II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

А. МАТУЛЯУСКАС

Под целочисленным представлением группы G понимается гомоморфизм этой группы в группу целочисленных унимодулярных матриц. В настоящее время полностью описаны представления циклических групп простого порядка ([1], [2]) и порядка четыре [3]. Представления остальных циклических групп до сих пор не были описаны.

В настоящей работе описываются все неразложимые представления циклической группы шестого порядка.

Дидерихсен [1] показал, что каждая квадратная целочисленная матрица P, удовлетворяющая условию $P^6=E$, унимодулярно подобна матрице

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{matrix} & A & B & C \\ \hline
 & \begin{matrix}-1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{matrix} & D & I \\ \hline
 & & \begin{matrix}\Gamma&&&\\&\Gamma&&\\&&\ddots&\\&&&\Gamma\end{matrix} & H \\ \hline
 & & & \begin{matrix}\Delta&&&\\&\Delta&&\\&&\ddots&\\&&&\Delta\end{matrix}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \}\,p \\[2em] \}\,q \\[2em] \}\,r \\[2em] \}\,s \end{array},$$

где $\Gamma=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$, а $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[\beta_{ik}]$, $C=[\gamma_{il}]$, $D=[\delta_{jk}]$, $I=[\varepsilon_{jl}]$, $H=[\eta_{kl}]$ – некоторые целочисленные матрицы соответствующих размеров. В решетке, натянутой на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q$,

$g_1, g_2, \ldots, g_{2r}, h_1, h_2, \ldots, h_{2s}$, эта матрица задает линейное преобразование

$$Le_i = e_i \quad (i=1, 2, \ldots, p),$$

$$Lf_j = -f_j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i \qquad (j=1, 2, \ldots, q),$$

$$\left.\begin{aligned} Lg_{2k-1} &= g_{2k} + \sum_{j=1}^{q} \delta_{j,\,2k-1} f_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,\,2k-1} e_i \\ Lg_{2k} &= -g_{2k-1} - g_{2k} + \sum_{j=1}^{q} \delta_{j,\,2k} f_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,\,2k} e_i \end{aligned}\right\} \quad (k=1, 2, \ldots, r),$$

$$\left.\begin{aligned} Lh_{2l-1} &= h_{2l} + \sum_{k=1}^{2r} \eta_{k,\,2l-1} g_k + \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_{j,\,2l-1} f_j + \sum_{i=1}^{p} \gamma_{i,\,2l-1} e_i \\ Lh_{2l} &= -h_{2l-1} + h_{2l} + \sum_{k=1}^{2r} \eta_{k,\,2l} g_k + \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_{j,\,2l} f_j + \sum_{i=1}^{p} \gamma_{i,\,2l} e_i \end{aligned}\right\} \quad (l=1, 2, \ldots, s).$$

Приведем матрицы A, B, C, D, I, H к простейшему виду.

1. Преобразованием базисных векторов

$$\begin{aligned} e'_i &= e_i \qquad (i=1, 2, \ldots, p), \\ f'_j &= f_j \qquad (j=1, 2, \ldots, q), \\ g'_k &= g_k \qquad (k=1, 2, \ldots, 2r), \\ h'_l &= h_l + \sum_{k=1}^{2r} \rho_{kl} g_k \qquad (l=1, 2, \ldots, 2s) \end{aligned}$$

можно коэффициенты при g'_k $(k=1, 2, \ldots, 2r)$ в разложении Lh'_{2l-1} сделать равными нулю, а в разложении Lh'_{2l} — равными либо нулю, либо единице. Для этого достаточно положить

$$\rho_{2k-1,\,2l-1} = \frac{2\eta_{2k-1,\,2l-1} - \eta_{2k-1,\,2l} - \eta_{2k,\,2l-1} + \eta_{2k,\,2l} - a + b}{2},$$

$$\rho_{2k-1,\,2l} = \frac{\eta_{2k-1,\,2l-1} + \eta_{2k-1,\,2l} - \eta_{2k,\,2l-1} + a}{2},$$

$$\rho_{2k,\,2l-1} = \frac{\eta_{2k-1,\,2l-1} - \eta_{2k-1,\,2l} + \eta_{2k,\,2l-1} - a}{2},$$

$$\rho_{2k,\,2l} = \frac{\eta_{2k-1,\,2l-1} + \eta_{2k,\,2l} + b}{2},$$

если

$$\eta_{2k-1,\,2l-1} - \eta_{2k,\,2l} \equiv b \pmod 2,$$

$$\eta_{2k-1,\,2l-1} - \eta_{2k-1,\,2l} + \eta_{2k,\,2l-1} \equiv a \pmod 2,$$

где a, b — наименьшие неотрицательные вычеты mod 2. Поэтому последующие преобразования проведем в предположении, что

$$\eta_{k,\,2l-1} = 0, \quad \eta_{k,\,2l} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad (k=1, 2, \ldots, 2r; \quad l=1, 2, \ldots, s).$$

Условимся также в дальнейшем новые базисные векторы обозначать теми же самыми буквами, что и векторы старого базиса.

Пусть $\eta_{2t-1,2u}=1$ $(1\leqslant t\leqslant r;\ 1\leqslant u\leqslant s)$. Положим

$$
\begin{aligned}
e_i' &= e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
f_j' &= f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
g_{2t-1}' &= (\eta_{2t,2u}-1)\,g_{2t-1}-g_{2t},\\
g_{2t}' &= g_{2t-1}+\eta_{2t,2u}g_{2t},\\
g_k' &= g_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r;\ \ k\neq 2t-1,\ 2t),\\
h_l' &= h_l \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ 2s).
\end{aligned}
$$

Теперь коэффициентом при g_{2t-1} в разложении Lh_{2u} будет нуль, а коэффициентом при g_{2t} — единица. Повторяя этот процесс, добьемся того, что $\eta_{2t-1,2u}=0$ для $t=1,\ 2,\ \ldots,\ r$. Заменив по формулам

$$
\begin{aligned}
e_i' &= e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
f_j' &= f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
g_{2t-1}' &= \sum_{k=1}^{r}\eta_{2k,2u}g_{2k-1},\\
g_{2t}' &= \sum_{k=1}^{r}\eta_{2k,2u}g_{2k},\\
g_k' &= g_k\,(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r;\ k\neq 2t-1,\ 2t),\\
&\left.\begin{aligned}
h_{2m-1}' &= h_{2m-1}+(\eta_{2t-1,2m}-\eta_{2t,2m})\,h_{2u-1}+\eta_{2t-1,2m}h_{2u},\\
h_{2m}' &= h_{2m}-\eta_{2t-1,2m}h_{2u-1}+(2\eta_{2t-1,2m}-\eta_{2t,2m})\,h_{2u}+\eta_{2t-1,2m}g_{2t}
\end{aligned}\right\}\ \begin{gathered}(m=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\\ m\neq u),\end{gathered}\\
h_{2u-1}' &= h_{2u-1},\\
h_{2u}' &= h_{2u},
\end{aligned}
$$

получим, что

$$
\begin{aligned}
&\eta_{2k,2u}=0 &&\text{для}\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\quad k\neq t,\\
&\eta_{2t-1,2m}=\eta_{2t,2m}=0 &&\text{для}\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\quad m\neq u.
\end{aligned}
$$

Обозначим векторы $g_{2t-1},\ g_{2t},\ g_1,\ g_2,\ h_{2u-1},\ h_{2u},\ h_1,\ h_2$ соответственно через $g_1,\ g_2,\ g_{2t-1},\ g_{2t},\ h_1,\ h_2,\ h_{2u-1},\ h_{2u}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\eta_{22}=1,\quad \eta_{k2}=0 &&\text{для}\quad k=1,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 2r;\\
&\eta_{1,2l}=\eta_{2,2l}=0 &&\text{для}\quad l=2,\ 3,\ \ldots,\ s.
\end{aligned}
$$

Проделав аналогичные замены с векторами $g_3,\ g_4,\ \ldots,\ g_{2r},\ h_3,\ h_4,\ \ldots,\ h_{2s}$, мы будем иметь, что

$$
\begin{aligned}
&\eta_{44}=1,\quad \eta_{k4}=0 &&\text{для}\quad k=3,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ 2r;\\
&\eta_{3,2l}=\eta_{4,2l}=0 &&\text{для}\quad l=3,\ 4,\ \ldots,\ s.
\end{aligned}
$$

Повторяя этот процесс, мы обратим в нули все коэффициенты η_{kl}, за исключением $\eta_{2k,2k}$ $\left(k=1,\ 2,\ \ldots,\ l';\ l'\leqslant\min(r,\ s)\right)$, которые равны единице.

2. Не меняя элементов матрицы H, придадим простейший вид матрицам D и I. Положив

$$
\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
&f_j'=f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
&\left.\begin{aligned}
g_{2k-1}'&=g_{2k-1}-\sum_{j=1}^{q}\delta_{j,\,2k}f_j\\
g_{2k}'&=g_{2k}+\sum_{j=1}^{q}(\delta_{j,\,2k-1}+\delta_{j,\,2k})f_j
\end{aligned}\right\}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r),\\
&h_l'=h_l \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ 2s),
\end{aligned}
$$

заменим коэффициенты при $f_j(j=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$ в разложении вектора $Lg_k(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r)$ нулями. Положим далее

$$
\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
&f_j'=f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
&g_k'=g_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r),\\
&h_l'=h_l+\sum_{j=1}^{q}\sigma_{jl}f_j \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ 2s).
\end{aligned}
$$

Тогда, взяв

$$
\sigma_{j,\,2l-1}=\frac{2\varepsilon_{j,\,2l-1}-\varepsilon_{j,\,2l}+d}{3},
$$

$$
\sigma_{j,\,2l}=\frac{\varepsilon_{j,\,2l-1}+\varepsilon_{j,\,2l}-d}{3},
$$

где

$$
d=\begin{cases}-1\\ \ \ 0\\ \ \ 1\end{cases} \text{и} \quad \varepsilon_{j,\,2l-1}+\varepsilon_{j,\,2l}\equiv d\,(\operatorname{mod}3),
$$

получим, что нечетные столбцы матрицы I составлены только из нулей, а четные столбцы – из абсолютно-наименьших вычетов $\operatorname{mod}3$. Если I – ненулевая матрица, то можно считать ε_{12} равным единице, так как случай $\varepsilon_{12}=-1$ заменой f_1 на $-f_1$ сводится к рассматриваемому. Если $\varepsilon_{12}=0$, а некоторый $\varepsilon_{j2}\neq 0$, то обозначив f_j через f_1, а f_1 через f_j, будем иметь $\varepsilon_{12}\neq 0$. Если, наконец, все $\varepsilon_{j2}=0$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$, то $\varepsilon_{t,\,2l}\neq 0$ $(1\leqslant t\leqslant q;\ 1<l\leqslant s)$. Простой подсчет показывает, что, выполнив подстановку

$$
\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
&f_j'=f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
&g_k'=g_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r),\\
&h_1'=\begin{cases} h_1+2h_{2l-1}+\eta_{2l,\,2l}g_{2l-1}-\varepsilon_{t,\,2l}f_t & \text{при} \quad l\leqslant l',\\ h_1+2h_{2l-1}-\varepsilon_{t,\,2l}f_t & \text{при} \quad l>l',\end{cases}\\
&h_2'=\begin{cases} h_2'+2h_{2l}+\eta_{2l,\,2l}g_{2l}+\varepsilon_{t,\,2l}f_t & \text{при} \quad l\leqslant l',\\ h_2'+2h_{2l}+\varepsilon_{t,\,2l}f_t & \text{при} \quad l>l',\end{cases}\\
&h_l'=h_l \qquad (l=3,\ 4,\ \ldots,\ 2s),
\end{aligned}
$$

мы в разложении Lh_2 при f_t будем иметь коэффициент, отличный от нуля.

Итак, $\varepsilon_{12}=1$. Положим

$$
\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
&f_1'=f_1+\sum_{j=2}^{q}\varepsilon_{j2}f_j,\\
&f_j'=f_j \qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ q),\\
&g_k'=g_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r),\\
&h_l'=h_l \qquad (l=1,\ 2),
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&h_{2l-1}'=\begin{cases} h_{2l-1}+\varepsilon_{1,2l}(2h_1-f_1+\eta_{22}g_1) & \text{при} \quad l'>0\\ h_{2l-1}+\varepsilon_{1,2l}(2h_1-f_1) & \text{при} \quad l'=0\end{cases}\\
&h_{2l}'=\begin{cases} h_{2l}+\varepsilon_{1,2l}(2h_2+f_1+\eta_{22}g_2) & \text{при} \quad l'>0\\ h_{2l}+\varepsilon_{1,2l}(2h_2+f_1) & \text{при} \quad l'=0\end{cases}
\end{aligned}
\right\}\ (l=2,\ 3,\ \ldots,\ s).
$$

Теперь $\varepsilon_{j2}=0$ для $j=2,\ 3,\ \ldots,\ q$ и $\varepsilon_{1,2l}=0$ для $l=2,\ 3,\ \ldots,\ s$. Повторяя этот процесс, мы приведем матрицу I к виду, в котором элементы $\varepsilon_{l,2l}=1$ $\Big(l=1,\ 2,\ \ldots,\ j';\ j'\leqslant\min(q,\ s)\Big)$, а остальные элементы нули.

3. Не трогая матриц H, D, I, приведем к простейшему виду матрицу B. Введем новые базисные векторы, полагая

$$
\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\
&f_j'=f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q),\\
&g_k'=g_k+\sum_{i=1}^{p}\tau_{ik}e_i \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r),\\
&h_l'=h_l \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ 2s).
\end{aligned}
$$

Если

$$\beta_{i,2k-1}-\beta_{i,2k}\equiv d \bmod 3),$$

где $d=\begin{cases}-1\\ \ \ 0\\ \ \ 1\end{cases}$, то коэффициенты τ_{ik} подберем следующим образом

$$\tau_{i,2k-1}=\frac{-2\beta_{i,2k-1}-\beta_{i,2k}-d}{3},$$

$$\tau_{i,2k}=\frac{\beta_{i,2k-1}-\beta_{i,2k}-d}{3}.$$

Теперь коэффициенты при e_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ в разложении Lg_{2k-1} $(k=1,\ 2\ \ldots,\ r)$ будут только нулями, а в разложении Lg_{2k} — абсолютно-наименьшими вычетами mod 3.

Если не все $\beta_{i,2k}=0$, то положим $\beta_{12}=1$, так как в случае $\beta_{12}=-1$ можно e_1 заменить на $-e_1$ и тем самым получить $\beta_{12}=1$. Если $\beta_{12}=0$, а $\beta_{i2}\neq 0\,(1<i\leqslant p)$, то, обозначив e_1 через e_i, а e_i через e_1, получим только что

рассмотренный случай. Если же все $\beta_{i2}=0$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, но $\beta_{u, 2k}\neq 0$ $(1\leqslant u\leqslant p;\ 1<k\leqslant r)$, то, преобразовав базис по формулам

$$\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1, 2, \ldots, p),\\
&f_j'=f_j \qquad (j=1, 2, \ldots, q),\\
&g_1'=g_1-2g_{2k-1}+\beta_{u, 2k}e_u,\\
&g_2'=g_2-2g_{2k}+\beta_{u, 2k}e_u,\\
&g_k'=g_k \qquad (k=3, 4, \ldots, 2r),\\
&h_1'=\begin{cases} h_1+\eta_{22}g_{2k-1} & \text{при} \quad l'>0,\\ h_1 \quad \text{при} \quad l'=0\ , \end{cases}\\
&h_2'=\begin{cases} h_2+\eta_{22}g_{2k} & \text{при} \quad l'>0,\\ h_2 \quad \text{при} \quad l'=0, \end{cases}\\
&h_l'=h_l \qquad (l=3, 4, \ldots, 2s),
\end{aligned}$$

увидим, что коэффициент при e_u в разложении Lg_2 отличен от нуля.

Таким образом, $\beta_{12}=1$. Положим

$$\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=2, 3, \ldots, p),\\
&e_1'=e_1+\sum_{i=2}^{p}\beta_{i2}e_i,\\
&f_j'=f_j \qquad (j=1, 2, \ldots, q),\\
&g_k'=g_k \qquad (k=1, 2),\\
&\left.\begin{aligned}
g_{2k-1}'&=g_{2k-1}+\beta_{1, 2k}(2g_1-e_1)\\
g_{2k}'&=g_{2k}+\beta_{1, 2k}(2g_2-e_1)\\
h_{2k-1}'&=h_{2k-1}-\beta_{1, 2k}g_1\\
h_{2k}'&=h_{2k}-\beta_{1, 2k}g_2
\end{aligned}\right\}\quad (k=2, 3, \ldots, l'),\\
&\left.\begin{aligned}
g_{2k-1}'&=g_{2k-1}+\beta_{1, 2k}(2g_1-e_1)\\
g_{2k}'&=g_{2k}+\beta_{1, 2k}(2g_2-e_1)
\end{aligned}\right\}\quad (k=l'+1, l'+2, \ldots, r),\\
&h_l'=h_l \qquad (l=1, 2, l'+1, l'+2, \ldots, 2s).
\end{aligned}$$

Теперь все $\beta_{1, 2k}$ $(k=2, 3, \ldots, r)$ и все β_{i2} $(i=2, 3, \ldots, p)$ равны нулю. Повторяя этот процесс, обратим в нули все коэффициенты β_{ik}, за исключением $\beta_{j, 2j}$ $\left(j=1, 2, \ldots, k';\ k'\leqslant\min(p, r)\right)$, которые равны единице.

4. Не трогая элементов матриц H, D, I, B, придадим простейший вид матрице A. Заметим, что преобразованием вида

$$\begin{aligned}
&e_i'=e_i \qquad (i=1, 2, \ldots, p),\\
&f_j'=f_j+\sum_{i=1}^{p}\omega_{ij}e_i \qquad (j=1, 2, \ldots, q),\\
&g_k'=g_k \qquad (k=1, 2, \ldots, 2r),\\
&h_l'=h_l \qquad (l=1, 2, \ldots, 2s),
\end{aligned}$$

все нечетные элементы матрицы A можно заменить единицами, а четные — нулями. Для этого достаточно положить

$$\omega_{ij}=\frac{c-\alpha_{ij}}{2},$$

если

$$\alpha_{ij}\equiv c\ (\mathrm{mod}\ 2),$$

где $c=\begin{cases}0\\1\end{cases}$.

Пусть $\alpha_{uv}=1$. Выбрав в качестве нового базиса векторы

$$\begin{aligned}
&e'_i=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ p),\\
&f'_v=f_v,\\
&g'_k=g_k, \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ 2r),\\
&\left.\begin{aligned}
f'_j&=f_j+\alpha_{uj}\,(3f_v-2e_u)\\
h'_{2j-1}&=h_{2j-1}+\alpha_{uj}f_u\\
h'_{2j}&=h_{2j}-\alpha_{uj}f_u
\end{aligned}\right\}\quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ j';\ j\neq v),\\
&f'_j=f_j+\alpha_{uj}\,(3f_v-e_u) \qquad (j=j'+1,\ j'+2,\ \dots,\ q;\ j\neq v),\\
&h'_l=h_l \qquad (l=j'+1,\ j'+2,\ \dots\ 2s,\ l\neq 2v-1,\ 2v),\\
&h'_{2v-1}=h_{2v-1},\\
&h'_{2v}=h_{2v},
\end{aligned}$$

получим, что $\alpha_{uj}=0$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ q;\ j\neq v)$. Серией преобразований, определяемых формулами

$$\left.\begin{aligned}
&e'_j=e_j \qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ p;\ j\neq u),\\
&e'_u=e_u-3\alpha_{iv}e_i,\\
&f'_j=f_j \qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ q;\ j\neq v),\\
&f'_v=f_v-2\alpha_{iv}e_i,\\
&g'_{2u-1}=\begin{cases} g_{2u-1}-\alpha_{iv}e_i & \text{при}\quad u\leqslant j',\\ g_{2u-1}\ \text{при}\quad u>j',\end{cases}\\
&g'_{2u}=\begin{cases} g_{2u}-\alpha_{iv}e_i & \text{при}\quad u\leqslant j',\\ g_{2u}\quad \text{при}\quad u>j,\end{cases}\\
&g'_k=g_k \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ 2r;\ k\neq 2u-1,\ 2u),\\
&h'_l=h_l \qquad (l=1,\ 2,\ \dots,\ 2s),
\end{aligned}\right\}\quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ p;\ i\neq u),$$

мы заменим нулями все коэффициенты α_{iv} $(i=1,\ 2,\ \dots,\ p;\ i\neq v)$. Повторяя этот процесс, добьемся того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце матрицы A, кроме нулей, было не больше одной единицы. Полученную матрицу, очевидно, можно считать диагональной.

Наконец, положив

$$\begin{aligned}
&e'_i=e_i \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ p),\\
&f'_j=j_j \qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ q),\\
&g'_k=g_k \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ 2r),\\
&\left.\begin{aligned}
h'_{2l-1}&=h_{2l-1}-\sum_{i=1}^{p}\gamma_{i,2l}e_i,\\
h'_{2l}&=h_{2l}+\sum_{i=1}^{p}(\gamma_{i,2l-1}-\gamma_{i,2l})\,e_i,
\end{aligned}\right\}\quad (l=1,\ 2,\ \dots,\ s),
\end{aligned}$$

заменим нулями коэффициенты при e_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ в разложении Lh_l $(l=1, 2, \ldots, 2s)$.

Теперь базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q, g_1, g_2, \ldots, g_{2r}, h_1, h_2, \ldots, h_{2s}$ можно перенумеровать так, чтобы матрица P распалась на ящики следующих типов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad [-1], \quad [1].$$

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
27.III.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Diederichsen F. E. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz. „Abhand. Math. Sem. Univ. Hamburg“, 1938, 13, 357—412.
2. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of prime order. „Proc. Amer. Math. Soc.“, 1957, 8, N 1, 142—146.
3. Ройтер А. В. О представлениях циклической группы 4-го порядка целочисленными матрицами. „Вестн. Ленинград. ун-та“, 1960, № 19, 65—74

ŠEŠTOS EILĖS CIKLINĖS GRUPĖS ATVAIZDAVIMAS SVEIKŲ SKAIČIŲ MATRICOMIS

A. MATULIAUSKAS

(Reziumė)

Darbe įrodyta sekanti teorema. Kiekvienam šeštos eilės ciklinės grupės sveikam atvaizdavimui egzistuoja unimodulinė transformacija, išdėstanti šį atvaizdavimą ne aukštesniais kaip 6-jo laipsnio neišskaidomais atvaizdavimais, kurių iš viso yra 17.

GANZZAHLIGE DARSTELLUNGEN DER ZYKLISCHEN GRUPPE VON SECHSTER ORDNUNG

A. MATULIAUSKAS

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit ist bewiesen, dass jede ganzzahlige Darstellung der zyklischen Gruppe von sechster Ordnung, durch Transformation mit einer unimodularen Matrix, in unzerfällbare Teildarstellungen zerfällt. Die Anzahl der unzerfällbaren Teildarstellungen, deren Grade höchstens sechs sind, ist 17 gleich.