II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1962

# ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ СЕРИЙ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Б. РЯУБА

Рассматривается последовательность серий случайных величин

$$X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ \ldots,\ X_n^{(n)} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Случайные величины, образующие $n$-ю серию $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, слабо зависимы и $\mathbf{M}X_i^{(n)}=0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$. Слабая зависимость определяется тем, что с вероятностью 1

$$\sup_k \sup_{A\in\mathfrak{F}_{k+\tau,\,n}^{(n)}} \left|\mathbf{P}(A\mid\mathfrak{F}_{1k}^{(n)})-\mathbf{P}(A)\right| \leqslant \frac{1}{(\alpha_n\tau)^s+1}, \tag{2}$$

где

$$\alpha_n n^{\frac{1}{3}} \to \infty \quad (n\to\infty), \tag{3}$$

а $s$ — сколь угодно большое постоянное число. Здесь $\mathfrak{F}_{kl}^{(n)}$ $(1\leqslant k<l\leqslant n)$ — $\sigma$-алгебра, порожденная событиями вида

$$\{(X_{i_1}^{(n)},\ X_{i_2}^{(n)},\ \ldots,\ X_{i_p}^{(n)})\in B\} \quad (k<i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant l),$$

$B$ — $p$-мерное борелевское множество.

Во всем дальнейшем будем предполагать, что случайные величины (1) удовлетворяют условию: с вероятностью 1 при $\tau\geqslant\frac{1}{\alpha_n}$

$$\sup_t \sup_{A\in\mathfrak{F}_{t+\tau,\,n}^{(n)}} \left|\mathbf{P}(A\mid\mathfrak{F}_{1,\,t+\tau}^{(n)})-\mathbf{P}(A\mid\mathfrak{F}_{t,\,t+\tau}^{(n)})\right| \leqslant \frac{1}{n^u}, \tag{4}$$

для некоторого $u>4$.

Положим

$$S_{kl}^{(n)}=\sum_{i=k+1}^{l} X_i^{(n)},\quad S_n=S_{0n}^{(n)},\quad \mathbf{D}\,S_n=B_n^2,$$

$$\overline{S}_n=\frac{S_n}{B_n},\quad F_k^{(n)}(x)=\mathbf{P}\{X_k^{(n)}<x\}.$$

Во всем дальнейшем также будем предполагать, что при $l-k\geqslant\frac{1}{\alpha_n}$

$$\mathbf{D}\,S_{kl}^{(n)}\alpha_n^2 n(l-k)^{-1}\to\infty \quad (n\to\infty). \tag{5}$$

Тогда справедливы:

**Теорема 1.** *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3), (4), (5) *и для всех $i$ и $n$*

$$|X_i^{(n)}|\leqslant C<\infty, \tag{6}$$

*то равномерно для всех* $x$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\overline{S_n} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{7}$$

**Теорема 2.** *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3), (4), (5) *и с вероятностью* 1 *для всех* $i$ *и* $n$

$$|X_i^{(n)}| \leqslant C_n, \tag{8}$$

*где* $C_n \geqslant c' > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и*

$$C_n B_n^{-1} \alpha_n^{-1} \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{9}$$

*то справедливо утверждение* (7) *теоремы* 1.

**Теорема 3.** *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3), (4), (5) *и для всех* $i$ *и* $n$

$$\mathbf{D} X_i^{(n)} \leqslant C < \infty, \tag{10}$$

*и для любого* $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2 \alpha_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > aB_n\alpha_n} x^2 \, dF_k^{(n)}(x) = 0, \tag{11}$$

*то справедливо утверждение* (7) *теоремы* 1.

**Теорема 4.** *Если случайные величины* (1), *удовлетворяют условиям* (2), (3), (4), (5) *и для некоторого* $m > 2$

$$\mathbf{M} |X_i^{(n)}| \leqslant \gamma_m < \infty, \tag{12}$$

*для всех* $i$ *и* $n$, *то для выполнения утверждения* (7) *теоремы* 1, *достаточно, чтобы при* $n \to \infty$

$$\alpha_n^{m-1} B_n^m n^{-1} \to \infty. \tag{13}$$

2. Доказательство теоремы 1. Изучение суммы $\overline{S_n}$ начнем с её сведения к сумме независимых случайных величин. Для этой цели вводим обозначения:

$$\left\{\begin{aligned} & 0 = l_0^{(n)} < k_1^{(n)} < l_1^{(n)} < \ldots < l_{g(n)}^{(n)} < k_{g(n)+1}^{(n)} = n, \\ & \alpha_n n^{\frac{1}{3}} \geqslant f(n), \\ & \varepsilon_n = \frac{1}{(g(n))^s + 1}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} & S_i^{(n)} = S_{l_i k_{i+1}}^{(n)} && \bigl(i = 0, 1, \ldots, g(n)\bigr), \\ & Y_i^{(n)} = \frac{S_i^{(n)}}{B_n} && \bigl(i = 0, 1, \ldots, g(n)\bigr), \\ & Z_i^{(n)} = \frac{S_{k_i l_i}^{(n)}}{B_n} && \bigl(i = 1, 2, \ldots, g(n)\bigr). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Иногда, для простоты, верхний индекс $n$ будем опускать. И так верна

**Лемма 1.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при обозначениях* (14), (15) *и при*

$$l_i - k_i = \left[\frac{g(n)}{\alpha_n} + 1\right] \quad \bigl(i = 1, 2, \ldots, g(n)\bigr) \tag{16}$$

*числа $l_i$, $k_{i+1}$ можно подобрать так, чтобы при $n \to \infty$*

1. $g(n) \to \infty$;
2. $\frac{g^2(n)}{f(n)} \to 0$;
3. $\left| \mathbf{M}\left\{ \exp it \sum_{i=0}^{g(n)} S_i^{(n)} \right\} - \prod_{i=0}^{g(n)} \mathbf{M}\{\exp itS_i^{(n)}\} \right| \leqslant \varepsilon_n g(n)$;
4. $\left| \mathbf{D} \sum_{i=0}^{g(n)} S_i^{(n)} - \sum_{i=0}^{g(n)} \mathbf{D} S_i^{(n)} \right| \leqslant K \sqrt{\varepsilon_n}\, \mathbf{D} \sum_{i=0}^{g(n)} S_i^{(n)}$,

   $\left| \mathbf{D} \sum_{i=0}^{g(n)} S_i^{(n)} - \sum_{i=0}^{g(n)} \mathbf{D} S_i^{(n)} \right| \leqslant K \sqrt{\varepsilon_n} \sum_{i=0}^{g(n)} \mathbf{D} S_i^{(n)}$;
5. $\mathbf{D} \sum_{i=1}^{g(n)} Z_i^{(n)} \to 0$, $\sum_{i=1}^{g(n)} \mathbf{D} Z_i^{(n)} \to 0$;
6. $\mathbf{D} Y_i^{(n)} \to 0 \quad \left(i=0, 1, \ldots, g(n)\right)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 в работе [3], поэтому его опускаем.

В дальнейшем будем пользоваться двумя леммами. Их доказательство можно найти в работе [2] (лемма 7) и в работе [8] (лемма 3, стр. 277).

**Лемма 2.** *Если $Y_0^{(n)}$, $Y_1^{(n)}$, $\ldots$, $Y_{g(n)}^{(n)}$ при фиксированном $n$, являются независимыми случайными величинами, причем*

$$\overline{\overline{S}}_{g(n)} = \sum_{i=0}^{g(n)} Y_i^{(n)}, \quad \mathbf{D}\, \overline{\overline{S}}_{g(n)} = 1, \tag{17}$$

$$\mathbf{D} Y_i^{(n)} \to 0 \ (n \to \infty) \qquad \left(i=0, 1, \ldots, g(n)\right), \tag{18}$$

$$Y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{r} V_{ij}^{(n)}, \quad \mathbf{D} V_{ij}^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{19}$$

$\left(i=0, 1, \ldots, g(n);\ j=1, 2, \ldots, r;\ r \geqslant 2 - \textit{целое постоянное число}\right)$,

$$\sum_{i=0}^{g(n)} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{D} V_{ij}^{(n)} \leqslant L < \infty, \tag{20}$$

*и случайные величины $V_{ij}^{(n)}$, $V_{kl}^{(n)}$ независимы при $i \neq k$ и при любых $j$ и $l$, тогда $\overline{\overline{S}}_{g(n)}$ асимптотически нормальна, если только*

$$\sum_{i=0}^{g(n)} V_{ij}^{(n)},$$

*при всех $j$, асимптотически нормальны.*

**Лемма 3.** *Пусть $U$, $U_1$, $U_2$, $\ldots$, $U_r$ — случайные величины, имеющие соответственно функции распределения*

$$F(x), \quad F_1(x), \quad F_2(x), \quad \ldots, \quad F_r(x)$$

*и*

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_r.$$

*Тогда для любого* $a>0$

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\, dF(x) \leqslant r^2 \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{|x|>\frac{a}{r}} x^2\, dF_i(x). \tag{21}$$

Покажем, как разбить $Y_i^{(n)}$ на $V_{ij}^{(n)}$ так, чтобы выполнялись условия (19) и (20).

Для этой цели введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&r_m = l_i + m\left[\frac{g(n)}{\alpha_n}+1\right],\\
&r_{s_i} = k_{i+1},\\
&r_{s_i-1} < k_{i+1} < r_{s_i-1} + \left[\frac{g(n)}{\alpha_n}+1\right],\\
&m=0,\ 1,\ \ldots,\ s_i-1,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ g(n);
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = 0,\\
&\gamma_m = \mathbf{M}\,(S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}),\\
&\delta_m = S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} - \gamma_m,\\
&\varphi_m = \gamma_{m+1} + S^{(n)}_{r_m r_{m+1}} - \gamma_m,\\
&m=0,\ 1,\ \ldots,\ s_i-1,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ g(n).
\end{aligned} \tag{23}$$

Также, как и в работе [3], легко показать, что

$$\begin{aligned}
|\gamma_m| &\leqslant 5C\left[\frac{g(n)}{\alpha_n}+1\right],\\
\mathbf{M}\,(\delta_m \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}) &= 0,\\
\mathbf{M}\,\delta_m &= 0,\\
\mathbf{M}\,\gamma_m &= 0,\\
\mathbf{MD}\,(S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}) &= \mathbf{D}\,\delta_m,\\
\mathbf{DM}\,(S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}) &= \mathbf{D}\gamma_m,\\
\mathbf{D}\, S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} &= \mathbf{D}\,\delta_m + \mathbf{D}\,\gamma_m.
\end{aligned} \tag{24}$$

**Лемма 4.** *Если условия теоремы* 1 *выполнены, то существует постоянная* $\lambda>0$, *такая что*

$$\mathbf{D}\, S^{(n)}_{l_i k_{i+1}} \geqslant \lambda \sum_{m=0}^{s_i} \mathbf{D}\,\varphi_m. \tag{25}$$

Доказательство. Так как

$$S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} = S^{(n)}_{r_{m+1} k_{i+1}} + S^{(n)}_{r_m r_{m+1}} = \delta_{m+1} + \gamma_{m+1} + S^{(n)}_{r_m r_{m+1}},$$

то

$$\begin{aligned}
\mathbf{MD}\,(S^{(n)}_{r_m k_{i+1}} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}) &= \mathbf{MD}\,(\delta_{m+1} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}) + \mathbf{MD}\,(\gamma_{m+1} + S^{(n)}_{r_m r_{m+1}} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m}) +\\
&- \mathbf{M}\Big\{\Big(\delta_{m+1} - \mathbf{M}\,(\delta_{m+1} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m})\Big)\Big(\gamma_{m+1} + S^{(n)}_{r_m r_{m+1}} -\\
&- \mathbf{M}\,(\gamma_{m+1} + S^{(n)}_{r_m r_{m+1}} \mid \mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1} r_m})\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Из условия (4) и свойств условного математического ожидания (см. [7]) следует, что

$$\left|\mathbf{M}\,(\delta_{m+1}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})\right|=\left|\mathbf{M}\,(S^{(n)}_{r_{m+1}k_{i+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})-\right.$$

$$\left.-\mathbf{M}\,(S^{(n)}_{r_{m+1}k_{i+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m}\times\mathfrak{F}^{(n)}_{r_m r_{m+1}})\right|=O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right), \tag{27}$$

$$\mathbf{M}\,\{\,\delta_{m+1}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}})\,\}=0, \tag{28}$$

$$\mathbf{M}\,\{\,\delta_{m+1}\,\mathbf{M}\,(\gamma_{m+1}+S^{(r)}_{r_m r_{m+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})\,\}=$$

$$=\mathbf{M}\left\{\mathbf{M}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})\,\mathbf{M}\,(\delta_{m+1}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m}\right\}=O\left(\frac{1}{n^{r-2}}\right), \tag{29}$$

$$\mathbf{MD}\,(\delta_{m+1}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=\mathbf{D}\,\delta_{m+1}-\mathbf{DM}\,(\delta_{m+1}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=\mathbf{D}\,\delta_{m+1}+O\left(\frac{1}{n^{r-2}}\right). \tag{30}$$

Подставляя (27), (28), (29), (30) и (24) в (26) получаем, что

$$\mathbf{D}\,\delta_m=\mathbf{D}\,\delta_{m+1}+\mathbf{MD}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m}). \tag{31}$$

Так как

$$\gamma_m=\mathbf{M}\,(S^{(n)}_{r_m k_{i+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=\mathbf{M}\,(\gamma_{m+1}+\delta_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=$$

$$=\mathbf{M}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right),$$

то

$$\mathbf{MD}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=\mathbf{MD}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}-\gamma_m\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=$$

$$=\mathbf{D}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}-\gamma_m)-\mathbf{DM}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}-\gamma_m\,|\,\mathfrak{F}^{(n)}_{r_{m-1}r_m})=$$

$$=\mathbf{D}\,(\gamma_{m+1}+S^{(n)}_{r_m r_{m+1}}-\gamma_m)+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right). \tag{32}$$

По определению $\mathbf{D}\,\delta_0=\mathbf{D}\,S^{(n)}_{l_i k_{i+1}}$; просуммировав равенство (31) и приняв во внимание (32), получаем то, что и требовалось доказать.

Замечание. Из определения $\varphi_m$ в равенстве (23) следует, что

$$|\,\varphi_m\,|\leqslant N\left|\frac{g\,(n)}{\alpha_n}\right|, \tag{33}$$

где $N$ — некоторая постоянная.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}\xi_{1i}&=\varphi_0+\varphi_3+\ldots+\varphi_{s_{1i}},\\ \xi_{2i}&=\varphi_1+\varphi_4+\ldots+\varphi_{s_{2i}},\\ \xi_{3i}&=\varphi_2+\varphi_5+\ldots+\varphi_{s_3 i},\\ \xi_{4i}&=\gamma_{s_i}\end{aligned} \tag{34}$$

(здесь $s_{hi}$ равняется одному из чисел $s_i-3$, $s_i-2$, $s_i-1$ и $s_{hi}\equiv(h-1)\,\mathrm{mod}\,3$; $h=1,\ 2,\ 3$; $i-0,\ 1,\ \ldots,\ g\,(n)$).

В лемме 2 положим

$$r=4,$$

$$V^{(n)}_{ij}=\frac{\xi_{ji}}{B_n}. \tag{35}$$

Осталось показать, что $\sum_{i=0}^{g(n)} V^{(n)}_{ij}$ асимптотически нормальны при $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Доказательство проведем для случая $j=1$. Для $j=2,\ 3,\ 4$ доказательство проводится дословно, как и при $j=1$.

Из (34) следует, что

$$S^{(n)}_{l,k_{l+1}}=\xi_{1i}+\xi_{2i}+\xi_{3i}+\xi_{4i}\,. \tag{36}$$

Обозначим через

$$\eta^{(n)}_{im}=\frac{\varphi_{3m}}{\sqrt{\lambda B_n}} \qquad (3m=0,\ 1,\ \ldots,\ s_{1i}),$$

$$\pi^{(n)}_i=\sum_{3m=0}^{s_{1i}}\eta^{(n)}_{im}\,,$$

$$T_n=\sum_{i=0}^{g(n)}\pi^{(n)}_i\,, \tag{37}$$

$$H^{(n)}_i(x)=\mathbf{P}\{\pi^{(n)}_i<x\},$$

из леммы 4 получаем, что

$$\sum_{i=0}^{g(n)}\sum_{m=0}^{s_{1i}}\mathbf{D}\,\eta^{(n)}_{im}\leqslant 1, \tag{38}$$

а из соотношения (33) заключаем, что

$$|\eta^{(n)}_{im}|\leqslant\psi(n), \tag{39}$$

где $\psi(n)\to 0$ $(n\to\infty)$.

Как и в лемме 1, можно показать, что

$$\left|\sum_{i=0}^{g(n)}\mathbf{D}\,\pi^{(n)}_i-\sum_{i=0}^{g(n)}\sum_{m=0}^{s_{1i}}\mathbf{D}\,\eta^{(n)}_{im}\right|\leqslant\sqrt{\varepsilon_n}\,,$$

$$\left|\mathbf{D}\,T_n-\sum_{i=0}^{g(n)}\mathbf{D}\,\pi^{(n)}_i\right|\leqslant\sqrt{\varepsilon_n}\,. \tag{40}$$

Следовательно, остается доказать, что $T_n$ асимптотически нормальна, т. е. (см. [6]) для любого $a>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{g(n)}\int\limits_{|x|>a}x^2\,dH^{(n)}_i(x)=0. \tag{41}$$

Доказательством этого соотношения в дальнейшем и займемся, при этом, существенно воспользуемся результатом П. Леви (см. [5], стр. 243) для мартингалов.

Последовательность случайных величин $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n$ вместе с последовательностью $\sigma$-алгебр $\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{F}_n$ называется **мартингалом типа Леви**, если

1. $\zeta_i$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_i$;
2. При любом $i\leqslant n$

$$\mathbf{M}\{\zeta_i\,|\,\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\ldots\times\mathfrak{F}_{i-1}\}=0.$$

Иногда будем считать $n=\infty$. Из определения следует, что

$$\mathbf{D}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\,\zeta_i,$$

если эти дисперсии существуют.

Введем случайные величины

$$\begin{aligned} &d_0 = \mathbf{M}\zeta_1^2, \\ &d_i = \mathbf{M}\{\zeta_{i+1}^2 \mid \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_i\}, \\ &(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned} \tag{42}$$

Определим случайный индекс $\nu$ при помощи неравенства

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_{\nu-1} < 1 \leqslant d_0 + d_1 + \ldots + d_\nu. \tag{43}$$

Если дополнительно предположить, что с вероятностью 1

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i \geqslant 1, \tag{44}$$

то неравенства (43) определяют $\nu$ однозначно и событие

$$\{\nu = i\} \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_i.$$

Далее определим случайную величину $\gamma$ при помощи равенства

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_{\nu-1} + \gamma d_\nu = 1. \tag{45}$$

Очевидно, что $0 < \gamma \leqslant 1$ и при любом $x$

$$\{\gamma < x\} \cap \{\nu = i\} \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n.$$

Наконец, пусть

$$\begin{aligned} &\tilde{S} = \zeta_1 + \ldots + \zeta_\nu + \sqrt{\gamma}\, \zeta_{\nu+1}, \\ &\tilde{F}(x) = \mathbf{P}\{\tilde{S} < x\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Легко показать, что

$$\mathbf{M}\tilde{S} = 0, \quad \mathbf{D}\tilde{S} = 1. \tag{47}$$

После такого введения мы можем сформулировать следующий результат, принадлежащий П. Леви (см. [5], стр. 243):

**Теорема Леви.** *Пусть для некоторого постоянного числа* $\delta > 0$ *и для всех* $i$ *с вероятностью* 1

$$|\zeta_i| < \delta. \tag{48}$$

*Тогда для всех* $x$

$$\left| \mathbf{P}\{\tilde{S} < x\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right| \leqslant 6\delta^{\frac{1}{4}}. \tag{49}$$

Нас интересует не сумма $\tilde{S}$, а

$$S = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n, \quad F(x) = \mathbf{P}\{S < x\}. \tag{50}$$

В дальнейшем будем предполагать, что случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ при всех $i > j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ с вероятностью 1 удовлетворяют условиям $\left(\text{ср. } (2), (4)\right)$: существуют $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$ и $u \geqslant 4$, такие что

$$\begin{aligned} &\sup_{A_i \in \mathfrak{F}_i \times \ldots \times \mathfrak{F}_n} \left| \mathbf{P}\{A_i \mid \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_j\} - \mathbf{P}\{A_i\} \right| \leqslant \varepsilon^{i-j}, \\ &\sup_{A_i \in \mathfrak{F}_i \times \ldots \times \mathfrak{F}_n} \left| \mathbf{P}\{A_i \mid \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_j\} - \mathbf{P}\{A_i \mid \mathfrak{F}_j\} \right| \leqslant n^{-u}. \end{aligned} \tag{51}$$

Для сравнения величин $S$ и $\tilde{S}$ нам нужна

**Лемма 5.** *Если последовательность* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, *удовлетворяющая условиям* (44), (48), (51), *образует мартингал типа Леви, причем*

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{D}\zeta_i < \infty & (i=1, 2, \ldots, n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}\zeta_i = 1, & \end{array}\right. \tag{52}$$

*то для любого* $a > 0$

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\, dF(x) \leqslant L_1 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty} x^2 e^{\frac{x^2}{2}}\, dx + 6a^2 \delta^{\frac{1}{4}} + \sqrt{4\delta^2 + c^2\varepsilon}\right), \tag{53}$$

*где* $C$ — *конечная абсолютная постоянная.*

Доказательство. Для того, чтобы применить теорему Леви, определим дополнительно случайные величины $\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \ldots$ так, чтобы эти величины были независимы и не зависели от $\zeta_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и каждая из них имела равномерное распределение на отрезке $[-\delta, \delta]$. Следовательно, бесконечная последовательность $\{\zeta_i, i=1, 2, \ldots\}$, при предположении $\mathbf{M}\zeta_i = 0$ $(i=n+1, n+2, \ldots)$, образует мартингал типа Леви и удовлетворяет условию (44). Из теоремы Леви следует, что

$$\left| \int\limits_{|x|<a} x^2\, d\tilde{F}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right| \leqslant 6a^2\delta^{\frac{1}{4}}, \tag{54}$$

и так как $\mathbf{M}\tilde{S}^2 = 1$, то

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\, d\tilde{F}(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + 6a^2 \delta^{\frac{1}{4}}. \tag{55}$$

Условия (48), (51) показывают, что к случайным величинам $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ можно применить утверждение 4 леммы 1. Следовательно

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\zeta_i - 1 \right| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}. \tag{56}$$

Так как $\mathbf{M}d_i = \mathbf{D}\zeta_i$, то

$$\left| \mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i\right) - 1 \right| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}. \tag{57}$$

Из условия (48) следует, что

$$|d_i| \leqslant \delta^2 \qquad (i=0, 1, \ldots). \tag{58}$$

Введем случайные величины

$$\begin{array}{ll} \tilde{d}_0 = \mathbf{M}\zeta_1^2, & \\ \tilde{d}_i = \mathbf{M}\{\zeta_{i+1}^2 \mid \mathfrak{F}_i\} & (i=1, 2, \ldots). \end{array} \tag{42A}$$

Принимая во внимание условия (48), (51) получаем, что

$$\begin{gathered}\mathbf{D}\sum_{i=0}^{n-1}(d_i-\tilde{d}_i)=O\left(\frac{1}{n^3}\right),\\ \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{D}(d_i-\tilde{d}_i)=O\left(\frac{1}{n^8}\right).\end{gathered}\tag{59}$$

Поэтому, изменив $d_i$ на множестве, вероятность которого при $n\to\infty$ стремится к нулю, можно добиться (говоря грубо), что $d_i$ зависит не от всего ,,прошлого'' $\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\ldots\times\mathfrak{F}_i$, а только от ,,вчерашнего'' $\mathfrak{F}_i$. Следовательно, применив (59) и утверждение 4 леммы 1, а затем (58) и (57), получаем, что

$$\mathbf{D}\sum_{i=0}^{n-1}d_i=\mathbf{D}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((d_i-\tilde{d}_i)+\tilde{d}_i\right)\right)\leqslant 2\left(\mathbf{D}\sum_{i=0}^{n-1}(d_i-\tilde{d}_i)+\mathbf{D}\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{d}_i\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\delta^2(1+K\sqrt{\varepsilon})\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{M}\tilde{d}_i\right)\leqslant 4\delta^2.\tag{60}$$

Из (57) и (60) следует, что

$$\mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1}d_i-1\right)=\mathbf{D}\sum_{i=0}^{n-1}d_i+\left[\mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1}d_i\right)-1\right]^2\leqslant 4\delta^2+c^2\varepsilon.\tag{61}$$

При сравнении $S$ и $\tilde{S}$ нам нужно различать два случая: $\{\nu<n\}$ и $\{\nu\geqslant n\}$. Связи с этим определим вспомогательные случайные величины:

$$\chi_i=\begin{cases}1, & \text{если } \nu<i-1,\\ 1-\sqrt{\gamma}, & \text{если } \nu=i-1,\\ 0, & \text{если } \nu>i-1,\end{cases}\tag{62}$$

$$\tilde{\zeta}_i=\chi_i\zeta_i,\tag{63}$$

$$(S-\tilde{S})'=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\zeta}_i.\tag{64}$$

Из общей теории мартингалов (см. [7], гл. VII, § 2) следует, что последовательность $\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \ldots, \tilde{\zeta}_n$ тоже образует мартингал, так что

$$\mathbf{M}\tilde{\zeta}_i=0,$$

$$\mathbf{M}[(S-\tilde{S})']^2=\mathbf{D}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\zeta}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\tilde{\zeta}_i^2,\tag{65}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\tilde{\zeta}_i^2=\mathbf{M}\{\mathbf{M}[(\chi_i\zeta_i)^2\mid\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\ldots\times\mathfrak{F}_{i-1}]\}=\\ =\mathbf{M}\{\chi_i^2\mathbf{M}[\zeta_i^2\mid\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\ldots\times\mathfrak{F}_{i-1}]\}=\mathbf{M}\{\chi_i^2 d_{i-1}\}.\end{gathered}\tag{66}$$

Из определения $\nu$ и $\gamma$ и неравенства $1-\gamma\geqslant(1-\sqrt{\gamma})^2$ находим, что

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}d_i-1\right)^+\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}d_i\chi_{i+1}.\tag{67}$$

Сравнивая (66), (67) и (65) получаем, что

$$\mathbf{M}\,[S-\tilde{S})']^2 \leqslant \mathbf{M}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big)^+\Big]. \tag{68}$$

Положив

$$(S-\tilde{S})'' = S - \tilde{S} - (S-\tilde{S})', \tag{64A}$$

и проводив аналогичные рассуждения как и для $(S-\tilde{S})'$ получим, что

$$\mathbf{M}\,[(S-\tilde{S})'']^2 \leqslant \mathbf{M}\,\Big|\Big(\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big)^-\Big|. \tag{69}$$

Окончательно из (68), (69) и (61) получаем, что

$$\mathbf{M}\,(S-\tilde{S})^2 = \mathbf{M}\,\{(S-\tilde{S})'\}^2 + \mathbf{M}\,\{(S-\tilde{S})''\}^2 \leqslant \mathbf{M}\,\Big|\sum_{i=0}^{n-1} d_i - 1\Big| \leqslant \sqrt{4\delta^2 + c^2\varepsilon}. \tag{70}$$

Применив лемму 3 к сумме $(S-\tilde{S})+\tilde{S}$ и принимая во внимание (55) и (70), получаем, что

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\, dF(x) \leqslant \Big(2+\frac{2}{a^2}\Big)\Big[\int\limits_{|x|>\frac{a}{2}} x^2\, d\tilde{F}(x) + \mathbf{M}\,(S-\tilde{S})^2\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \Big(2+\frac{2}{a^2}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + 6a^2\,\delta^{\frac{1}{4}} + \sqrt{4\delta^2 + c^2\varepsilon}, \tag{71}$$

что и требовалось доказать.

Обобщим лемму 5 на тот случай, когда величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ не образуют мартингала.

**Лемма 6.** *Если последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ удовлетворяет условиям* (44), (48), (51) *и*

$$\mathbf{M}\,\zeta_i = 0, \quad \mathbf{D}\,\zeta_i < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\,\zeta_i = 1. \tag{52}$$

*Тогда для любого $r > 1$ и любого $a > 0$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{|x|>a} x^2\, dF(x) \leqslant L_1 r^3 \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + 12a^2\,\delta^{\frac{1}{8}} + \sqrt{4\delta + c^2\varepsilon} + (\rho)^{r-1}\Big], \tag{72}$$

*где* $L < \infty$, $0 < \rho < 1$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \zeta_i^{(1)} = \zeta_i, \\ \zeta_i^{(s)} = \mathbf{M}\,\{\zeta_{i+1}^{(s-1)} \mid \mathfrak{F}_i\}, \\ s = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{73}$$

Как легко видеть, при всех $i$ и $s$

$$\mathbf{M}\,\zeta_i^{(s)} = 0. \tag{74}$$

Положим

$$\begin{cases} \eta_i^{(s)} = \zeta_{i+1}^{(s-1)} - \zeta_i^{(s)}, \\ i=s, \quad s+1, \ \dots, \ n-1, \\ \eta_n^{(s)} = \zeta_n^{(s)}. \end{cases} \tag{75}$$

Как и в равенствах (24), можно показать, что

$$\mathbf{D}\,\eta_i^{(s)} + \mathbf{D}\,\zeta_{i+1}^{(s-1)} = \mathbf{D}\,\zeta_i^{(s)}. \tag{76}$$

Так как всегда можно считать, что две случайные величины образуют цепь Маркова, то как и в работе [2] (см. леммы 4 и 4′, стр. 376) можно показать, что существует такое число $0<\rho<1$, что

$$\mathbf{D}\,\zeta_i^{(s)} \leqslant \rho\,\mathbf{D}\,\zeta_{i+1}^{(s-1)} \qquad (i=s, \ s+1, \ \dots, \ n-1). \tag{77}$$

Из (77) и (52) находим, что

$$\sum_{i=s}^{n} \mathbf{D}\,\zeta_i^{(s)} \leqslant (\rho)^{s-1}. \tag{78}$$

Ввиду определения $\eta_i^{(s)}$ в равенстве (75)

$$S = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \eta_i^{(2)} + \dots + \sum_{i=r}^{n} \eta_i^{(r)} + \sum_{i=r+1}^{n} \zeta_i^{(r+1)}, \tag{79}$$

и $\eta_i^{(s)}$ измеримо относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_i \times \mathfrak{F}_{i+1}$.

Так как случайные величины $\zeta_i$ удовлетворяют условиям (51), то

$$\mathbf{M}\{\eta_i^{(s)} \mid \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \mathfrak{F}_i\} = O(n^{-3}) \qquad (i=s, \ s+1, \ \dots, \ n-1),$$

поэтому, изменив $\eta_i^{(s)}$ на множестве, вероятность которой при $n\to\infty$ стремится к 0, не ограничивая общности, можем считать, что

$$\mathbf{M}\{\eta_i^{(s)} \mid \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_i\} = 0 \qquad (i=s, \ s+1, \ \dots, \ n-1).$$

Последнее равенство показывает, что случайные величины (при фиксированном $s$) образуют мартингал. Поэтому применив к разложению суммы $S$ в равенстве (79) лемму 3 и лемму 5, получим при соответствующем подборе параметров то, что и требовалось доказать.

Переходя к доказательству неравенства (41), в леммах 5 и 6 положим

$$\zeta_m = \eta_{lm}, \quad \delta = \psi(n),$$
$$\varepsilon = \varepsilon_n, \quad S = \pi_i^{(n)},$$
$$H_i(x) = F(x), \qquad \big(i=0, \ 1, \ \dots, \ g(n)\big).$$

Доказательство правильности равенства (41) очевидно после доказательств лемм 5 и 6.

И так теорема 1 доказана полностью.

3. Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1, если всюду заменить $C$ на $C_n$ и положить

$$g(n) = [C_n B_n^{-1} \alpha_n^{-1}]^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательства теорем 3 и 4 проводится дословно также, как и доказательства теорем 1 и 2 в работе [4].

В заключении выражаю глубокую признательность В. Статулявичюсу за постоянное внимание к работе и ценные указания.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
15.VI.1962

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Добрушин. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова I. Теор. вероят. и ее прим., 1, 1 (1956), 72—89.
2. Р. Л. Добрушин. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова II. Теор. вероят. и ее прим., 1, 4 (1956), 365—425.
3. Б. А. Ряуба. О применимости центральной предельной теоремы к суммам серий слабо зависимых случайных величин. Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. ГИПНЛ, Вильнюс, 1961.
4. Б. А. Ряуба. О центральной предельной теореме для сумм серий слабо зависимых случайных величин. Литовский математический сборник, 2, 1 (1962).
5. P. Lévy. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1937.
6. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
7. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы. ИИЛ, Москва, 1956.
8. В. Статулявичюс. Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова. Литовский математический сборник, 1, 1—2 (1961), 231—314.

## CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA SILPNAI PRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SERIJŲ SUMOMS

B. RIAUBA

### *(Reziumė)*

Darbe įrodoma keletas centrinių ribinių teoremų silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių serijų sumoms. Jei atsitiktiniai dydžiai $\left\{X_i^{(n)},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right\}$ patenkina (2), (3), (4) ir (5) sąlygas, tada, kad galiotų visiems $x$ pareinamybė (kai $n\to\infty$)

$$\mathbf{P}\{\overline{S}_n<x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{1}$$

užtenka, kad būtų patenkinta arba (6), arba (8) ir (9), arba (10) ir (11) sąlygos. (1) pareinamybėje

$$\overline{S}_n=\frac{S_n}{B_n},\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i^{(n)},$$

$$\mathbf{M}\,S_n=0,\ \ \mathbf{D}\,S_n=B_n^2.$$

# CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SUMS OF SERIES WEAKLY DEPENDENT RANDOM VARIABLES

B. RIAUBA

*(Summary)*

We prove several central limit theorems for sums of series weakly dependent random variables. If random variables $\left\{ X_i^{(n)},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \right\}$ are satisfying conditions (2), (3), (4) and (5), then for all $x$ holds ($n\to\infty$)

$$\mathbf{P}\{\overline{S}_n<x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{+\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{1}$$

when conditions (6), or (8) and (9), or (10) and (11), or (12) and (13) are satisfied. In (1)

$$\overline{S}_n=\frac{S_n}{B_n},\quad S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)},$$

$$\mathbf{M}\, S_n=0,\quad \mathbf{D}\, S_n=B_n^2.$$