II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

О СВЯЗИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ И АРИФМЕТИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

А. К. РАУДЕЛЮНАС

При обобщении локальных предельных теорем для сумм независимых случайных величин (см. Б. В. Гнеденко [1], Ю. В. Прохоров [5], Ю. А. Розанов [6]) на многомерный случай (см. Д. Г. Майзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачёва [3], А. А. Миталаускас [4]) кроме арифметического условия вводится условие, чтобы квадратичная форма предельного нормального закона была невырождённой. В доказанных выше многомерных теоремах не выясняется связь между квадратичной формой, обеспечивающей невырожденность предельного закона распределения, и арифметическим условием. Выяснение этой связи является целью данной заметки.

Рассмотрим последовательность независимых равномерно ограниченных случайных s-мерных векторов

$$\xi_k=(\xi_{k1},\ \xi_{k2},\ \ldots,\ \xi_{ks}),$$
$$|\xi_k|\leqslant K<\infty,\ k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения, где

$$|\xi_k|=\sqrt{\xi_{k1}^2+\xi_{k2}^2+\cdots+\xi_{ks}^2}.$$

Пусть

$$\mathbf{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k=(S_{n1},\ S_{n2},\ \ldots\ S_{ns}).$$

Для краткости обозначим

$$\mathbf{P}\{\xi_k=\mathbf{m}\}=\mathbf{P}\{\xi_{k1}=m_1,\ \xi_{k2}=m_2,\ \ldots\ \xi_{ks}=m_s\}=p_{k/\mathbf{m}},$$

если $\mathbf{m}=(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s)$,

$$\mathbf{P}\{\xi_{ki}=l_i,\ \xi_{kj}=h_j\}=p_{k/l_ih_j},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

$(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Пусть, далее,

$$\mathbf{M}\,\xi_k=a_k=(a_{k1},\ a_{k2},\ \ldots,\ a_{ks}),$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}=A_{ni},$$

$$\mathbf{D}\,\xi_{ki}=\sigma_{ki}^2,$$

$$B_{ni}^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ki}^2,$$

$$\rho_{k/ij}=\frac{\mathbf{M}(\xi_{ki}-a_{ki})(\xi_{kj}-a_{kj})}{\sigma_{ki}\cdot\sigma_{kj}}$$

и

$$\rho_{ij}^{(n)}=\frac{\mathbf{M}(S_{ni}-A_{ni})(S_{nj}-A_{nj})}{B_{ni}-A_{nj}},$$

где $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть имеется последовательность* (1) *и*

$$B_{ni}\to\infty\ (n\to\infty),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{2}$$

Справедливы следующие утверждения:

1°. *Если*

$$\frac{B_{ni}}{B_{nj}}\to\begin{cases}0\\ \text{или}\\ \infty\end{cases}\qquad (n\to\infty) \tag{3}$$

для любых $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ s$, то квадратичная форма $Q_n(t)$ равномерно (относительно n) положительно определена, т. е. существует константа $c>0$, такая, что

$$Q_n(\mathbf{t})\geqslant c\,(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_s^2), \tag{4}$$

или существует константа $C_1>0$ такая, что

$$D_n\geqslant C_1>0, \tag{4a}$$

где

$$Q_n(\mathbf{t})=t_1^2+t_2^2+\cdots+t_s^2+2\rho_{12}^{(n)}t_1t_2+\cdots+2\rho_{s-1,\,s}^{(n)}t_{s-1}t_s,$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & \rho_{12}^{(n)} & \ldots & \rho_{1s}^{(n)}\\ \rho_{21}^{(n)} & 1 & \ldots & \rho_{2s}^{(n)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \rho_{s1}^{(n)} & \rho_{s2}^{(n)} & \ldots & 1\end{vmatrix}^{*}$$

2°. *Если все*

$$\frac{B_{ni}}{B_{nj}}\asymp 1$$

($\asymp$ знак эквивалентности Харди) и

$$B_{ni}^2\ll\varphi(n),\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s, \tag{5}$$

то квадратичная форма $Q_n(\mathbf{t})$ будет равномерно положительно определенной. Здесь

$$\varphi(n)=\min\sum_{k=1}^{n}\min_{0\leqslant r<q}\mathbf{P}\{(\mathbf{a},\ \xi_k)\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\}\underset{(n\to\infty)}{\to\infty} \tag{6}$$

(арифметическое условие), где минимум берется по всем целым $q\geqslant 2$ и по всем целочисленным векторам $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s)$ с о. н. д. $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s,\ q)=1$.

---

* Условию (4) или (4a), обеспечивающему невырождённость предельного закона распределения, в двумерном случае ($s=2$) соответствует требование неравенства для коэффициента корреляции:

$$|\rho_{12}^{(n)}|\leqslant L<1. \tag{4b}$$

Если условие (5) *не выполнено, то можно построить пример, в котором квадратичная форма* $Q_n(t)$ *будет вырожденной* (см. пример 1).

3°. *Если совокупность индексов* 1, 2, ..., s, *можно разбить на* d *групп*

$$i_{11},\ i_{12},\ \ldots,\ i_{1k_1},\ i_{21},\ i_{22},\ \ldots,\ i_{2k_2},\ \ldots,\ i_{d_1},\ i_{d2},\ \ldots,\ i_{dk_d},$$
$$k_1+k_2+\cdots+k_d=s$$

таких, что внутри каждой p*-той группы с* $k_p\geqslant 2$

$$\frac{B_{ni}}{B_{nj}}\asymp 1,\ p,\ j=i_{p1},\ i_{p2},\ \ldots,\ i_{pk_p}$$

и детерминант D_{np}, *составленный из коэффициентов корреляции* $\rho_{ij}^{(n)}$ *в каждой такой группе, будет больше* $c_p>0$, *то квадратичная форма* $Q_n(\mathbf{t})$ *будет равномерно положительно определенной, т. е. вырождение может быть только внутри группы с* $k_p\geqslant 2$.

Замечание 1. Из 2° и 3° следует, что $D_{np}\geqslant c_p>0$, если

$$B_{ni_{p1}}\ll\varphi_p(n).$$

Здесь $\varphi_p(n)$ определяется так же, как и $\varphi(n)$, т. е.

$$\varphi_p(n)=\min\sum_{k=1}^{n}\min_{0\leqslant r<q}\mathbf{P}\{(\mathbf{a},\ \xi_k)\not\equiv r\ (\mathrm{mod}\ q)\},$$

только с тем отличием, что минимум берется по всем $q\geqslant 2$, по всем целочисленным векторам $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s)$ с о. н. д. $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s,\ q)=1$ и

$$a_{i_{j\alpha}}=0,\ j\neq p,\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ k_j.$$

Замечание 2. В случае неодинаково распределенных слагаемых сделанное нами предположение, что случайные величины ξ_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$ принимают значение из того же самого конечного множества, является ограничением по существу. В противном случае можно построить пример, в котором квадратичная форма $Q_n(t)$ будет вырождаться (см. пример 2).

Замечание 3. Если случайные величины одинаково распределены и равномерно ограничены, то из леммы 1 следует, что квадратичная форма всегда равномерно положительно определена, если только выполняется арифметическое условие и тем самым имеет место локальная предельная теорема. Покажем, что это верно и для неограниченных слагаемых, если только существует матрица вторых моментов.

Доказательство. Квадратичная форма для суммы $\mathbf{S}_n$ имеет вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}(\mathbf{t},\ \xi_k)=|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}(\mathbf{u},\ \xi_k)=$$
$$=\frac{1}{2}|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mathbf{m}_1,\ \mathbf{m}_2}\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2),\ \mathbf{u}\Big)^2 p_{k/\mathbf{m}_1}p_{k/\mathbf{m}_2},\tag{8}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_s)$ с $|\mathbf{u}|=1$.

Согласно теории диофантовых апроксимаций (см., например, [7]), при любом $\tau>0$ числа $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_s$ можно представить в виде $u_i=\frac{a_i}{q}+z_i$,

$i=1, 2, \ldots, s$ или в векторных обозначениях $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{a}}{q}+\mathbf{z}$, при чем о. н. д. $(a_1, a_2, \ldots, a_s\, q)=1$,

$$0<q\leqslant\tau,\ |z_i|\leqslant q^{-1}\tau^{-\frac{1}{s}},\ i=1, 2, \ldots, s.$$

Тогда из соотношения (8) получаем

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{S}_n)=\frac{1}{2}\,|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}\Big[\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)+\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{z}\Big)\Big]^2 p_{k/\mathbf{m}_1}p_{k/\mathbf{m}_2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\,|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\\ ((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{a})\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, q)}}\Big[\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)+\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{z}\Big)\Big]^2 p_{k/\mathbf{m}_1}p_{k/\mathbf{m}_2}. \tag{9}$$

Из целочисленности и ограниченности $\mathbf{m}_i$, $i=1, 2$ следует, что

$$\Big|\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)\Big|\geqslant\frac{1}{q},\ \text{если}\ \Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{a}\Big)\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, q)$$

$$\Big|\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{z}\Big)\Big|\leqslant\frac{1}{2q},\ \text{если}\ \tau\ \text{достаточно большой}, \tag{9a}$$

например, $\tau>(4K\sqrt{s})^s$. Таким образом из (9а) следует:

$$\Big|\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)+\Big(\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{z}\Big)\Big|\geqslant$$

$$\geqslant\Big|\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \frac{a}{q}\Big)\Big|-\Big|\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{z}\Big)\Big|\geqslant\frac{1}{2q}, \tag{10}$$

если

$$\Big((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{a}\Big)\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q).$$

Из неравенств (9) и (10) получаем, что при достаточно большом $\tau>0$

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{S}_n)\geqslant\frac{1}{8q^2}\,|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\\ ((\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2), \mathbf{a})\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, q)}} p_{k/\mathbf{m}_1}\cdot p_{k/\mathbf{m}_2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{8q^2}\,|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mathbf{m}_2} p_{k/\mathbf{m}_2}\min_{0\leqslant r<q}\sum_{\substack{\mathbf{m}_1\\ (\mathbf{a}, \mathbf{m}_1)\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\, q)}} p_{k/\mathbf{m}_1}=$$

$$=\frac{1}{8q^2}\,|\mathbf{t}|^2\sum_{k=1}^{n}\min_{0\leqslant r<q}\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ (\mathbf{a}, \mathbf{m})\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\, q)}} p_{k/\mathbf{m}}. \tag{10a}$$

Учитывая, что $|q|\leqslant 2K$ из (6), (10а), окончательно получаем:

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}, \mathbf{S}_n)\geqslant c_2\,|\mathbf{t}|^2\,\varphi(n), \tag{11}$$

где $c_2>0$.

Чтобы получить аналогичную оценку для $Q_n(t)$, мы произведем замену переменных $t_i=\frac{t_i'}{B_{ni}}$, $i=1, 2, \ldots, s$, тогда из неравенства (11), опуская штрих над t_i, получаем:

$$Q_n(\mathbf{t})\geqslant c_2\,\varphi(n)\Big[\frac{t_1^2}{B_{n1}^2}+\frac{t_2^2}{B_{n2}^2}+\cdots+\frac{t_s^2}{B_{ns}^2}\Big]. \tag{12}$$

Если $B_{n1} \asymp B_{n2} \asymp \cdots \asymp B_{ns}$ и $B^2_{ni} \ll \varphi(n)$, $i=1, 2, \ldots, s$, то из (12) следует справедливость утверждения 2°, т. е.

$$Q_n(\mathbf{t}) \geqslant c_3(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_s^2),$$

где $c_3>0$ не зависит от n.

Если $B_{n1} \asymp B_{n2} \asymp \cdots \asymp B_{ns}$, но $\frac{B_{ni}}{\varphi(n)} \underset{(n\to\infty)}{\to} \infty$, $i=1, 2, \ldots, s$, то легко можно построить пример, что предельный закон будет вырожденным.

Пример 1. Пусть имеется последовательность независимых двумерных величин ξ_k, $k=1, 2, \ldots$ принимающих значения $(-1, 1)$, $(1, -1)$ $(0, 0)$ и $(1, 1)$ соответственно с вероятностями $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)$, $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)$, $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ и $\frac{1}{k}$, $k=1, 2, \ldots$. Нетрудно проверить, что $B^2_{n1}=B^2_{n2} \asymp n$, $\varphi(n) \asymp \log n$, $\frac{B^2_{n1}}{\varphi(n)} \to \infty$ и $|\rho^{(n)}_{12}| \to 1$ при $n\to\infty$, т. е. предельный закон вырожденный.

Приступим к доказательству утверждений 1°. Из (4а) видим, что для доказательства невырожденности предельного закона, нам достаточно показать, что для любых $i \neq j$, $i, j=1, 2, \ldots, s$

$$\rho^{(n)}_{ij} \to 0 \; (n\to\infty). \tag{13}$$

Пусть i, j любая пара индексов $i, j=1, 2, \ldots, s$ такая, что

$$\varepsilon_n = \frac{B_{ni}}{B_{nj}} \to 0 \; (n\to\infty). \tag{14}$$

Значения индекса k разбиваем на две группы:

$$K' = \left\{ k : \frac{\sigma^2_{ki}}{\sigma^2_{kj}} \geqslant \sqrt{\varepsilon_n}, \; k=1, 2, \ldots, n \right\},$$

$$K'' = \left\{ k : \frac{\sigma^2_{ki}}{\sigma^2_{kj}} < \sqrt{\varepsilon_n}, \; k=1, 2, \ldots, n \right\}. \tag{15}$$

Из (14) – (15) получаем, что

$$\sum_{k\in K'} \sigma^2_{kj} \leqslant \sqrt{\varepsilon_n} B^2_{nj}. \tag{16}$$

Пусть $\min(l_i-a_{ki})^2$ достигается в точке $l_i=l_{i_0}$, $i=1, 2, \ldots, s$, тогда

$$\sigma^2_{ki} = \sum_{l_i} (l_i-a_{ki})^2 \mathbf{P}\{\xi_{ki}=l_i\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{l_i \\ l_i \neq l_{i_0}}} (l_i-a_{ki})^2 \mathbf{P}\{\xi_{ki}=l_i\} \geqslant \frac{1}{4}\mathbf{P}(\xi_{ki}\neq l_{i_0}\}, \; k=1, 2, \ldots. \tag{17}$$

С другой стороны,

$$\sigma^2_{ki} \leqslant \sum_{l_i} (l_i-l_{i_0})^2 \mathbf{P}\{\xi_{ki}=l_i\} \leqslant 4K^2 \mathbf{P}\{\xi_{ki}\neq l_{i_0}\}, \; k=1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Из соотношений (15), (17) – (18) следует, что для $k\in K''$

$$\frac{\frac{1}{4}\mathbf{P}\{\xi_{ki}\neq l_{i_0}\}}{4K^2\mathbf{P}\{\xi_{kj}\neq l_{j_0}\}} \leqslant \frac{\sigma^2_{ki}}{\sigma^2_{kj}} \to 0 (k\to\infty). \tag{19}$$

Оценим сверху второй смешанный момент.

$$\left|\mathbf{M}(\xi_{ki}-a_{ki})(\xi_{kj}-a_{kj})\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{\substack{l_i,\,h_j\\ l_i\neq l_{j_0}}}(l_i-l_{i_0})(h_j-a_{kj})p_{k|h_jl_i}\right|\leqslant 4K^2\mathbf{P}\{\xi_{ki}\neq l_{i_0}\}. \tag{20}$$

Из неравенств (17) – (20) вытекает, что

$$|\rho_{k|ij}|\leqslant\frac{4K^2\mathbf{P}\{\xi_{ki}\neq l_{i_0}\}}{\frac{1}{4}\sqrt{\mathbf{P}\{\xi_{ki}\neq l_{i_0}\}\cdot\mathbf{P}\,\xi_{kj}\neq l_{j_0}\}}}\to 0\ (k\to\infty),\quad k\in K''. \tag{21}$$

Пусть $m_n\leqslant n$ такой, что

$$\sum_{\substack{k\leqslant m_n\\ k\in K''}}\sigma_{kj}^2=o(B_{nj}^2),\quad \sum_{\substack{k\leqslant m_n\\ k\in K''}}\sigma_{ki}^2=o(B_{ni}^2). \tag{22}$$

Из (16), (21), (22) имеем

$$|\rho_{ij}^{(n)}|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_{k|ij}\,\sigma_{ki}\,\sigma_{kj}}{B_{ni}\cdot B_{nj}}\right|\leqslant\left|\sum_{k\in K''}\frac{\rho_{k|ij}\,\sigma_{ki}\cdot\sigma_{kj}}{B_{ni}\cdot B_{nj}}\right|+$$
$$+\left|\sum_{k\in K'}\frac{\rho_{k|ij}\,\sigma_{ki}\,\sigma_{kj}}{B_{ni}\,B_{nj}}\right|\leqslant\sum_{\substack{k\leqslant m_n\\ k\in K''}}\frac{\sigma_{ki}\cdot\sigma_{kj}}{B_{ni}\cdot B_{nj}}+$$
$$+\left|\sum_{\substack{k>m_n\\ k\in K''}}\rho_{k|ij}\frac{\sigma_{ki}\cdot\sigma_{kj}}{B_{ni}\cdot B_{nj}}\right|+\sum_{k\in K'}\frac{\sigma_{ki}}{B_{ni}}\cdot\sum_{k\in K'}\frac{\sigma_{kj}}{B_{nj}}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\substack{k\leqslant m_n\\ k\in K''}}\frac{\sigma_{ki}}{B_{ni}}\sum_{\substack{k\leqslant m_n\\ k\in K''}}\frac{\sigma_{kj}}{B_{nj}}+\Theta_n+\sqrt{\varepsilon_n}\to 0\ (n\to\infty), \tag{23}$$

где

$$|\rho_{k|ij}|\leqslant\Theta_n,\ \text{если } k\geqslant m_n \text{ и } k\in K'',\ \Theta_n\to 0\ (n\to\infty).$$

Таким образом из (13), (23) следует справедливость утверждения 1°.

Утверждение 3° вытекает из условий леммы 1 и утверждения 1°. Действительно, в случае 1° мы показали, что если дисперсии B_{ni}, $i=1, 2, \ldots, s$ разного порядка, то вырождения быть не может и все коэффициенты корреляции $\rho_{ij}^{(n)}\to 0\,(n\to\infty)$. Пеэтому, разбив дисперсии по порядку роста при $n\to\infty$ на d групп, мы убеждаемся, что вырожденность может быть только внутри групп. Требование, наложенное на детерминант $D_{np}: D_{np}\geqslant c_p>0$, означает отсутствие вырождения в p-ой группе $(k_p\geqslant 2)$, а из теоремы Лапласа [2] и утверждение 1° следует, что $D_n\geqslant c_4>0$ и тем самым лемма 1 полностью доказана.

Справедливость замечания 2 доказывает следующий пример.

Пример 2. Пусть имеется последовательность независимых двумерных случайных величин ξ_i $i=1, 2, \ldots$ с

$$\sigma_{i2}^2=\sigma^2,\ i=1, 2, 3, \ldots$$

и

$$\sigma_{11}^2=\sigma_{21}^2=\cdots=\sigma_{m_1 1}^2=\Delta_1^2,\ \sigma_{m_1+1,\,1}^2=\cdots=\sigma_{m_1+m_2,\,1}^2=\Delta_2^2 \text{ и т. д.}$$

где

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n.$$

Пусть

$$m_j = 2^j,\ \Delta_j^2 = \frac{1}{j},\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$$

и

$$\rho_{i/12} = \frac{\mathbf{M}(\xi_{i1} - a_{i1})(\xi_{i2} - a_{i2})}{\sigma_{i1}\cdot\sigma_{i2}} = 1^*,\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ n,$$

тогда

$$k \asymp \log_2 n,\ \Delta_k \to 0\ (k \to \infty)$$

и

$$\frac{B_{n1}}{B_{n2}} \to 0,\ (n \to \infty).$$

Заметим, что тогда

$$\rho_{12}^{(n)} \to 1\ (n \to \infty).$$

Действительно

$$\rho_{12}^{(n)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{j1}\sigma_{j2}}{B_{n1}\cdot B_{n2}} = \frac{(m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + \cdots + m_k\Delta_k)}{\sqrt{n}\,(m_1\Delta_1^2 + m_2\Delta_2^2 + \cdots + m_k\Delta_k^2)^{\frac{1}{2}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\Delta_k n}{\sqrt{n}\,\Delta_k\left(m_1\dfrac{\Delta_1^2}{\Delta_k^2} + \cdots + m_k\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{n}}{\left(m_1\dfrac{\Delta_1^2}{\Delta_k^2} + m_2\dfrac{\Delta_2^2}{\Delta_k^2} + \cdots + m_k\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Но

$$\Delta = m_1\frac{\Delta_1^2}{\Delta_k^2} + m_2\frac{\Delta_2^2}{\Delta_k^2} + \cdots + m_k =$$

$$= 2k + 2^2\frac{k}{2} + \cdots + 2^k = n + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{k-j}{j}\cdot 2^j \leqslant$$

$$\leqslant n + k\sum_{j=1}^{k-A_k} 2^j + \frac{A_k}{k - A_k + 1}\sum_{j=k-A_k+1}^{k-1} 2^j \leqslant$$

$$\leqslant n + n\left(\frac{k}{2^{A_k}} + \frac{A_k}{k - A_k}\right). \qquad (23)$$

A_k подберем так, чтобы $A_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, например, $A_k \asymp \log^2 k$, тогда в неравенстве (23) стоящий в скобках множитель стремится к нулю при $n \to \infty$, значит,

$$\rho_{12}^{(n)} \to 1\ (n \to \infty).$$

Аналогичные примеры можно построить и для того случая, когда

$$\Delta_k \to \infty\ (k \to \infty).$$

Остается проверить справедливость замечания 3 леммы 1.

Заметим, что в случае одинаково распределенных и равномерно ограниченных слагаемых дисперсии $B_{ni}^2 \asymp n$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$, а арифметическое условие (6) превращается в условие:

$$\min_{0 \leqslant r < q} \mathbf{P}\left\{(\mathbf{a},\ \xi_1) \not\equiv r\ (\mathrm{mod}\ q)\right\} \geqslant \delta > 0 \qquad (24)$$

* Условие $\rho_{i/12} = 1$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ может выполняться только тогда, когда случайные величины ξ_i принимают значения не из того же самого конечного множества, ибо в противном случае, как мы уже доказали $\rho_{i/12} \to 0$ $(i \to \infty)$.

для всех целых $q \geqslant 2$ и для всех челочисленных векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ с о. н. д. $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q) = 1$ и

$$\varphi(n) = n \min_{0 \leqslant r < q} \mathbf{P}\left\{(\mathbf{a}, \ \xi_1) \not\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q)\right\}. \tag{25a}$$

Таким образом, из леммы 1 (случай 2°) следует, что квадратичная форма $Q_n(\mathbf{t})$ равномерно положительно определена.

Нетрудно проверит, что в случае одинаково распределенных слагаемых арифметическое условие (24) эквивалентно условию (А): общий наибольший делитель миноров s-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} m'_{11} - m''_{11} & \ldots & m'_{1s} - m''_{1s} \\ m'_{21} - m''_{21} & \ldots & m'_{2s} - m''_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m'_{p1} - m''_{p1} & \ldots & m'_{ps} - m''_{ps} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

равен единице. Здесь $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}'_p - \mathbf{m}''_p$ значения, для которых $\mathbf{P}\{\xi_1 = \mathbf{m}'_p\} > 0$, $\mathbf{P}\{\xi_1 = \mathbf{m}''_p\} > 0$.

Таким образом, в случае одинаково распределенных и равномерно ограниченных слагаемых, из вышеизложенного и работы [3] следует справедливость замечания 3.

Остается проверить справедливость этого утверждения для случая не обязательно ограниченных одинаково распределенных слагаемых.

Пусть дана последовательность взаимно независимых одинаково распределенных s-мерных векторов

$$\xi_k = (\xi_{k1}, \ \xi_{k2}, \ \ldots, \ \xi_{ks}), \ k = 1, \ 2, \ \ldots,$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения. Пусть $\mathbf{P}\{\xi_k = \mathbf{m}\} = p_{\mathfrak{m}}$, $k = 1, 2, \ldots$ Будем считать, что моменты первого и второго порядка

$$\mathbf{a}' = \mathbf{M}\,\xi_k = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_s), \ b_{ij} = \mathbf{M}\,(\xi_{ki} - a'_i)\,(\xi_{kj} - a'_j)$$

конечны. Для краткости обозначим

$$b_{ii} = \sigma_i^2, \ \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ s, \ \ \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma^2},$$

$$\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k = (S_{n1}, S_{n2}, \ldots, S_{ns}), \ \mathfrak{M} = \{\mathbf{m}: |\mathbf{m}| < K_1 < \infty\}.$$

Из существования вторых моментов следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $K_2 < \infty$ такое, что

$$\int\limits_{|x| > K_2} x^2 dF^{(i)}(x) \leqslant \varepsilon, \tag{25}$$

где

$$F^{(i)}(x) = \mathbf{P}\{\xi_{ki} < x\}, \ i = 1, \ 2, \ \ldots \ s.$$

Пусть

$$K_3 = \max(K_1, \ K_2).$$

Из определения квадратичной формы имеем

$$\mathbf{D}(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}(\mathbf{t},\ \xi_k)=n\,|\mathbf{t}|^2\,\mathbf{D}(\mathbf{u},\ \xi_1), \tag{26}$$

где $|\mathbf{u}|=1$.

Как и при доказательстве 2°, каждый u_i представим в виде $u_i=\frac{a_i}{q}+z_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ $\Big($см. формулу (9)$\Big)$ с теми же ограничениями, тогда

$$\mathbf{D}(\mathbf{u},\ \xi_1)=\sum_{\mathbf{m}}\Big[\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)^2+$$

$$+2\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)\Big(\mathbf{m}-\mathbf{a}',\ \mathbf{z}\Big)+\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \mathbf{z}\Big)^2\Big]p_{\mathbf{m}}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|\leqslant K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)^2p_{\mathbf{m}}-\frac{2\sqrt{s}}{q^2\tau^{1/s}}\sum_{\mathbf{m}}\Big|\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \mathbf{a}\Big)\Big|\cdot\Big|\mathbf{m}-\mathbf{a}'\Big|\,p_{\mathbf{m}}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|\leqslant K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)^2p_{\mathbf{m}}-\frac{2\sqrt{s}}{q^2\tau^{1/s}}\Big(\sum_{\mathbf{m}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \mathbf{a}\Big)^2p_{\mathbf{m}}\Big)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big(\sum_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}-\mathbf{a}')^2p_{\mathbf{m}}\Big)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|\leqslant K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)^2p_{\mathbf{m}}-$$

$$-\frac{2\sigma\sqrt{s}}{q^2\tau^{1/s}}\Big(\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|\leqslant K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \mathbf{a}\Big)^2p_{\mathbf{m}}+\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|>K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}')\ \mathbf{a}\Big)^2p_{\mathbf{m}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Из $|u|=1$ и $u_i=\frac{a_i}{q}+z_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, следует, что

$$\Big|\frac{a_i}{q}\Big|\leqslant 2,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Таким образом, из (25) получаем:

$$\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|>K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \mathbf{a}\Big)^2p_{\mathbf{m}}\leqslant|\mathbf{a}|^2\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|>K_3}}(\mathbf{m}-\mathbf{a}')^2p_{\mathbf{m}}\leqslant s\cdot\varepsilon\cdot|\mathbf{a}|^2. \tag{28}$$

Из неравенств (27) – (28) имеем:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u},\ \xi_1)\geqslant\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|\leqslant K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \frac{\mathbf{a}}{q}\Big)^2p_{\mathbf{m}}-$$

$$-\frac{4\sigma\sqrt{s}}{q^2\tau^{1/s}}\Big(\sum_{\substack{\mathbf{m}\\ |\mathbf{m}|\leqslant K_3}}\Big((\mathbf{m}-\mathbf{a}'),\ \mathbf{a}\Big)^2p_{\mathbf{m}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Повторив рассуждения, проведенные при выводе неравенства (11), из соотношений (24), (26), (29) окончательно получим:

$$\mathbf{D}(\mathbf{t},\ \mathbf{S}_n)\geqslant c_5\,n\,|\mathbf{t}|^2, \tag{30}$$

где $c_5>0$ независит от n, т. е. квадратичная форма невырождена.

Мы отмечали, что в работе [3], при доказательстве многомерной предельной теоремы, кроме условия (А) требуется еще, чтобы квадратичная форма предельного закона была невырожденной, т. е. детерминант $\Delta=|b_{ij}|$ отличен от нуля. Так как последнее условие является следствием условия (А), то многомерную предельную теорему следовало бы формулировать следующим образом:

Теорема. *Пусть* ξ_k, $k=1, 2, \ldots$ *последовательность независимых одинаково распределенных* s*—мерных случайных величин, имеющих конечную матрицу вторых моментов* $\|b_{ij}\|$ *и принимающих целочисленные значения, причем пусть выполнено условие* (*А*), *тогда равномерно по* $\mathbf{m}=(m_1, m_2, \ldots, m_s)$

$$n^{\frac{s}{2}} P_n(\mathbf{m}) - g(\mathbf{z}) \to 0 \ (n \to \infty),$$

где

$$P_n(\mathbf{m}) = P\{S_{n1}=m_1,\ S_{n2}=m_2,\ \ldots,\ S_{ns}=m_s\},$$

$$g(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \Delta}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Q(\mathbf{z})} -$$

плотность s *— мерного нормального распределения. Здесь*

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{m}-n\mathbf{a}'}{\sqrt{n}} = \left(\frac{m_1-na_1'}{\sqrt{n}},\ \frac{m_2-na_2'}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ \frac{m_s-na_s'}{\sqrt{n}}\right),$$

а

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{i,\,j=1}^{s} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} z_i z_j -$$

положительно определенная квадратичная форма, где детерминант $\Delta=|b_{ij}|$, *а* Δ_{ij}*—алгебраическое дополнение к элементу* b_{ij} *матрицы* $\|b_{ij}\|$, $i, j=1, 2, \ldots, s$.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Прохорову и В. А. Статулявичюсу за ценные указания при решении данной задачи.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
20.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. О локальной предельной теореме теории вероятностей, УМН, III, 3 (25), 1948, 187—190.
2. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры, Москва, 1962.
3. Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк и Е. Л. Врачёва. Многомерная локальная предельная теорема теории вероятностей, ДАН СССР, 60, № 7, 1948, 1127—1128.
4. А. А. Миталаускас. О многомерной локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Труд. АН Лит. ССР, сер. Б, 2 (22), 1960, 3—14.
5. Ю. В. Прохоров. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, ДАН СССР, 98, № 4, 1954, 535—538.
6. Ю. А. Розанов. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Теор. вер. и её прим., 2, вып. 2, 1957, 275—281.
7. . . ma. D ophantische Approximationen, Berlin, 1937.

KVADRATINĖS FORMOS IR ARITMETINĖS SĄLYGOS RYŠYS DAUGIAMATĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

A. RAUDELIŪNAS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamas kvadratinės formos ir aritmetinės sąlygos ryšys lokalinėje ribinėje teoremoje nepriklausomų atsitiktinių s – mačių dydžių sumoms.

ON THE CONNECTION BETWEEN THE QUADRATIC FORM AND THE ARITHMETIC CONDITION IN THE MULTI-DIMENSIONAL LIMIT THEOREM

BY. A. RAUDELIŪNAS

(Summary)

In the paper the connection between the arithmetic condition for sums of independent random s–dimensional vectors and the quadratic form providing the undegeneration of the limit normal distribution is treated.