II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

К СТАТЬЕ „НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ H_δ ПРИ $\delta<1$"

В. КАБАЙЛА

В статье автора [1], при исследовании частного примера интерполяции в классе H_δ, $\delta<1$, — рассматривались функции $f(z)$ с наименьшей нормой в классе H_δ, интерполирующие в кратной точке $\lambda_1=\lambda_2=0$ значения $f(0)=1$, $f'(0)=c>0$, — была допущена ошибка. В настоящей заметке эта ошибка исправляется, при чем показывается, что допущенная ошибка не повлияла на результат исследования задачи. Полная формулировка задачи, обозначения и нумерация формул оставлены те же, как в [1].

В [1] указано, что искомая минимальная интерполирующая функция (т. е. интерполирующая функция с наименьшей нормой) в рассматриваемом случае имеет или вид

$$f(z)\equiv f_1(z,\ c)=A\,\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}(1-\bar{\alpha}z)^{\frac{2}{\delta}},\qquad |\alpha|<1, \tag{6}$$

или вид

$$f(z)\equiv f_2(z,\ c)=B\,(1-\bar{\beta}z)^{\frac{2}{\delta}},\qquad |\beta|\leqslant 1, \tag{7}$$

при чем из условий $f(0)=1$, $f'(0)=c$ получаются два значения для α в (6) (в дальнейшем обозначены α и α^*), одно значение параметра β и соответствующие значения A и B. Нормы функций f_1 и f_2 выражаются равенствами:

$$\|f_1(z,\ c)\|_{H_\delta}^{\delta}=(-\alpha)^{-\delta}(1+\alpha^2),$$

$$\|f_1^*(z,\ c)\|_{H_\delta}^{\delta}=(-\alpha^*)^{-\delta}(1+\alpha^{*2}),$$

$$\|f_2(z,\ c)\|_{H_\delta}^{\delta}=1+\beta^2,\qquad (\alpha,\ \alpha^*\ \text{и}\ \beta-\text{отрицательны}).$$

В случае, когда $2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}<c<\frac{2}{\delta}$, существуют две интерполирующие функции вида (6), именно $f_1(z,\ c)$ и $f_1^*(z,\ c)$, и одна функция вида (7). В статье [1] ошибочно утверждается, что норма $\|f_1\|_{H_\delta}$ — монотонно убывает при возрастании c (в действительности, она монотонно возрастает). Так как в случае $c=2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$ функция $f_2(z,\ c)$ является минимальной, а в случае $c=\frac{2}{\delta}$ функция $f_1(z,\ c)$ является единственной минимальной, то из соображений непрерывности норм (как функций от c) следует, что найдется одно или несколько значений $\tilde{c}$, $2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}} \leqslant \tilde{c} < \frac{2}{\delta}$, для которых $\|f_1(z, \tilde{c})\|_{H_\delta} = \|f_2(z, \tilde{c})\|_{H_\delta}$, т. е. для которых существуют две минимальные интерполирующие функции. Однако единственность такого значения $\tilde{c}$, при котором $\|f_1(z, \tilde{c})\|_{H_\delta} = \|f_2(z, c)\|_{H_\delta}$, теперь непосредственно не следует из непрерывности норм.

Покажем, что существует только одно значение $\tilde{c}$ с упомянутым свойством. Для этой цели заметим, что α, α^* и β выражается через c (см. [1]):

$$\alpha = -\frac{c\delta}{2(2-\delta)} + \sqrt{\left[\frac{c\delta}{2(2-\delta)}\right]^2 - \frac{\delta}{2-\delta}}, \tag{10}$$

$$\alpha^* = -\frac{c\delta}{2(2-\delta)} - \sqrt{\left[\frac{c\delta}{2(2-\delta)}\right]^2 - \frac{\delta}{2-\delta}}, \tag{11}$$

$$\beta = -\frac{c\delta}{2}. \tag{12}$$

Введем параметр t:

$$-\alpha^* = \sqrt{\frac{\delta}{2-\delta}}\, t.$$

Тогда

$$-\alpha = \sqrt{\frac{\delta}{2-\delta}} \cdot \frac{1}{t}$$

и

$$-\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\delta(2-\delta)}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

при чем когда c меняется от $2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$ до $\frac{2}{\delta}$, то t меняется соответственно в интервале от 1 до $\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$.

Оценим разность норм:

$$\|f_1\|^\delta_{H_\delta} - \|f_1^*\|^\delta_{H_\delta} = \delta^{1-\frac{\delta}{2}}(2-\delta)^{\frac{\delta}{2}}\left[\left(\frac{t^\delta}{\delta} + \frac{t^{\delta-2}}{2-\delta}\right) - \left(\frac{t^{-\delta}}{\delta} + \frac{t^{2-\delta}}{2-\delta}\right)\right] =$$

$$= \delta^{1-\frac{\delta}{2}}(2-\delta)^{\frac{\delta}{2}} \cdot \int\limits_{\frac{1}{t}}^{t} (x^{\delta-1} - x^{1-\delta})\, dx = \delta^{1-\frac{\delta}{2}}(2-\delta)^{\frac{\delta}{2}} \int\limits_1^t (x^{\delta-1} - x^{1-\delta})\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx < 0,$$

если $1 < t \leqslant \sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$. Следовательно функция $f_1^*(z, c)$ не является минимальной, когда $2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}} < c \leqslant \frac{2}{\delta}$.

Теперь сравним $\|f_1\|_{H_\delta}$ и $\|f_2\|_{H_\delta}$:

$$\|f_1\|^\delta_{H_\delta} - \|f_2\|^\delta_{H_\delta} = \varphi(t) = \left(\frac{2-\delta}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{2}}\left(t^\delta + \frac{\delta}{2-\delta}t^{\delta-2}\right) - 1 - \frac{\delta(2-\delta)}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2;$$

$$\varphi'(t) = \frac{\delta}{2t}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\psi(t),$$

где

$$\psi(t) = 2\left(\frac{2-\delta}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{2}} t^\delta - (2-\delta)(1+t^2);$$

$$\psi'(t) = 2\left(\frac{2-\delta}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{2}} \frac{\delta}{t^{1-\delta}} - 2(2-\delta)t < 0,$$

когда $t \geq 1$ и потому

$$\psi(t) < \psi(1) = 2(2-\delta)(M-1),$$

где

$$M = (2-\delta)^{\frac{\delta-2}{2}} \delta^{-\frac{\delta}{2}}.$$

Обозначим $\delta = 1 - x$. Тогда

$$M = (1+x)^{-\frac{1+x}{2}} (1-x)^{-\frac{1-x}{2}},$$

$$\ln M = -\frac{1+x}{2}\ln(1+x) - \frac{1-x}{2}\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)x^{2k} < 0,$$

потому $M<1$ и $\psi(t)<\psi(1)<0$. Таким образом $\varphi'(t)<0$ и в интервале $1 \leq t \leq \sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$ разность $\|f_1\|_{H_\delta}^{\delta} - \|f_2\|_{H_\delta}^{\delta} = \varphi(t)$ монотонно убывает. Так как в случае $c = 2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$ (т. е. в случае $t=1$) $\|f_2\|_{H_\delta} \leq \|f_1\|_{H_\delta}$, а в случае $c = \frac{2}{\delta}$ $\left(\text{т. е. } t = \sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}\right)$ $\|f_1\|_{H_\delta} < \|f_2\|_{H_\delta}$ (см. [1]), то $\varphi(1) \geq 0$, а $\varphi\left(\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}\right) < 0$. Потому в интервале $1 \leq t < \sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}}$ функция $\varphi(t)$ имеет единственный нуль, т. е. в интервале $2\sqrt{\frac{2-\delta}{\delta}} \leq c < \frac{2}{\delta}$ существует единственное значение $\tilde{c}$, для которого

$$\|f_1(z, \tilde{c})\|_{H_\delta} = \|f_2(z, \tilde{c})\|_{H_\delta}.$$

Таким образом, получен тот же результат как и в [1].

Вильнюсский гос. университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
7.II.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Кабайла. Некоторые задачи интерполяции в классе H_δ при $\delta<1$, „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного“, Москва, Физматгиз, 1961 (180—187).

DĖL STRAIPSNIO „KAI KURIE INTERPOLIACIJOS UŽDAVINIAI H_δ KLASĖJE, KAI $\delta<1$“

V. KABAILA

(Reziumė)

Autoriaus ankstyvesniame straipsnyje [1], nagrinėjant interpoliacinio uždavinio pavyzdį, buvo padaryta klaida. Šiame straipsnyje parodoma, kad padarytoji klaida neturi įtakos atlikto nagrinėjimo rezultatams.

ZUM BEITRAG „EINIGE INTERPOLATIONSAUFGABE IN DER KLASSE H_δ, $\delta<1$“

V. KABAILA

(Zusammenfassung)

Im veröffentlichten Beitrag [1] des Autors ist bei der Untersuchung eines Interpolationsbeispiels ein Rechenfehler gemacht worden. In der vorliegenden Untersuchung beweisen wir nun, dass der oben erwähnte Fehler auf die Ergebnisse des veröffentlichten Beitrags [1] keinen Einfluss ausgeübt hat.