II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Р. ВОСИЛЮС

1. Аппарат исследования. Присоединим к каждой точке поверхности отрицательной гауссовой кривизны репер, образованный нормалью e_3 и касательным к асимптотическим линиям e_1 и e_2. Если векторы e_i единичные, а φ — угол между асимптотическими линиями поверхности, то

$$(e_i)^2=1, \quad e_1e_2=\cos\varphi, \quad e_1e_3=e_2e_3=0,$$
$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3).$$

Так как деривационные уравнения подвижного репера имеют вид [1]:

$$dM=\omega^i e_i, \quad de_i=\omega_i^j e_j,$$

причем формы Пфаффа ω^i и ω_i^j связаны структурными уравнениями евклидова пространства

$$D\omega^i=[\omega^k\omega_k^i], \quad D\omega_j^i=[\omega_j^k\omega_k^i],$$

то дифференциальные уравнения поверхности можно записать так:

$$(1)\quad \begin{cases} \omega^3=\omega_3^3=0, \quad \omega_1^3=\lambda\omega^2, \quad \omega_2^3=\lambda\omega^1, \quad \omega_3^1=\dfrac{\lambda}{\sin^2\varphi}(\omega^1\cos\varphi-\omega^2), \\ \omega_3^2=\dfrac{\lambda}{\sin^2\varphi}(\omega^2\cos\varphi-\omega^1), \quad \omega_1^2=a\omega_1-\xi\omega^2, \quad \omega_2^1=-\eta\omega^1+b\omega^2, \\ \omega_1^1=(-a\omega^1+\xi\omega^2)\cos\varphi, \quad \omega_2^2=(\eta\omega^1-b\omega^2)\cos\varphi, \\ d\ln\lambda=[(\eta-a)\cos\varphi+2\xi]\,\omega^1+[(\xi-b)\cos\varphi+2\eta]\,\omega^2, \\ d\varphi=[(\eta-a)\,\omega^1+(\xi-b)\,\omega^2]\sin\varphi, \\ d\xi=\left(a\eta-a\xi\cos\varphi-\dfrac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}+\alpha\right)\omega^1+\left(\xi^2\cos\varphi-ab+\dfrac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}\cos\varphi+\beta\right)\omega^2, \\ d\eta=\left(\eta^2\cos\varphi+\dfrac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}\cos\varphi-ab+\beta\right)\omega^1+\left(b\xi-\eta b\cos\varphi-\dfrac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}+\gamma\right)\omega^2, \\ da=(\varepsilon-2a^2\cos\varphi-a\xi-a\eta\cos\varphi)\,\omega^1+(2a\xi\cos\varphi+\xi^2+ab\cos\varphi+\alpha)\,\omega^2, \\ db=(\gamma+2b\eta\cos\varphi+ab\cos\varphi+\eta^2)\,\omega^1+(\nu-2b^2\cos\varphi-b\eta-b\xi\cos\varphi)\,\omega^2. \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda\neq 0,$$

т. е. что поверхность не является плоскостью.

Системы величин

$$\lambda; \ (\lambda,\ \eta,\ \xi,\ a,\ b); \ (\lambda,\ \eta,\ \xi,\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \nu)$$

определяют соответственно вторую, третью и четвертую дифференциальную окрестность поверхности.

В данной системе координат элементы матриц

$$\|g_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \|a_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{matrix} \right\|$$

являются коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности, а гауссовая и средняя кривизны имеют следующий вид:

$$K = -\frac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}, \quad H = \frac{\lambda\cos\varphi}{\sin^2\varphi}. \tag{2}$$

Дифференцируя эти уравнения, получаем:

$$dK = 4K(\xi\omega^1 + \eta\omega^2),$$

$$dH = K[(\eta + 2\xi - a)\,\omega^1 + (\xi + 2\eta - b)\,\omega^2].$$

Если определитель

$$\mathfrak{w} = \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(dK)}{\partial\omega^1} & \dfrac{\partial(dK)}{\partial\omega^2} \\ \dfrac{\partial(dH)}{\partial\omega^1} & \dfrac{\partial(dH)}{\partial\omega^2} \end{vmatrix}$$

равен нулю (поверхность является вейнгартеновой), то

$$\xi(\xi - b) - \eta(\eta - a) = 0. \tag{3}$$

Наконец, дифференциальное уравнение линий кривизны поверхности имеет вид:

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0.$$

2. Соприкасающиеся квадрики, аффинная и проективная нормали поверхности. Уравнение квадрики

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{0i}x^i + a_{00} = 0$$

можно записать следующим образом:

$$\alpha(\boldsymbol{RR}) + 2\alpha(\boldsymbol{MR}) + \alpha(\boldsymbol{MM}) = 0, \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{R} = x^i \boldsymbol{e}_i, \quad \alpha(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) = \alpha(\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i) = a_{ij},$$

$$\alpha(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{e}_i) = a_{0i}, \quad \alpha(\boldsymbol{MM}) = a_{00}.$$

Если $\alpha(\boldsymbol{MM}) = 0$, то точка $\boldsymbol{M}$ рассматриваемой поверхности принадлежит квадрике (4). Дифференцируя дважды это равенство, получаем:

$$\alpha(\boldsymbol{Me}_1) = \alpha(\boldsymbol{Me}_2) = 0, \quad \alpha(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1) = \alpha(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2) = 0,$$

$$\alpha(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) + \lambda\,\alpha(\boldsymbol{Me}_3) = 0.$$

Пучок соприкасающихся квадрик поверхности имеет вид:

$$2\left(\frac{x^3}{\lambda} - x^1x^2\right) + 2ux^2x^3 + 2vx^1x^3 + t(x^3)^2 = 0,$$

где u, v и t — произвольные параметры.

Линиями Дарбу на поверхности называются такие линии, вдоль которых соприкасающиеся квадрики имеют касание с поверхностью третьего порядка. Выполняя вычисления (как и в [3]), получаем, что дифференциальное уравнение линий Дарбу на поверхности имеет такой вид:

$$a(\omega^1)^3 + b(\omega^2)^3 = 0.$$

Уравнение квадрик Дарбу [3] в нашем случае можно записать так:

$$2\lambda x^1 x^2 + 2\eta x^2 x^3 + 2\xi x^1 x^3 - 2x^3 + t (x^3)^2 = 0.$$

Из однопараметрического пучка квадрик Дарбу выделяется квадрика Ли [3]:

$$2\lambda x^1 x^2 + 2\eta x^2 x^3 + 2\xi x^1 x^3 - 2x^3 + \frac{\beta - ab}{\lambda} (x^3)^2 = 0.$$

Прямая, соединяющая центр квадрики Ли с точкой M поверхности, называется аффинной нормалью, единичный вектор которой:

$$n = \frac{\eta e_1 + \xi e_2 - \lambda e_3}{\sqrt{q}}, \tag{5}$$

где

$$q = \eta^2 + \xi^2 + 2\eta\xi \cos\varphi + \lambda^2 \neq 0.$$

Дифференцируя уравнение (5), получаем:

$$dn = \frac{1}{q\sqrt{q}} \Big\{ [(CP + BQ\eta)\,\omega^1 - (CQ\eta + AP)\,\omega^2]\, e_1 + [(CR +$$

$$+ AS\xi)\,\omega^2 - (CS\xi + BR)\,\omega^1]\, e_2 + \lambda [(CS - BQ)\,\omega^1 + (CQ - AS)\,\omega^2]\, e_3 \Big\}, \tag{6}$$

где

$$A = \eta^2 - 2b\xi - \gamma, \qquad P = \xi^2 + \eta\xi\cos\varphi + \lambda^2,$$

$$B = \xi^2 - 2a\eta - \alpha, \qquad R = \eta^2 + \eta\xi\cos\varphi + \lambda^2,$$

$$C = \beta - ab - 2\eta\xi, \qquad Q = \xi + \eta\cos\varphi, \quad S = \eta + \xi\cos\varphi.$$

Аффинной нормалией линии на поверхности назовем линейчатую поверхность, образованную аффинными нормалями к поверхности, проведенными через точки этой линии. Тогда характеристическим свойством аффинных линий кривизны является то, что их аффинная нормалия — развертывающаяся поверхность. Дифференциальное уравнение аффинных линий кривизны имеет вид:

$$A (\omega^1)^2 - B (\omega^2)^2 = 0. \tag{7}$$

Квадратичное уравнение, корни которого определяют абсцисы фокусов конгруэнции аффинных нормалей, можно записать так:

$$\rho^2 q + 2\rho C \sqrt{q} + (C^2 - AB) = 0.$$

Отсюда следует, что полная аффинная и средняя аффинная кривизна поверхности определяются формулами:

$$\tilde{K} = \frac{C^2 - AB}{q}, \quad \tilde{H} = -\frac{C}{\sqrt{q}}. \tag{8}$$

Уравнение линейного комплекса можно записать так:

$$t^{01} p^{23} + t^{02} p^{31} + t^{03} p^{12} + t^{12} p^{03} + t^{13} p^{02} + t^{23} p^{01} = 0,$$

где p^{ik} — плюкеровы координаты прямой, т. е. миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} x^0 = 1 & x^1 & x^2 & x^3 \\ y^0 = 0 & y^1 & y^2 & y^3 \end{Vmatrix}.$$

Линейный комплекс, проходящий через пять бесконечно близких касательных асимптотической линии $\omega^2 = 0$, называется соприкасающимся комплексом этой линии. Оказывается, что соприкасающиеся линейные комплексы линий $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$ определяются соответственно следующими уравнениями:

(9) $$(B+a\eta)p^{23}+a\xi p^{31}-a\lambda p^{12}+ap^{03}=0,$$

(10) $$(A+b\xi)p^{31}-b\eta p^{23}+b\lambda p^{12}+bp^{03}=0.$$

В пучке линейных комплексов, базисными комплексами которого являются комплексы (9) и (10), имеются два специальных комплекса, коэффициенты уравнений которых удовлетворяют условию Плюкера. Уравнения специальных комплексов следующие:

$$b(B+2a\eta)p^{23}+a(A+2b\xi)p^{31}-2ab\lambda p^{12}=0,$$

$$bBp^{23}-aAp^{31}+2abp^{03}=0.$$

Оси этих специальных комплексов называются, соответственно, первой и второй директрисами Вильчинского рассматриваемой поверхности. Оказывается, что первая директриса Вильчинского проходит через точку $\boldsymbol{M}$, а её направляющий вектор $\boldsymbol{R}_1$ определяется равенством:

$$\boldsymbol{R}_1=b(B+2a\eta)\boldsymbol{e}_1+a(A+2b\xi)\boldsymbol{e}_2-2ab\lambda\boldsymbol{e}_3.$$

Вторая директриса Вильчинского лежит в касательной плоскости поверхности и непроходит через точку $\boldsymbol{M}$. Вектор

$$\boldsymbol{R}_2=bB\boldsymbol{e}_1-aA\boldsymbol{e}_2$$

является направляющим вектором второй директрисы Вильчинского.

3. **Некоторые классы поверхностей.** Из (7) следует, что аффинные линии кривизны поверхности в общем случае не ортогональны. Если аффинные линии кривизны ортогональные, то они совпадают с метрическими линиями кривизны. Поверхности, обладающие этим свойством, характеризуются условием:

(11) $$A=B\neq 0,$$

причём неравенство исключает из рассмотрения аффинные сферы.

Конгруэнция аффинных нормалей, как это следует из (6) в общем случае не является нормальной. Конгруэнция аффинных нормалей является нормальной тогда и только тогда, когда

$$(A-B)K-A\xi^2+B\eta^2=0.$$

Отсюда следует, что конгруэнция аффинных нормалей поверхности, для которой $A=B\neq 0$, является нормальной тогда и только тогда, когда плоскость, проходящая через метрическую и аффинную нормали поверхности содержит бисектрису угла между асимптотическими линиями поверхности.

Хорошо известно, что все проективные нормали поверхности лежат в одной плоскости. Оказывается, что в общем случае метрическая и аффинная нормали поверхности вместе с первой директрисой Вильчинского не лежат в одной плоскости. Класс поверхностей, для которых эти нормали лежат в одной плоскости, характеризуются условием:

$$Aa\eta-Bb\xi=0.$$

Поверхности этого класса являются поверхностями Вейнгартена тогда и только тогда, когда конгруэнции их аффинных нормалей нормальны.

В частности, если нормали поверхности лежат в одной плоскости, то вторая директриса Вильчинского ортогональна этой плоскости в том и только в том случае, когда она совпадает с бисектрисой угла между асимптотическими линиями поверхности.

Поверхности постоянной Гауссовой кривизны являются частным случаем поверхностей (11). Если $K=\text{const.}$, то

$$\eta=\xi=0$$

и, в силу (5), получаем, что метрические и аффинные нормали поверхности совпадают [2]. Так как

$$d\eta=d\xi=0,$$

то из уравнений (1) получаем:

$$\alpha=\gamma=\frac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}, \quad \beta=ab-\frac{\lambda^2}{\sin^2\varphi}\cos\varphi,$$

или —

$$\tilde{K}=K, \quad \tilde{H}=H,$$

т. е. аффинные и метрические кривизны поверхности совпадают. Следует заметить, что из равенства $\tilde{K}=K$, $\tilde{H}=H$ не вытекает равенство $K=\text{const.}$

Если поверхность постоянной кривизны, то векторы

$$\boldsymbol{R}_1=b\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{R}_2=b\boldsymbol{e}_1-a\boldsymbol{e}_2$$

($\boldsymbol{R}_1$ — направляющий вектор ортогональной проекции первой директрисы Вильчинского на касательную плоскость поверхности, $\boldsymbol{R}_2$ направляющий вектор второй директрисы Вильчинского) обгибают на поверхности сопряжённую сеть кривых

$$a^2(\omega^1)^2-b^2(\omega^2)^2=0. \tag{12}$$

Метрическая и аффинная нормали поверхности сопряжены относительно квадрики Ли тогда и только тогда, когда

$$\beta=ab-2\eta\xi,$$

т. е. когда поверхность является аффинно-минимальной.

Если первая директриса Вильчинского совпадает с метрической нормалью поверхности, то

$$\alpha=\xi^2, \quad \gamma=\eta^2$$

и направляющий вектор второй директрисы $\boldsymbol{R}_2$ и ортогональная проекция аффинной нормали $\boldsymbol{r}=\eta\boldsymbol{e}_1+\xi\boldsymbol{e}_2$ огибают на поверхности сопряженную сеть линий

$$\xi^2(\omega^1)^2-\eta^2(\omega^2)^2=0. \tag{13}$$

Оказывается, что линии сетей (12) и (13) ортогональны тогда и только тогда, когда они совпадают с линиями кривизны поверхности. Если нормали поверхности (11) лежат в одной плоскости, то линии (12) и (13) совпадают.

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
8.VI.1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948.
2. П. А. Широков, и А. П. Широков, Аффинная дифференциальная геометрия, Москва, 1959.
3. Р. Н. Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск, 1960.

KAI KURIE PAVIRŠIŲ TEORIJOS KLAUSIMAI

R. VOSYLIUS

(Reziumė)

Darbe yra nagrinėjamos trimatės euklidinės erdvės neigiamo Gauso kreivumo paviršių savybės, susietos su jo metrinių, afininių ir projektyvinių normalių (Vilčinskio direktrisių) kongruencijų struktūra ir tarpusavio sąryšiais.

Surastos kai kurios paviršių su sutampančiais metrinių ir afininių kreivumo linijų tinklais savybės. Darbas atliktas išorinių formų metodu.

EINIGE FRAGEN DER FLÄCHENTHEORIE

R. VOSYLIUS

(Zusammenfassung)

In der Abhandlung werden die Eigenschaften der Flachen mit negativer Gaussschen Krümmung im dreidimensionalen Euklidischen Raum untersucht, die mit Struktur metrischer, affiner und projektiver Normalkongruenzen (Dierectrix von Wilczinski) und deren Zusammenhänge verbunden sind. Es sind einige Eigenschaften der Flachen gefunden, deren metrischer Netz von Krümmungslinien mit dem affinen zusammenfällt.

Die Arbeit ist mit Hilfe der Methode äusserer Formen von Cartan durchgeführt.