II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КОМПОЗИЦИИ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПУАССОНОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

С идеями и основными результатами теории восстановления можно познакомиться по книге В. Феллера (гл. XIII) [1] и по обзорной статье В. Л. Смита [2]. Эта работа была вызвана желанием изучить закономерности потока отказов сложных систем — одного из важных вопросов теории надежности.

Случайный процесс $\{X(t),\ t\in(0,\ \infty)\}$ называем процессом восстановления типа $\left(\hat{F}(x),\ F(x)\right)$, если существует последовательность независимых неотрицательных случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ таких, что $\mathbf{P}\{\xi_1<x\}=\hat{F}(x)$, $\mathbf{P}\{\xi_k<x\}=F(x)$ $(k=2,\ 3,\ \ldots)$ и $X(t)$ равно максимальному значению n, для которого $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k<t$.

Пусть $X_n(t)=\sum\limits_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t)$, где $X_{nr}(t)$ — независимые процессы восстановления типа $\left(\hat{F}_{nr}(x),\ F_{nr}(x)\right)$.

В работе [3] доказано, что если при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}F_{nr}(t)=0, \tag{1}$$

то для сходимости последовательности $\{X_n(t)\}$ к процессу Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\Lambda(t). \tag{2}$$

Физический смысл этого результата следующий. Пусть имеем какую-то систему, состоящую из k_n элементов, которые в случайные моменты времени выходят из строя и немедленно заменяются новыми; $\hat{F}_{nr}(x)$ и $F_{nr}(x)$ — функции распределения длительности исправной работы соответственно начального и нового r-того элемента. Тогда процессу $X_{nr}(t)$ будет соответствовать число замен или восстановлений r-того элемента до момента времени t, а $X_n(t)$ – общее число восстановлений в системе за промежуток времени $(0, t)$. Если отдельно взятые элементы за фиксированное время выходят из строя с малой вероятнотью (условие (1)), то при условии (2) процесс $X_n(t)$ будет близок к процессу Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$, т. е. к процессу с независимыми приращениями, распределенными по пуассоновскому закону:

$$\mathbf{P}\{X(t)-X(u)=k\}=e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(u))}\,\frac{[\Lambda(t)-\Lambda(u)]^k}{k!}.$$

В настоящей работе рассмотрен вопрос о точности приближения многомерных распределений процесса $X_n(t)$ соответствующими пуассоновскими распределениями.

Будем пользоваться обозначениями работы [4]. Кроме того, обозначим:

$$X_{nr}(T)=\left(X_{nr}(t_1),\ X_{nr}(t_2)-X_{nr}(t_1),\ \ldots,\ X_{nr}(t_s)-X_{nr}(t_{s-1})\right),$$

$$X_n(T)=\sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(T),\quad p_{nr}(m,\ T)=\mathbf{P}\{X_{nr}(T)=m\},\quad P_n(m,\ T)=\mathbf{P}\{X_n(T)=m\},$$

где $m=(m_1, \ldots, m_s)$, $m_\nu \geqslant 0$ – целые числа, $T=(t_0=0,\ t_1, \ldots, t_s)$ $(0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_s)$ – набор действительных чисел;

$$\lambda_n(\nu,\ T)=\sum_{r=1}^{k_n}\left[\hat{F}_{nr}(t_\nu)-\hat{F}_{nr}(t_{\nu-1})\right],$$

$$a_{\mu\nu}(n,\ T)=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n}\left[\hat{F}_{nr}(t_\mu)-\hat{F}_{nr}(t_{\mu-1})\right]\left[\hat{F}_{nr}(t_\nu)-\hat{F}_{nr}(t_{\nu-1})\right],$$

$$c_{\mu\nu}(n,\ T)=\sum_{r=1}^{k_n}\int_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\left[F_{nr}(t_\nu-u)-F_{nr}(t_{\nu-1}-u)\right]dF_{nr}(u).$$

Теорема. *Имеет место следующее разложение:*

$$P_n(m,\ T)=\Pi\left(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\right)+\sum_{\nu=1}^{s}\left(\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)\right)\Pi_{e_\nu}\left(m,\ \lambda_n(T)\right)+$$
$$+\sum_{\mu,\ \nu=1}^{s} a_{\mu\nu}(n,\ T)\,\Pi_{e_\mu e_\nu}\left(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\right)+\sum_{\substack{\mu,\ \nu=1\\ \mu\leqslant\nu}}^{s} c_{\mu\nu}(n,\ T)\,\Pi_{e_\nu}\left(m-e_\mu,\ \hat{\lambda}_n(T)\right)+$$
$$+R_n(m,\ T),$$

где

$$\left|R_n(m,\ T)\right|\leqslant C\Big[\Big(\sum_{\nu=1}^{s}\left|\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)\right|\Big)^2+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}^2_{nr}(t_s)\Big)^2+$$
$$+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t_s)\Big)^2+\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t_s)\left(\hat{F}^2_{nr}(t_s)+F^2_{nr}(t_s)\right)\Big],$$

C – константа, независящая от n и m,

$\hat{\lambda}_n(T)=\left(\hat{\lambda}_n(1,\ T), \ldots, \hat{\lambda}_n(s,\ T)\right)$ – *произвольный вектор с неотрицательными компонентами.*

Предварительно докажем несколько простых лемм о произвольном процессе восстановления $X(t)$ типа $\left(\hat{F}(x),\ F(x)\right)$.

Пусть

$$X(T)=\left(X(t_1),\ X(t_2)-X(t_1),\ \ldots,\ X(t_s)-X(t_{s-1})\right),$$

$$p(m,\ T)=\mathbf{P}\left\{X(T)=m\right\}.$$

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

$$p(0,\ T)=1-\hat{F}(t_s),$$

$$p(e_\nu,\ T)=\hat{F}(t_\nu)-\hat{F}(t_{\nu-1})-\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} F(t_s-u)\,d\hat{F}(u).$$

Доказательство. Имеем, что

$$p(0,\ T)=\mathbf{P}\left\{X(T)=0\right\}=\mathbf{P}\left\{X(t_s)=0\right\}=\mathbf{P}\left\{\xi_1\geqslant t_s\right\}=1-\hat{F}(t_s),$$

$$p(e_\nu,T)=\mathbf{P}\left\{X(t_{\nu-1})=0,\ X(t_\nu)-X(t_{\nu-1})=1,\ X(t_s)-X(t_\nu)=0\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{t_{\nu-1}\leqslant\xi_1<t_\nu,\ \xi_1+\xi_2\geqslant t_s\right\}=\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}\int\limits_{t_s-u_1}^{\infty} dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1)=$$

$$=\hat{F}(t_\nu)-\hat{F}(t_{\nu-1})-\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} F(t_s-u)\,d\hat{F}(u).$$

Лемма 2. *При* $\mu<\nu$ *имеет место формула:*

$$p(e_{\mu\nu},\ T)=\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\left[F(t_\nu-u)-F(t_{\nu-1}-u)\right]d\hat{F}(u)-$$

$$-\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\int\limits_{t_{\nu-1}-u_1}^{t_\nu-u_1} F(t_s-u_1-u_2)\,dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1).$$

Доказательство. Имеем:

$$p(e_{\mu\nu},\ T)=\mathbf{P}\Big\{X(t_{\mu-1})=0,\ X(t_\mu)-X(t_{\mu-1})=1,\ X(t_{\nu-1})-X(t_\mu)=0,$$

$$X(t_\nu)-X(t_{\nu-1})=1,\ X(t_s)-X(t_\nu)=0\Big\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{t_{\mu-1}\leqslant\xi_1<t_\mu,\ t_{\nu-1}\leqslant\xi_1+\xi_2<t_\nu,\ \xi_1+\xi_2+\xi_3\geqslant t_s\right\}=$$

$$=\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\int\limits_{t_{\nu-1}-u_1}^{t_\nu-u_1}\int\limits_{t_s-u_1-u_2}^{\infty} dF(u_3)\,dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1)=$$

$$=\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\left[F(t_\nu-u)-F(t_{\nu-1}-u)\right]d\hat{F}(u)-\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\int\limits_{t_{\nu-1}-u_1}^{t_\nu-u_1} F(t_s-u_1-u_2)\,dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1).$$

Лемма 3. *Верно соотношение:*

$$p(e_{\mu\mu},\ T)=\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu} F(t_\mu-u)\,d\hat{F}(u)-\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\int\limits_{0}^{t_\mu-u_1} F(t_s-u_1-u_2)\,dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1).$$

Действительно,

$$p(e_{\mu\mu},\ T)=\mathbf{P}\left\{X(t_{\mu-1})=0,\ X(t_\mu)-X(t_{\mu-1})=2,\ X(t_s)-X(t_\mu)=0\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{\xi_1\geqslant t_{\mu-1},\ \xi_1+\xi_2<t_\mu,\ \xi_1+\xi_2+\xi_3\geqslant t_s\right\}=$$

$$=\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\int\limits_{0}^{t_\mu-u_1}\int\limits_{t_s-u_1-u_2}^{\infty} dF(u_3)\,dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1)=$$

$$=\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu} F(t_\mu-u)\,d\hat{F}(u)-\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\int\limits_{0}^{t_\mu-u_1} F(t_s-u_1-u_2)\,dF(u_2)\,d\hat{F}(u_1).$$

Лемма 4. *Имеем:*

$$\mathbf{P}\left\{X(t)\geqslant 2\right\}=\int\limits_{0}^{t} F(t-u)\,d\hat{F}(u)=\hat{F}(t)\ *\ F(t),$$

$$\mathbf{P}\left\{X(t)\geqslant 3\right\}=\hat{F}(t)*F(t)*F(t).$$

В самом деле,

$$\mathbf{P}\left\{X(t)\geqslant 2\right\}=\mathbf{P}\left\{\xi_1+\xi_2<t\right\}=\hat{F}(t)*F(t),$$

$$\mathbf{P}\left\{X(t)\geqslant 3\right\}=\mathbf{P}\left\{\xi_1+\xi_2+\xi_3<t\right\}=\hat{F}(t)*F(t)*F(t).$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Применяем следствие работы [4], где полагаем $\hat{\lambda}_n=\hat{\lambda}_n(T)$. Ввиду лемм 1–4, находим, что

$$\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(e_\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)=\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)-\sum_{r=1}^{k_n}\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} F_{nr}(t_s-u)\,d\hat{F}_{nr}(u),$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(e_\mu,\ T)\,p_{nr}(e_\nu,\ T)-a_{\mu\nu}(n,\ T)\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}^2_{nr}(t_s)\,F_{nr}(t_s),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n} p_{nr}(e_{\mu\nu},\ T)-c_{\mu\nu}(n,\ T)\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t_s)F^2_{nr}(t_s),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n}\left(1-p_{nr}(\mathbf{0},\ T)\right)^3=\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}^3_{nr}(t_s),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n}\Big(1-p_{nr}(0,\ T)-\sum_{\nu=1}^{s}p_{nr}(e_\nu,\ T)\Big)=\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\Big\{X_{nr}(t_s)\geqslant 2\Big\}=\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t_s)*F_{nr}(t_s),$$

$$\sum_{r=1}^{k_n}\sum_{\nu=1}^{s}p_{nr}(e_\nu,\ T)\Big(1-p_{nr}(0,\ T)-\sum_{\mu=1}^{s}p_{nr}(e_\mu,\ T)\Big)=$$

$$=\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\Big\{X_{nr}(t_s)\geqslant 2\Big\}\sum_{\nu=1}^{s}p_{nr}(e_\nu,\ T)\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}^2(t_s)F_{nr}(t_s)$$

и, наконец,

$$\sum_{r=1}^{k_n}\Big(1-p_{nr}(0,\ T)-\sum_{\nu=1}^{s}p_{nr}(e_\nu,\ T)-\sum_{\substack{\mu,\ \nu=1\\ \mu\leqslant\nu}}^{s}p_{nr}(e_{\mu\nu},\ T)\Big)=$$

$$=\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\Big\{X_{nr}(t_s)\geqslant 3\Big\}\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t_s)F_{nr}^2(t_s).$$

Тогда по упомянутому следствию получаем, что

$$\mathbf{P}_n(m,\ T)=\Pi\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+\sum_{\nu=1}^{s}\Big(\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)\Big)\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{s}\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}F_{nr}(t_s-u)\,d\hat{F}_{nr}(u)\Big)\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+$$

$$+\sum_{\mu,\ \nu=1}^{s}a_{\mu\nu}(n,\ T)\,\Pi_{e_\mu e_\nu}(m,\ T)+\sum_{\substack{\mu,\ \nu=1\\ \mu\leqslant\nu}}^{s}c_{\mu\nu}(n,\ T)\,\Pi_{e_{\mu\nu}}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+R_n(m,\ T),$$

где

$$\Big|\,R_n(m,\ T)\,\Big|\leqslant C\Big\{\Big(\sum_{\nu=1}^{s}\Big|\,\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)\Big|\Big)^2+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}^2(t_s)\Big)^2+$$

$$+\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t_s)*F_{nr}(t_s)\Big)^2+\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t_s)\Big[\hat{F}_{nr}^2(t_s)+F_{nr}^2(t_s)\Big]\Big\}.$$

Так как

$$\sum_{r=1}^{k_n}\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}F_{nr}(t_s-u)\,d\hat{F}_{nr}(u)=\sum_{r=1}^{k_n}\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}\sum_{\mu=1}^{s}\Big(F_{nr}(t_\mu-u)-F_{nr}(t_{\mu-1}-u)\Big)d\hat{F}_{nr}(u)=$$

$$=\sum_{\mu=\nu}^{s}\sum_{r=1}^{k_n}\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}\Big[F_{nr}(t_\mu-u)-F_{nr}(t_{\mu-1}-u)\Big]d\hat{F}_{nr}(u)=\sum_{\mu=\nu}^{s}c_{\nu\mu}(n,\ T)$$

и

$$\Pi_{e_{\mu\nu}}(m,\ \lambda)=\Pi_{e_\nu}(m-e_\mu,\ \lambda)+\Pi_{e_\mu}(m,\ \lambda),$$

то

$$\sum_{\nu=1}^{s}\Big(\sum_{r=1}^{k_n}\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}F_{nr}(t_s-u)\,d\hat{F}_{nr}(u)\Big)\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=\nu}^{s}c_{\nu\mu}(n,\ T)\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)=\sum_{\substack{\mu,\ \nu=1\\ \mu\leqslant\nu}}^{s}c_{\mu\nu}(n,\ T)\,\Pi_{e_\mu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)$$

и

$$P_n(m,\ T)=\Pi\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+\sum_{\nu=1}^{s}\Big(\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)\Big)\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+$$

$$+\sum_{\mu,\ \nu=1}^{s}a_{\mu\nu}(n)\,\Pi_{e_\mu e_\nu}\Big(m,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+\sum_{\substack{\mu,\ \nu=1\\ \mu\leqslant\nu}}^{s}c_{\mu\nu}(n,\ T)\,\Pi_{e_\nu}\Big(m-e_\mu,\ \hat{\lambda}_n(T)\Big)+R_n(m,\ T).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим примеры.

1. Пусть

$$\hat{F}_{nr}(x)=F_{nr}(x)=F(\lambda_{nr}x),$$

где

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \lambda_1 x+\lambda_2 x^2+O(x^3) & \text{при } x\to+0,\end{cases}$$

$\lambda_1,\ \lambda_2$ — некоторые константы ($\lambda_1>0$);

$$\lambda_{nr}>0,\quad \max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\lambda_{nr}\to 0\quad (n\to\infty).$$

Обозначив

$$\Lambda_n=\lambda_1\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}\quad \alpha_n=\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^2,\quad \beta_n=\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^3$$

и выбрав

$$\hat{\lambda}_n(T)=\Big(\Lambda_n t_1,\ \Lambda_n(t_2-t_1),\ \ldots,\ \Lambda_n(t_s-t_{s-1})\Big)=\Lambda_n(T),$$

находим, что

$$\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)=\lambda_2\alpha_n(t_\nu^2-t_{\nu-1}^2)+O(\beta_n),$$

$$a_{\mu\nu}(n,\ T)=-\frac{1}{2}\lambda_1^2\alpha_n(t_\mu-t_{\mu-1})(t_\nu-t_{\nu-1})+O(\beta_n),$$

$$c_{\mu\nu}(n,\ T)=\lambda_1^2\alpha_n(t_\mu-t_{\mu-1})(t_\nu-t_{\nu-1})+O(\beta_n),\quad (\mu<\nu),$$

$$c_{\mu\mu}(n,\ T)=\frac{1}{2}\lambda_1^2\alpha_n(t_\mu-t_{\mu-1})^2+O(\beta_n).$$

Тогда, пользуясь тем, что

$$\Pi_{e_\mu e_\nu}(m,\ \lambda)=\Pi_{e_\nu}(m-e_\mu,\ \lambda)-\Pi_{e_\nu}(m,\ \lambda),$$

по теореме имеем:

$$P_n(m,\ T)=\Pi\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+\lambda_2\alpha_n\sum_{\nu=1}^{s}(t_\nu^2-t_{\nu-1}^2)\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_1^2\alpha_n\sum_{\mu,\,\nu=1}^{s}(t_\mu-t_{\mu-1})(t_\nu-t_{\nu-1})\,\Pi_{e_\mu e_\nu}\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+$$

$$+\lambda_1^2\alpha_n\sum_{\substack{\mu,\,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{s}(t_\mu-t_{\mu-1})(t_\nu-t_{\nu-1})\,\Pi_{e_\nu}\Big(m-e_\mu,\ \Lambda_n(T)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_1^2\alpha_n\sum_{\nu=1}^{s}(t_\nu-t_{\nu-1})^2\,\Pi_{e_\nu}\Big(m-e_\nu,\ \Lambda_n(T)\Big)+O(\alpha_n^2+\beta_n)=$$

$$=\Pi\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+\lambda_2\alpha_n\sum_{\nu=1}^{s}(t_\nu^2-t_{\nu-1}^2)\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+$$

$$+\lambda_1^2\alpha_n\sum_{\substack{\mu,\,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{s}(t_\mu-t_{\mu-1})(t_\nu-t_{\nu-1})\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_1^2\alpha_n\sum_{\nu=1}^{s}(t_\nu-t_{\nu-1})^2\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+O(\alpha_n^2+\beta_n)=$$

$$=\Pi\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+\alpha_n\Big(\frac{\lambda_1^2}{2}+\lambda_2\Big)\sum_{\nu=1}^{s}(t_\nu^2-t_{\nu-1}^2)\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big)+O(\alpha_n^2+\beta_n).$$

При $\lambda_{nr}=\frac{1}{n}$ $(r=1,\ \dots,\ n)$ отсюда находим, что

$$\mathbf{P}_n(m,\ T)=\Pi\Big(m,\ \Lambda(T)\Big)+\frac{1}{n}\Big(\frac{\lambda_1^2}{2}+\lambda_2\Big)\sum_{\nu=1}^{s}(t_\nu^2-t_{\nu-1}^2)\,\Pi_{e_\nu}\Big(m,\ \Lambda(T)\Big)+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где

$$\Lambda(T)=(\lambda_1 t_1,\ \lambda_1(t_2-t_1),\ \dots,\ \lambda_1\Big(t_s-t_{s-1})\Big).$$

Когда $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, имеем, что $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}\lambda^2$ и $\frac{1}{2}\lambda_1^2+\lambda_2=0$. Таким образом, поправочный член исчезает, что и следовало ожидать, поскольку в этом случае процесс $X_n(t)$ является однородным пуассоновским процессом с параметром Λ_n и

$$P_n(m,\ T)\equiv\Pi\Big(m,\ \Lambda_n(T)\Big).$$

2. Пусть процессы $X_{nr}(t)\,(r=1,\ \dots,\ n)$ одинаково распределены и $\mathbf{M}X_{nr}(t)=\frac{\Lambda(t)}{n}$, где $\Lambda(t)$ — неубывающая непрерывная слева конечная функция такая, что $\Lambda(t)=0$ при $t\leqslant 0$ и в классе функций распределения при достаточно больших n существует решение уравнения

$$F_n(t)=\frac{\Lambda(t)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^t F_n(t-u)\,d\Lambda(u).$$

Тогда (см. [4]) $\hat{F}_{nr}(x)=F_{nr}(x)=F_n(x)$. Легко проверить, что при $n>\Lambda(t)$

$$F_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n^k}\Lambda^{*(k)}(t).$$

(Символ $*(k)$ обозначает k-кратную свертку.) Выбрав

$$\hat{\lambda}_n(T)=\Big(\Lambda(t_1),\ \Lambda(t_2)-\Lambda(t_1),\ \ldots,\ \Lambda(t_s)-\Lambda(t_{s-1})\Big)=\Lambda\ (\mathrm{T}),$$

находим, что

$$\lambda_n(\nu,\ T)-\hat{\lambda}_n(\nu,\ T)=-\frac{\Lambda^{*(2)}(t_\nu)-\Lambda^{*(2)}(t_{\nu-1})}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$a_{\mu\nu}(n,\ T)=-\frac{1}{2n}\Big(\Lambda(t_\mu)-\Lambda(t_{\mu-1})\Big)\Big(\Lambda(t_\nu)-\Lambda(t_{\nu-1})\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$c_{\mu\nu}(n,\ T)=\frac{1}{n}\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\Big[\Lambda(t_\nu-u)-\Lambda(t_{\nu-1}-u)\Big]d\Lambda(u)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и после некоторых преобразований

$$P_n(m,\ T)=\Pi\Big(m,\ \Lambda(T)\Big)-\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{s}\Big[\Big(\Lambda(t_\nu)-\Lambda(t_{\nu-1})\Big)^2-$$

$$-2\int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu}\Lambda(t_\nu-u)\,d\Lambda(u)\Big]\Pi_{e_\nu e_\nu}\Big(m,\ \Lambda(T)\Big)-\frac{1}{n}\sum_{\substack{\mu,\ \nu=1\\ \mu<\nu}}^{s}\Big[\Big(\Lambda(t_\mu)-\Lambda(t_{\mu-1})\Big)\times$$

$$\times\Big(\Lambda(t_\nu)-\Lambda(t_{\nu-1})\Big)-\int\limits_{t_{\mu-1}}^{t_\mu}\Big(\Lambda(t_\nu-u)-\Lambda(t_{\nu-1}-u)\Big)d\Lambda(u)\Big]\times$$

$$\times\Pi_{e_\mu e_\nu}\Big(m,\ \Lambda(T)\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

При $s=1$ и $t_1=t$ отсюда просто следует, что

$$P_n(m,t)=\Pi\Big(m,\ \Lambda(t)\Big)-\frac{1}{2n}\Big(\Lambda^2(t)-2\Lambda^{*(2)}(t)\Big)\Pi_{11}\Big(m,\ \Lambda(t)\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Более подробно последний случай изучался П. Франкеном.

В заключении хочу выразить искреннюю признательность Б. В. Гнеденко, прочитавшему рукопись этой заметки и давшему ценные советы.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
5.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. В Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1952.
2. В. Л. Смит. Теория восстановления и смежные с ней вопросы, Математика, 5:3 (1961), 95—150.
3. Б. Григелионис, Одна предельная теорема теории восстановления, Теория вер. и ее прим., VIII, 1 (1963).
4. Б. Григелионис. Уточнение многомерной предельной теоремы о сходимости к закону Пуассона, Литовский матем. сб., II, 2 (1962), 127—133.

APIE ATSTATYMO PROCESŲ KOMPOZICIJOS APROKSIMACIJOS PUASONO PROCESU TIKSLUMĄ

B. GRIGELIONIS

(R e z i u m ė)

Tegu $X_n(t)=\sum_{r=1}^{kn} X_{nr}(t)$, kur $X_{nr}(t)$ – nepriklausomi atstatymo procesai. Darbe nagrinėjamas proceso $X_n(t)$ daugiamačių pasiskirstymų aproksimacijos atitinkamais Puasono pasiskirstymais tikslumas.

ON ACCURACY OF THE POISSON APPROXIMATION OF SUPERPOSITION OF THE RENEWAL PROCESSES

B. GRIGELIONIS

(S u m m a r y)

Let $X_n(t)=\sum_{r=1}^{kn} X_{nr}(t)$, where $X_{nr}(t)$ are independed renewal processes. In the note accuracy of approach of multidimensional distributions of the process $X_n(t)$ by means of the corresponding Poisson ones is considered.