 = \varepsilon(\exp\sqrt{\ln\ln T}), \quad \beta_0 \geqslant \frac{1}{2}, \quad |\gamma_0| \leqslant \exp(\sqrt{\ln\ln T}).$$

Jeigu

$$T \geqslant \max\left(c_{25}, \exp\exp(30\ln^2|\rho_0|)\right),$$

tai

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2)| < T^{\delta(T)} e^{13\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} \cdot \left\{\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)| + \sqrt{T}\right\},$$

kur $\delta(T) \to 0$, kai $T \to \infty$.

EINE ABSCHÄTZUNG DES RESTGLIEDES IM PRIMZAHLSATZ DES GAUSSSCHEN ZAHLENKÖRPERS

J. VAITKEVIČIUS

(*Zusammenfassung*)

Es werden im gegebenen Artikel die Funktionen

$$\Delta(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\ln u}$$

und

$$\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2) = \pi(x, \varphi_1, \varphi_2) - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\int_2^x \frac{du}{\ln u}$$

betrachtet, wo $\pi(x)$ und $\pi(x, \varphi_1 \varphi_2)$ die Anzahl aller Gaussschen Primzahlen und Primzahlen in dem Sektor φ_2—φ_1 bedeuten. Es wird nach der Methode von P. Turán der folgende Satz bewiesen: wenn Dedekindsche Zeta-Funktion für $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ mit Bedingungen

$$\beta_0 = \varepsilon(\exp\sqrt{\ln\ln T}), \quad \beta_0 \leqslant \frac{1}{2}, \quad |\gamma_0| \leqslant \exp(\sqrt{\ln\ln T})$$

verschwindet und

$$T \geqslant \max\left((c_{25}, \exp\exp 30\ln^2|\rho_0|)\right),$$

dann gilt die Abschätzung

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x, \varphi_1, \varphi_2)| < T^{\delta(T)} e^{13\frac{\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}} \left\{\max_{1\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)| + \sqrt{T}\right\},$$

wo $\delta(T) \to 0$, $T \to \infty$.