II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1962

О РАЗМЕРНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

З. С. РОМАНОВА

Введение

Пусть Q – некоторый хаусдорфов компакт (бикомпакт) и $C(Q)$ – пространство непрерывных на Q вещественных или комплекснозначных функций $\omega(x)$ с нормой:

$$\|\omega\| = \max_{x\in Q} |\omega(x)|.$$

А. Хаару принадлежит хорошо известная теорема (см., например, [1]) об условиях, при которых полином из функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, принадлежащих $C(Q)$, наименее уклоняющийся от произвольной функции $\omega(x)\in C(Q)$ является единственным. Условие Хаара состоит в следующем: для произвольной функции $\omega(x)\in C(Q)$ полином, наименее уклоняющийся от неё, будет единственным тогда, и только тогда, когда каждый полином

$$P(x, c) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) \not\equiv 0,$$

имеет в Q не более $n-1$ различных нулей. При этом пространство $C(Q)$ предполагалось вещественным.

В 1948 г. теорема А. Хаара была распространена на случай пространства комплекснозначных функций А. Н. Колмогоровым [2].

При дальнейших исследованиях использовалось понятие многогранника наилучших приближений. Многогранником H_ω наилучших приближений функции $\omega(x)\in C(Q)$ функциями $\varphi(x)$ некоторого подпространства $H\subset C(Q)$ называется множество всех функций $\varphi^*(x)\in H$, для которых $\|\omega-\varphi^*\| = \inf_{\varphi\in H}\|\omega-\varphi\|$. Множество H_ω является выпуклым. Многогранник H_ω называется k-мерным, если он содержит $k+1$ функций $\varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x), \ldots, \varphi_{k+1}^*(x)$, для которых разности

$$\varphi_{j+1}^*(x) - \varphi_1^*(x), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

линейно независимы, для любых же $k+2$ функций $\varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x), \ldots, \varphi_{k+2}^*(x)$, из H_ω разности

$$\varphi_{j+1}^*(x) - \varphi_1^*(x), \quad j = 1, 2, \ldots, k+1,$$

будет линейно зависимыми. Единственность функции наилучшего приближения означает нуль-мерность многогранника H_ω.

Используя понятие многогранника наилучших приближений, Г. Ш. Рубинштейн получил изящное обобщение теоремы Хаара (см. [3], [4]). Теорема Рубинштейна гласит: для того, чтобы для каждой функции $\omega(x)$

вещественного пространства $C(Q)$ многогранник наилучших приближений функциями n-мерного подпространства $H=H_n$ был не более, чем k-мерным, необходимо и достаточно, чтобы каждые $k+1$ линейно независимых полинома $P_j(x, c)$, $j=1, 2, \ldots, k+1$ имели в Q не более, чем $n-k-1$ общих нулей.

Дальнейшие результаты о размерности многогранника наилучших приближений в пространстве $C(Q)$ были получены А. Л. Гаркави [5[.

С. Я. Хавинсон исследовал вопрос о размерности многогранника наилучших приблнжений в пространстве L_1 суммируемых (вообще говоря, комплекснозначных) функций. При этом С. Я. Хавинсон рассматривал случай бесконечномерного подпространства H [6].

Для вещественного пространства $C(Q)$ И. Зингером было получено обобщение теоремы Хаара на случай, когда $H\subset C(Q)$ бесконечномерное подпространство [7].

В настоящей работе устанавливается теорема, которая обобщает как теорему Рубинштейна, так и теорему Зингера. Получены условия, при выполнении которых многогранник наилучших приближений каждой функции $\omega(x)\in C(Q)$ функциями $\varphi(x)$ из подпространства $H\subset C(Q)$ (вообще, бесконечномерного) будет не более, чем k-мерным. Для пространства непрерывных **вещественных** функций из этой теоремы вытекает при $H=H_n=\{c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)\}$ теорема Г. Ш. Рубинштейна. Если $C(Q)$ — вещественное, $k=0$, а H, вообще говоря, бесконечномерное, то из теоремы следует результат И. Зингера*.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность С. Я. Хавинсону за постановку задачи, советы, использованные автором в работе, и консультации.

Благодарю также А. Г. Нафталевича за замечания, способствовавшие улучшению изложения работы.

* * *

Общий вид линейного функционала на пространстве $C(Q)$ даётся формулой:

$$f(\omega)=\int\limits_Q \omega(x)\,dg, \tag{1}$$

где $g(e)$ — конечная, вполне аддитивная функция на теле $B(Q)$ борелевских подмножеств Q. При этом норма функционала (1) равна полной вариации функции $g(e)$ на Q:

$$\|f\|=\underset{Q}{V}(g)=\int\limits_Q |dg|. \tag{2}$$

Аддитивные функции множества мы будем называть также мерами.

Функция

$$v(e)=\underset{e}{V}(g), \tag{3}$$

* После сдачи работы в печать нам стала известна статья И. Зингера „On the set of the best approximation of an element in a normed linear space" Revue de mathématiques pures et appliquées, т. V, 1960, № 2, в которой критерий, излагаемый в настоящей работе, получен для случая вещественного пространства C (Q) (теорема 2' ниже).

где e — произвольное борелевское множество, $e \subset B(Q)$, есть положительная аддитивная функция множества (см. [8]). Так как для каждого $e \subset Q$

$$|g(e)| \leqslant \underset{e}{V}(g) = \nu(e),$$

то $g(e)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\nu(e)$. Тогда из теоремы Радона — Никодима (см., например, [8] или [9]) следует, что функция $g(e)$ может быть представлена неопределенным интегралом некоторой интегрируемой на Q функции точки $\alpha(x)$:

$$g(e) = \int\limits_{e} \alpha(x)\, d\nu, \tag{4}$$

где $\nu(e) = \underset{e}{V}(g)$.

Функция $\alpha(x)$ единственна в том смысле, что если

$$g(e) = \int\limits_{e} \alpha(x)\, d\nu$$

и

$$g(e) = \int\limits_{e} \beta(x)\, d\nu,$$

то

$$\alpha(x) = \beta(x)$$

почти всюду относительно меры $\nu(e)$ на Q. Легко видеть, что поскольку $\nu(e)$-вариация $g(e)$, то

$$|\alpha(x)| = 1$$

почти всюду относительно меры $\nu(e)$.

Мы будем записывать (4) также следующим образом:

$$g(e) = \int\limits_{e} \alpha(x)\, |dg|$$

и говорить „относительно меры $|dg|$" вместо „относительно меры $\nu(e)$, где $\nu(e) = \underset{e}{V}(g)$". Употребляемая далее запись:

$$„\Psi_1(x)\, dg = \Psi_2(x)\, |dg|$$

почти везде относительно меры $|dg|$" означает, на самом деле, что для всякого борелевского множества, $e \subset Q$ имеет место:

$$\int\limits_{e} \Psi_1(x)\, dg = \int\limits_{e} \Psi_2(x)\, |dg|.$$

Точкой роста меры $g(e)$ называется точка x_0, каждая окрестность $S(x_0)$ которой имеет положительную меру $\nu(e)$, то есть $\nu[S(x_0)] > 0$. Множество точек роста меры $g(e)$ на компакте Q мы будем обозначать D_g. Множество D_g — замкнутое.

Введём один специальный класс аддитивных на $B(Q)$ функций: скажем, что аддитивная функция $g(e)$ принадлежит классу Y, если для неё $\alpha(x)$ в представлении (4) непрерывна на множестве D_g. Итак, если $g(e) \in Y$, то

$$g(e) = \int\limits_{e} \alpha(x)\, |dg|, \tag{5}$$

где $e\subset B(Q)$, $\alpha(x)$ — непрерывна на $D_g\subset Q$ и

$$|\alpha(x)|=1$$

для всех $x\in D_g$.

Легко проверить, что, если $g(e)\in Y$, то при выполнении условий:

$$g(e)=\int\limits_e \alpha(x)\,|dg|$$

и

$$g(e)=\int\limits_e \beta(x)\,|dg|, \qquad e\subset Q,$$

с непрерывными $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеет место равенство

$$\alpha(x)\equiv\beta(x), \tag{6}$$

для $x\in D_g$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $H=\{\varphi(x)\}$ — линейное подпространство в $C(Q)$ и $\omega(x)\in C\backslash\overline{H}$. Для того, чтобы $\varphi^*(x)\in H$ была функцией наилучшего приближения к $\omega(x)$, то есть*

$$\|\omega-\varphi^*\|=\inf_{\varphi(x)\in H}\|\omega-\varphi\|, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала вполне аддитивная на теле борелевских подмножеств Q функция $g^*(e)$ со следующими свойствами:

а) $\int\limits_Q |dg^*|=1$;

б) $[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dg^*=M\cdot e^{i\delta}\cdot|dg^*|$ *почти везде относительно меры* $|dg^*|$ *на* Q, *где* $M=\max\limits_{x\in Q}|\omega(x)-\varphi^*(x)|$, δ — *некоторое вещественное число;*

в) $\int\limits_Q \varphi(x)\,dg^*=0$ *для любой* $\varphi(x)\in H$.

При этом $g^*(e)$ может считаться одной и той же для всех $\varphi^*(x)\in H$, для которых имеет место [7].

Доказательство. Сформулированная теорема является частным случаем следующего утверждения, справедливого для любого банаховского пространства B. Пусть $H\subset B$ — подпространство и пусть $\omega\in B$. Для того, чтобы для $\varphi^*\in H$ было

$$\|\omega-\varphi^*\|=\inf_{\varphi\in H}\|\omega-\varphi\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал такой линейный функционал $f^*(\psi)$ над B, что

$$\|f^*\|=1,$$
$$f^*(\varphi)=0, \qquad \varphi\in H,$$
$$f^*[\omega-\varphi^*]=e^{i\delta}\|\omega-\varphi^*\|,$$

где δ — некоторое вещественное число. При этом функционал $f^*(\psi)$ может считаться одним и тем же для всех $\varphi^*\in H$, для которых выполняется (7) (см. [10], [11], [6]).

Теорема 1 получится отсюда, если учесть представление (1) для линейных функционалов над пространством $C(Q)$.

Рассмотрим теперь основную теорему данной работы. Будем обозначать через $F\varphi$ множество всех нулей функции $\varphi(x)$.

Теорема 2. *Пусть $H=\{\varphi(x)\}$ линейное подпространство в $C(Q)$. Для того, чтобы для каждой функции $\omega(x)\in C(Q)$ многогранник наилучших приближений $H\omega$ был не более, чем k-мерным, необходимо и достаточно, чтобы не существовало замкнутого множества $D^*\subset Q$, линейно независимых функций $\varphi_j(x)\in H$, $j=1, 2, \ldots, k+1$ и вполне аддитивной функции множества $g^*(e)\in Y$, со следующими свойствами:*

а) D^* — является подмножеством множества совместных нулей функций $\varphi_j(x)\in H$, $j=1, 2, \ldots, k+1$, то есть

$$D^*\subseteq\bigcap_{j=1}^{k+1}F_{\varphi_j};$$

б) мера $g^*(e)$ сосредоточена на D^*, то есть

$$D^*=D_{g^*};$$

в) мера $g^*(e)$ ортогональна к H, то есть

$$\int\limits_Q \varphi(x)\,dg^*=0$$

для всех $\varphi(x)\in H$.

Доказательство. Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Докажем, что многогранник наилучших приближений H_ω для любой $\omega(x)\in C(Q)$ в этом случае не более, чем k-мерный.

Допустим противное. Пусть для некоторой $\omega(x)\in C(Q)$ многогранник наилучших приближений H_ω имеет размерность большую, чем k. Тогда существуют $k+2$ функции $\psi_j(x)\in H_\omega$, $j=1, 2, \ldots, k+2$ такие, что разности

$$\varphi_j(x)=\varphi_{j+1}(x)-\psi_1(x), \qquad j=1, 2, \ldots, k+1,$$

линейно независимы.

Так как $\psi_j(x)$ — функции наилучшего приближения к $\omega(x)$, то по теореме 1 на $B(Q)$ существует вполне аддитивная функция множества $g^*(e)$ (одна и та же для всех $\psi_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, k+2$), такая, что

$$[\omega(x)-\psi_j(x)]\,dg^*=M\cdot|dg^*|, \qquad j=1, 2, \ldots, k+2, \tag{8}$$

почти везде на Q относительно меры $|dg^*|$. Здесь $M=\max\limits_{x\in Q}|\omega(x)-\psi_j(x)|$, причём

$$|\omega(x)-\psi_j(x)|=M, \qquad j=1, 2, \ldots, k+2, \tag{9}$$

для всех $x\in D_{g^*}$. Кроме того, $\int\limits_Q \varphi(x)\,dg^*=0$ для $\varphi(x)\in H$. В силу того, что $\psi_j(x)\in H$, а $\omega(x)$, очевидно, принадлежит $C\backslash H$

$$M=\max_{x\in Q}|\omega(x)-\psi_j(x)|>0, \qquad j=1, 2, \ldots, k+2. \tag{10}$$

Каждая точка множества D_{g^*} — это точка роста меры, и значит, из (9) и (10) следует, что

$$\omega(x)-\psi_j(x)\neq 0, \qquad j=1, 2, \ldots, k+2,$$

для всех $x\in D_{g^*}$.

Рассмотрим функции

$$\alpha_j(x)=\frac{M}{\omega(x)-\psi_j(x)}, \qquad j=1, 2, \ldots, k+2.$$

Для всех $x\in D_{g^*}$ функции $\alpha_j(x)$ непрерывны, причём, в силу (8),

$$g^*(e)=\int_e \alpha_j(x)\,|dg^*|, \qquad j=1, 2, \ldots, k+2,$$

для всех $e\subset D_{g^*}$, а значит и для любого $e\subset Q$, так как мера $g^*(e)$ сосредоточена на D_{g^*}. Это означает, что $g^*(e)\in Y$. Тогда, вследствие (6), для всех $x\in D_{g^*}$ имеем:

$$\alpha_1(x)=\alpha_2(x)=\ldots=\alpha_{k+2}(x).$$

Отсюда следует, что на D_{g^*}

$$\omega(x)-\psi_{j+1}(x)\equiv\omega(x)-\psi_1(x), \qquad j=1, 2, \ldots, k+1,$$

то есть для всех $x\in D_{g^*}$

$$\psi_{j+1}(x)=\psi_1(x) \quad \text{и} \quad \varphi_j(x)=0, \qquad j=1, 2, \ldots, k+1.$$

Итак, получены линейно независимые функции $\varphi_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, k+1$, замкнутое множество $D^*=D_{g^*}\subset Q$, в точках которого $\varphi_j(x)=0$, $j=1, 2, \ldots, k+1$, и сосредоточенная на D^* вполне аддитивная на теле борелевских множеств функция $g^*(e)\in Y$, ортогональная к H. Мы пришли к противоречию с условиями теоремы.

Необходимость. Пусть условия теоремы не выполнены. Покажем, что в этом случае существует функция $\omega^*(x)\in C(Q)$, для которой размерность многогранника наилучших приближений H_ω будет больше, чем k.

Рассмотрим функцию $g^*(e)$, фигурирующую в условиях теоремы. Так как $g^*(e)\in Y$, то функция $\alpha(x)$ из представления

$$g^*(e)=\int_e \alpha(x)\,|dg^*|$$

непрерывна на $D^*=D_{g^*}$, и для всех $x\in D^*$ модуль $|\alpha(x)|$ равен 1. Тогда функция $\overline{\alpha(x)}$ ($\bar z$ — число комплексно-сопряжённое с z) будет также непрерывна на D^*, и $|\overline{\alpha(x)}|=1$ для $x\in D^*$.

Построим функцию $\alpha^*(x)$, непрерывную на Q и такую, что для $x\in D^*$

$$\alpha^*(x)=\overline{\alpha(x)}.$$

(Такую функцию для $\overline{\alpha(x)}=U(x)+i\cdot V(x)$ построить можно, так как непрерывные на замкнутом множестве D^* функции $U(x)$ и $V(x)$ можно продолжить до непрерывных на Q функций [12].)

Рассмотрим функцию

$$\omega(x)=\begin{cases}\alpha^*(x), & |\alpha(x)|\leqslant 1,\\ \dfrac{\alpha^*(x)}{|\alpha^*(x)|} & |\alpha(x)|>1.\end{cases} \tag{11}$$

Эта функция также непрерывна на Q,

$$|\omega(x)|\leqslant 1, \tag{12}$$

для всех $x\in Q$ и

$$\omega(x)=\overline{\alpha(x)}$$

для $x\in D^*$.

Рассмотрим теперь непрерывную на Q функцию

$$\omega^*(x)=\omega(x)\left[1-\frac{1}{k+1}\Big(|\varphi_1(x)|+|\varphi_2(x)|+\ldots+|\varphi_{k+1}(x)|\Big)\right]. \tag{13}$$

Заметим, что для $x\in D^*$

$$\omega^*(x)=\omega(x)=\alpha^*(x)=\overline{\alpha(x)},$$

так как $\varphi_j(x)=0$ для $x\in D^*$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1)$.

Не нарушая общности, мы можем считать, что

$$|\varphi_j(x)|\leqslant 1,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1,$$

для $x\in Q$.

Далее:

$$|\omega^*(x)|=|\omega(x)|\cdot\left[1-\frac{1}{k+1}\Big(|\varphi_1(x)|+|\varphi_2(x)|+\ldots+|\varphi_{k+1}(x)|\Big)\right]. \tag{14}$$

Оценим модули разностей:

$$\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1,$$

используя при этом (12), (13) и (14). Имеем:

$$\left|\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right|\leqslant|\omega^*(x)|+\frac{1}{2(k+1)}|\varphi_j(x)|\leqslant$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{k+1}\Big(|\varphi_1(x)|+|\varphi_2(x)|+\ldots+|\varphi_{k+1}(x)|\Big)+\frac{1}{2(k+1)}|\varphi_j(x)|=$$
$$=1-\frac{1}{2(k+1)}|\varphi_j(x)|-$$
$$-\frac{1}{k+1}\Big(|\varphi_1(x)|+\ldots+|\varphi_{j-1}(x)|+|\varphi_{j+1}(x)|+\ldots+|\varphi_{k+1}(x)|\Big).$$

Отсюда, при любом $x\in Q$, получаем:

$$\left|\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right|\leqslant 1. \tag{15}$$

С другой стороны, для $x\in D^*$

$$\left|\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right|=|\omega^*(x)|=|\overline{\alpha(x)}|=1, \tag{16}$$

так как все $\varphi_j(x)=0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1$, для $x\in D^*$.

Сравнивая (15) и (16), получаем, что

$$M=\max_{x\in Q}\left|\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right|=1,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1, \tag{17}$$

и достигается там, где $\varphi_j(x)=0$, в частности для всех $x\in D^*$.

Кроме того, для функций

$$\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1,$$

и $\omega^*(x)$ имеем:

$$\int\limits_Q\left[\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right]dg^*=\int\limits_{D^*}\left[\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right]dg^*=$$
$$=\int\limits_{D^*}\omega^*(x)\,dg^*=\int\limits_{D^*}\overline{\alpha(x)}\,dg^*=\int\limits_{D^*}\overline{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)\cdot|dg^*|=\int\limits_{D^*}|dg^*|.$$

Отсюда получаем:

$$\left[\omega^*(x)-\frac{1}{2(k+1)}\varphi_j(x)\right]dg^*=1\cdot|dg^*|,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1,$$

и

$$\omega^* (x)\, dg^* = |dg^*| \tag{18}$$

почти всюду на Q относительно меры $|dg^*|$. Из теоремы 1 следует, что $k+2$ функции:

$$0, \quad \frac{1}{2(k+1)}\varphi_1(x), \quad \frac{1}{2(k+1)}\varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \frac{1}{2(k+1)}\varphi_{k+1}(x)$$

являются функциями наилучшего приближения для $\omega^*(x) \in C(Q)$, то есть содержатся в H_ω. Так как функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_{k+1}(x)$ линейно независимы, то размерность многогранника наилучших приближений H_{ω^*} будет не менее $k+1$.

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим частный случай: пусть пространство $C(Q)$ состоит из вещественных функций. Теорему 1 в этом случае можно сформулировать несколько иначе:

Теорема 1′. *Пусть H — линейное подпространство в вещественном пространстве $C(Q)$. Для того, чтобы для $\omega(x) \in C(Q)$ функция $\varphi^*(x) \in H$ была функцией наилучшего приближения, то есть*

$$\inf_{\varphi(x) \in H} \| \omega - \varphi \| = \| \omega - \varphi^* \|,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали два непересекающихся, замкнутых множества D^+ и D^- и положительная мера $\mu(e)$, со следующими свойствами:

а) $\omega(x) - \varphi^*(x) = M, \; x \in D^+,$

$\omega(x) - \varphi^*(x) = -M, \; x \in D^-,$

где $M = \max\limits_{x \in Q} |\omega(x) - \varphi^*(x)|$;

б) $\displaystyle\int_{D^+} \varphi(x)\, d\mu = \int_{D^-} \varphi(x)\, d\mu, \; \varphi(x) \in H;$

в) $D^+ \cup D^- = D_\mu$.

Доказательство. Нам нужно показать эквивалентность условий теоремы 1′ условиям теоремы 1 в том частном случае этой последней, когда $C(Q)$ состоит из вещественных функций. Если для функции $\varphi^*(x)$ выполняются условия теоремы 1, то имеем, в частности:

$$g^*(e) = \int_e \frac{M}{\omega(x) - \varphi^*(x)} |dg^*|$$

$(e^{i\delta} = 1)$.

Положив теперь

$$D^+ = D_{g^*} \cap \Big[Q\{ \omega(x) - \varphi^*(x) = M \} \Big],$$

$$D^- = D_{g^*} \cap \Big[Q\{ \omega(x) - \varphi^*(x) = -M \} \Big]$$

и

$$\mu(e) = g^*[e \cap D^+] - g^*[e \cap D^-],$$

видим, что выполняются все условия теоремы 1′.

Если, наоборот, выполнены условия теоремы 1′, то, положив

$$g^*(e) = \mu[e \cap D^+] - \mu[e \cap D^-],$$

увидим, что выполняются и условия теоремы 1.

Теорему 2 в случае, когда $C(Q)$ состоит из вещественных функций, можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2′. *Пусть $H=\{\varphi(x)\}$ — линейное пространство в $C(Q)$. Для того, чтобы для каждой функции $\omega(x)\in C(Q)$ многогранник наилучших приближений H_ω был не более, чем k-мерным, необходимо и достаточно чтобы не существовало замкнутого множества $D^*\subset Q$, линейно независимых функций*

$$\varphi_j(x)\in H,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1,$$

и положительной меры $\mu(e)$ со следующими свойствами:

а) *D^* является подмножеством множества совместных нулей функций $\varphi_j(x)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1$, то есть*

$$D^*\subseteq\bigcap_{j=1}^{k+1}F_{\varphi_j};$$

б) *мера $\mu(e)$ сосредоточена на D^*, то есть $D^*=D_\mu$;*

в) *множество D^* представляется в виде суммы двух замкнутых и непересекающихся множеств D^+ и D^-, причём:*

$$\int_{D^+}\varphi(x)\,d\mu=\int_{D^-}\varphi(x)\,d\mu,$$

для всех $\varphi(x)\in H$.

В случае $k=0$ из теоремы 2′ получается результат И. Зингера [7].

Пусть теперь $H=H_n=\{c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)\}$ — конечномерное подпространство в $C(Q)$. В этом случае вопрос о размерности многогранника наилучших приближений (в вещественном пространстве $C(Q)$) полностью решается теоремой Рубинштейна (см. Введение).

Покажем, что из теоремы 2 вытекает теорема Рубинштейна (притом и для комплексного пространства $C(Q)$).

Пусть выполняются условия теоремы 2. Докажем, что тогда выполняется и условие теоремы Рубинштейна. Предположим противное. Пусть существуют $k+1$ линейно независимых многочленов $P_j(x,\ c)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1$, имеющих больше, чем $n-k-1$ общих нулей. Рассмотрим $n-k$ общих нулей: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-k}$, Тогда система

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_1)+c_2\varphi_2(x_1)+\ldots+c_n\varphi_n(x_1)=0,\\ c_1\varphi_1(x_2)+c_2\varphi_2(x_2)+\ldots+c_n\varphi_n(x_2)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1\varphi_1(x_{n-k})+c_2\varphi_2(x_{n-k})+\ldots+c_n\varphi_n(x_{n-k})=0, \end{cases}\tag{19}$$

имеет по крайней мере $k+1$ линейно независимых решений. Это означает что ранг r матрицы коэффициентов системы (19) будет $r\leqslant n-(k+1)$.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} g_1\varphi_1(x_1)+g_2\varphi_1(x_2)+\ldots+g_{n-k}\varphi_1(x_{n-k})=0,\\ g_1\varphi_2(x_1)+g_2\varphi_2(x_2)+\ldots+g_{n-k}\varphi_2(x_{n-k})=0.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ g_1\varphi_n(x_1)+g_2\varphi_n(x_2)+\ldots+g_{n-k}\varphi_n(x_{n-k})=0. \end{cases}\tag{20}$$

Матрица коэффициентов здесь совпадает с транспонированой матрицей системы (19). Следовательно ранг её $r \leqslant n-k-1$, а это значит, что система (20) имеет нетривиальные решения. Таким образом, мы разместили меру g_1, g_2, $\ldots$, g_{n-k}, ортогональную ко всем многочленам из H_n, на множестве x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-k}, все точки которого являются совместными нулями $k+1$ многочленов из H_n. Это противоречит условиям теоремы 2.

Пусть теперь выполняются условия теоремы Рубинштейна. Покажем, что тогда выполняются и условия теоремы 2, то есть покажем, что невозможно разместить меру, ортогональную ко всему подпространству H_n в точках x_1, x_2, $\ldots$, x_s, $s \leqslant n-k-1$, являющихся общими нулями $k+1$ линейно независимых полиномов

$$P_j(x,\ c) \in H_n, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1.$$

Допустим, что меру g в s точках разместить можно. Пусть $s=n-k-1-\alpha$, $\alpha \geqslant 0$. Тогда матрица коэффициентов системы

$$\left\{\begin{array}{l} g_1 \varphi_1(x_1)+g_2 \varphi_1(x_2)+\ldots+g_s \varphi_1(x_s)=0, \\ g_1 \varphi_2(x_1)+g_2 \varphi_2(x_2)+\ldots+g_s \varphi_2(x_s)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1 \varphi_n(x_1)+g_2 \varphi_n(x_2)+\ldots+g_s \varphi_n(x_s)=0 \end{array}\right. \tag{21}$$

имеет ранг $r \leqslant s-1=n-k-2-\alpha$.

Рассмотрим систему:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 \varphi_1(x_1)+c_2 \varphi_2(x_1)+\ldots+c_n \varphi_n(x_1)=0, \\ c_1 \varphi_1(x_2)+c_2 \varphi_2(x_2)+\ldots+c_n \varphi_n(x_2)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 \varphi_1(x_s)+c_2 \varphi_2(x_s)+\ldots+c_n \varphi_n(x_s)=0. \end{array}\right. \tag{22}$$

Матрица коэффициентов системы (22) имеет тот же ранг r, что и матрица коэффициентов системы (21) (как транспонированая). Следовательно система (22) имеет $l=n-r \geqslant n-n+k+2+\alpha=k+2+\alpha$ линейно независимых решений. Это означает, что l линейно независимых полиномов из H_n имеют s общих нулей. Отсюда следует, что $l-1$ линейно независимых полиномов имеют $s+1$ общих нулей, $l-2$ полинома — $s+2$ общих нулей, $l-(l-k-1)=k+1$ линейно независимых полиномов имеют $s+l-k-1=n-k-1-\alpha+l-k-1 \geqslant$ $\geqslant n-k-1-\alpha+k+2+\alpha-k-1=n-k$ общих нулей. Это противоречит условию теоремы Рубинштейна.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 15.V.1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации. М.—Л., 1947, Гостехиздат.
2. Колмогоров А. Н., Замечания по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции, Успехи матем. наук, т. III, вып. 1 (23), 1948.
3. Рубинштейн Г. Ш., Об одном методе исследования выпуклых множеств, ДАН СССР, т. 102, 1955, 451—454.
4. Зуховицкий С. И., О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева, Успехи матем. наук, т. XI, № 2 (68), 1956.

5. Гаркави А. Л., О размерности многогранников наилучшего приближения для дифференцируемых функций, Известия АН СССР, сер. матем., 23 (1959), 93—114.
6. Хавинсон С. Я., О размерности многогранника наилучших приближений в метрике L_1, сборник трудов кафедр высшей математики и теоретической механики МИСИ им. В. В. Куйбышева, № 2, 1957, 18—29.
7. Singer I., On best approximation of continuons functious, Math. Ann., 140. 1960, 165—168.
8. Халмош П., Теория меры, Москва, 1953.
9. Сакс С., Теория интеграла, Москва, 1949.
10. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., Проблема моментов, Харьков, 1937, ст. 4.
11. Никольский С. М., Приближения периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова, XV, 1945.
12. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций. М.—Л., 1948, Гостехиздат.

GERIAUSIŲJŲ TOLYDINĖS FUNKCIJOS APROKSIMACIJŲ POLIEDRO RANGAS

Z. ROMANOVA

(Reziumė)

Tegu Q—kompaktas, $C(Q)$—tolydinių kompakte Θ funkcijų erdvė ir H, $H \subset C(\Theta)$, — poerdvis. Aibė visų funkcijų $\varphi(x)$, geriausiai pagal erdvės $C(\Theta)$ metriką aproksimuojančių duotą funkciją ω, $\omega \in C(\Theta)$, $\varphi(x) \subset H$, yra žymima H_ω ir vadinama geriausių aproksimacijų poliedru.

Darbe gaunama būtina ir pakankama sąlyga, kad bet kuriam ω, $\omega \in C(\Theta)$, poliedro H_ω rangas nebūtų didesnis už fiksuotą skaičių k.

Gautas rezultatas apibendrina žinomus Haaro, Kolmogorovo, Rubinšteino ir Singero rezultatus.

ÜBER DEN RANG DER POLYEDER DER BESTEN APPROXIMATIONEN IM RAUME DER STETIGEN FUNKTIONEN

Z. ROMANOVA

(Zusammenfassung)

Es sei Θ ein Kompakt, $C(\Theta)$ der Raum der in Θ stetigen Funktionen und H, $H \in C(\Theta)$ ein Teilraum. Mit H_ω, $\omega \in C(\Theta)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $\varphi^*(x) \in H$ für die

$$\| \omega(x) - \varphi^*(x) \| = \inf_{\varphi(x) \in H} \| \omega(x) - \varphi(x) \|.$$

H_ω ist eine konvexe Menge, die man den Polyeder der besten Approksimationen nennt.

In der Arbeit wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeführt, dass der Rang des Polyeders H_ω für jeden ω, $\omega \in C(\Theta)$, eine gegebene ganze Zahl k nicht übertrifft.

Das gewonnene Resultat verallgemeinert die bekannten Sätze von Haar, Kolmogoroff, Rubinstein und Singer.