II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1962

МЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ПОЛЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В. Г. СПРИНДЖУК

Пусть K — конечное поле характеристики p, p^f — число элементов K, пусть $K\langle x\rangle$ — поле формальных лорановских рядов $\omega(x)$ от x над K,

$$\omega(x)=\sum_{j\geq j_0}\alpha_j x^{-j},\ \ \alpha_{j_0}\neq 0. \tag{1}$$

В поле $K\langle x\rangle$ определим нормирование $|\omega(x)|$ полагая для элемента (1) поля

$$\left|\omega(x)\right|=p^{-fj_0}. \tag{2}$$

Определенное таким путем нормирование индуцирует некоторое нормирование в поле $\overline{K}\langle x^{\frac{1}{m}}\rangle$, где $\overline{K}$ алгебраическое замыкание поля K, m — натуральное число. Для этого нормирования мы сохраним обозначение (2).

В поле $K\langle x\rangle$ можно следующим образом ввести лебеговскую меру. Пусть $\alpha_j^*, \alpha_{j+1}^*, \ldots, \alpha_m^*$ — элементы из K. Множество $I=I(\alpha_j^*, \alpha_{j+1}^*, \ldots, \alpha_m^*$ элементов из $K\langle x\rangle$ вида

$$\omega(x)=\sum_{i=j}^{m}\alpha_i^* x^{-i}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\alpha_i x^{-i},\ \ \alpha_i\in K \tag{3}$$

(α_i меняются свободно) назовем элементарным цилиндром, а конечную сумму непересекающихся элементарных цилиндров назовем цилиндром. Для элементарного цилиндра (3) полагаем

$$\mu(I)=p^{-fm},$$

и меру цилиндра определяем как сумму мер составляющих его элементарных цилиндров. Далее рассматриваем расширение введенной меры на наименьшее σ-поле над множеством цилиндров.

Легко видеть, что множество элементов $\omega(x)\in K\langle x\rangle$, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega-\omega_0|<\delta\ \ (\delta>0,\ \ \omega_0(x)\in K\langle x\rangle),$$

имеет меру p^{-fm}, $m=\left[-\frac{\ln\delta}{f\ln p}\right]$.

Будем называть целым полином $P(z)$ с коэффициентами из кольца $K[x]$,

$$P(z)=a_0(x)+a_1(x)\,z+\cdots+a_n(x)z^n,\ \ a_i(x)\in K[x].$$

Высоту H полинома $P(z)$ определяем равенством

$$H = \overleftarrow{|P|} = \max(|a_0(x)|, |a_1(x)|, \ldots, |a_n(x)|).$$

Пусть $\omega = \omega(x)$ — произвольный элемент из $K\langle x\rangle$.

Положим

$$w_n(\omega, H) = \min|P(\omega)|,$$

где минимум берется по множеству всех целых полиномов $P(z)$ высоты не более H, степени не более n, с условием $P(\omega) \neq 0$. Положим далее

$$w_n(\omega) = -\varliminf_{H\to\infty} \frac{\ln w_n(\omega, H)}{\ln H}.$$

Основываясь на величинах $w_n(\omega)$, можно ввести в поле $K\langle x\rangle$ классификацию элементов, аналогичную известной классификации чисел К. Малера [1]. Мы не будем останавливаться на этом, но рассмотрим аналог теоремы К. Малера [2] о мере множества s — чисел. Метод рассуждений основан на идеях статьи [6] с применением недавних конструктивных соображений, изложенных в статье Б. Фолькмана [5] и в статье автора „К гипотезе К. Малера о мере множества s — чисел", помещенной в этом выпуске сборника.

Результат, который мы хотим доказать, заключает в себе следующая

Гипотеза: *при любом натуральном n для почти всех элементов ω поля $K\langle x\rangle$ верно равенство*

$$w_n(\omega) = n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Мы докажем в этой статье, что для любого трансцендентного элемента ω поля $K\langle x\rangle$

$$w_n(\omega) \geqslant n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

тогда как для почти всех элементов

$$w_n(\omega) < \frac{4}{3}n \qquad n = 1, 2, \ldots).$$

Кроме того, мы докажем существование таких чисел w_n, что почти всегда

$$w_n(\omega) = w_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В дальнейшем натуральное число n считаем фиксированным.

Лемма 1. *Пусть $H > 1$ — произвольно, $\omega_i \in K\langle x\rangle$,*

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |\omega_i(x)| \leqslant 1.$$

Тогда неравенство

$$|a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n| < H^{-n}$$

имеет ненулевое решение $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ в полиномах из $K[x]$ с условием

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i(x)| \leqslant H.$$

Доказательство. Пусть $h = \left[\frac{\ln H}{f\ln p}\right]$,

$$\Omega(x) = a_0(x)\,\omega_0(x) + \cdots + a_n(x)\,\omega_n(x) = \sum_{j=-h} \Omega_j x^{-j},$$

где Ω_j — линейные функции от коэффициентов полиномов $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$. Следовательно, эти полиномы можно выбрать таким образом, чтобы они в совокупности были отличны от нуля и чтобы удовлетворялись равенства

$$\Omega_j = 0 \qquad (j = -h, \ -h+1, \ \ldots, \ n(h+1)-1).$$

Но тогда

$$|\Omega(x)| \leqslant p^{-nf(h+1)} < H^{-n}.$$

Лемма 2. *Пусть $P(z)$ полином над $K\langle x\rangle$ степени n, высоты H. Тогда*

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant n} |P(x^j)| > c(n) H.$$

Доказательство. Полином $P(z)$ можно представить в виде

$$P(z) = P(1) Q_0(z) + \cdots + P(x^n) Q_n(z),$$

где

$$Q(z) = (z-1)(z-x) \ldots (z-x^n), \ Q_i = \frac{Q(z)}{(z-x^i) Q'(x^i)} \qquad (i = 0, \ 1, \ \ldots, \ n).$$

Из этого следует, что каждый коэффициент $a_j(x)$ полинома $P(z)$ можно представить в виде

$$a_j(x) = q_{oj}(x) P(1) + q_{ij}(x) P(x) + \cdots + q_{nj}(x) P(x^n),$$

если

$$Q_i(z) = q_{io} + q_{i}, \ z + \cdots + q_{in} z^n \qquad (i, \ j = 0, \ 1, \ \ldots, \ n).$$

Так как $|q_{ij}(x)| < c(n)$, то находим

$$|a_j(x)| < c(n) \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |P(x\ )|,$$

откуда и следует лемма.

Лемма 3. *Для любых полиномов $P_1(z)$, $P_2(z)$ степени не более n, с коэффициентами из $K\langle x\rangle$ имеем*

$$\overline{|P_1(z) P_2(z)|} \asymp \overline{|P_1(z)|} \ \overline{|P_2(z)|}.$$

Доказательство. Положим

$$P_{(j)}(z) = P(z + x^j), \ \overline{P}(z) = z^m P\left(\frac{1}{z}\right),$$

где m — степень $P(z)$. Очевидно, если

$$P(z) = P_1(z) P_2(z), \tag{4}$$

то

$$P_{(j)}(z) = P_{1(j)}(z) P_{2(j)}(z), \ \overline{P}(z) = \overline{P}_1(z) \overline{P}_2(z).$$

Определим полином $\overline{P}_{(j)}(z)$ как результат последовательных переходов

$$P(z) \to P_{(j)}(z), \ P(z) \to \overline{P}(z). \tag{5}$$

По лемме 2 для полинома (4) имеем

$$|P(x^j)| > c(n) \overline{|P|}$$

с некоторым j, $0 \leqslant j \leqslant 2n$. Тогда полином $\overline{P}_{(j)}(z)$ имеет корни y_ν с условием $|y_\nu| < c(n)$. Следовательно, высоты полиномов

$$\overline{P}_{(j)}(z), \ \overline{P}_{1(j)}(z), \ \overline{P}_{2(j)}(z)$$

имеют порядки старших коэффициентов, и для них утверждение леммы очевидно. Но преобразования (5) не изменяют порядка высоты полинома, если, как в нашем случае, $j < c(n)$.

Лемма 4. Пусть $\omega \in K\langle x\rangle$, *полином* $P(z)$ *степени* n *над кольцом* $\bar{K}[x^{\frac{1}{m}}]$ *не имеет кратных корней* y_ν,

$$|P(\omega)| < H^{-n\lambda}, \quad H = |\overline{P}|, \quad \lambda > 0,$$

и пусть

$$\min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\omega - y_\nu| = |\omega - y_1|.$$

Тогда

$$|\omega - y_1| \ll H^{-1-n\lambda_1} |D(P)|^{-1/6}, \quad \lambda_1 = \frac{2\lambda - 1}{3},$$

где $D(P)$ — *дискриминант полинома* $P(z)$.

Доказательство. Прежде всего имеем

$$|y_\nu - y_1| = |(y_\nu - \omega) + (\omega - y_1)| \leqslant |\omega - y_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$|\omega - y_1| \; |P'(y_1)| = |\omega - y_1| \; |a_n| \prod_{\nu \neq 1} |y_\nu - y_1| \leqslant |P(\omega)|,$$

откуда получаем

$$|\omega - y_1| \leqslant \frac{|P(\omega)|}{|P'(y_1)|}. \tag{6}$$

Допустим, что $|a_n(x)| \gg H$. Из равенства

$$|D(P)| = |P'(y_1)|^2 |D(P_1)|, \tag{7}$$

где

$$P_1(z) = P(z)(x - y_1)^{-1},$$

в случае $|D(P_1)| < H^{2n-4-2n\rho}$, применяя (6), находим

$$|\omega - y_1| < \frac{H^{-n\lambda+n-2-n\rho}}{|D(P)|^{1/2}}.$$

В случае $|D(P_1)| \geqslant H^{2n-4-2n\rho}$, опять применяя (6) и (7), находим

$$|\omega - y_2| \ll \frac{|P_1(\omega)| H^{n-3}}{|D(P_1)|^{1/2}} \leqslant \frac{H^{-n\lambda-1+n\rho}}{|\omega - y_1|}.$$

Мы считаем здесь, что

$$\min_{2 \leqslant \nu \leqslant n} |\omega - y_\nu| = |\omega - y_2|.$$

Таким образом, находим

$$|\omega - y_1| \ll \max\left(\frac{H^{-n\lambda+n-2-n\rho}}{|D(P)|^{1/2}}, \; H^{-\frac{n\lambda - n\rho + 1}{2}}\right).$$

Выбирая ρ так, чтобы слагаемые в скобках стали равными, приходим к утверждению леммы.

В случае, когда условие $|a_n(x)| \gg H$ не выполняется, применяя преобразования (5) и лемму 2, мы легко добиваемся выполнения этого условия.

Теперь мы можем перейти к нашей задаче.

Пусть $\omega \in K\langle x\rangle$. Определим величину $\tilde{w}_n(\omega) = \tilde{w}_n$ аналогично тому, как определялась величина $w_n(\omega)$, но только по отношению ко множеству неприводимых полиномов степени не более n (неприводимость понимается в кольце $K[x]$). Тогда с помощью леммы 3 легко находим

$$w_n(\omega) = \tilde{w}_n(\omega). \tag{8}$$

Действительно, если $\tilde{w}_n < w_n$, то возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы было $\tilde{w}_n < w_n - \varepsilon$, и рассмотрим бесконечную последовательность целых полиномов $P(z)$ степени не более n с условием

$$|P(\omega)| < H^{-w_n+\varepsilon}, \quad H = \overline{|P|}.$$

Очевидно, все полиномы этой последовательности, начиная с некоторого, приводимы, пусть

$$P(z) = P_1(z) P_2(z).$$

Следовательно,

$$H^{-w_n+\varepsilon} > |P_1(\omega)|\,|P_2(\omega)| > H_1^{-\tilde{w}_n-\varepsilon} H_2^{-\tilde{w}_n-\varepsilon}$$

и в силу леммы 3 $\tilde{w}_n + \varepsilon \geqslant w_n - \varepsilon$. Мы приходим к выводу, что $\tilde{w}_n \geqslant w_n$, откуда и заключаем верность равенства (8).

Для дальнейшего заметим следующее. Нам достаточно рассматривать множество элементов ω из $K\langle x\rangle$ с условием

$$|\omega(x)| \leqslant 1,$$

так как в случае необходимости мы можем применить преобразование

$$\omega \to \frac{1}{\omega},$$

переводящее множества положительной меры во множества положительной меры. Далее, пусть $\lambda < w_n(\omega)$. Тогда существует бесконечная последовательность целых неприводимых полиномов $P(z)$ степени не более n, удовлетворяющих неравенству

$$|P(\omega)| < H^{-n\lambda}, \quad H = \overline{|P|}. \tag{9}$$

По лемме 2 для каждого такого полинома можно подобрать j с условием

$$|P(x^j)| \geqslant H, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n.$$

Из этого следует, что для ω существует такое число $j = j(\omega)$, что неравенство (9) выполняется для бесконечной последовательности неприводимых полиномов $P(z)$ с условием $|a_n(x)| \geqslant H$ при замене элемента ω на элемент

$$\omega' = \frac{1}{\omega - x^j}.$$

Применяя в случае надобности несколько раз преобразования

$$\omega \to \omega + x^j, \quad \omega \to \frac{1}{\omega},$$

мы приходим к выводу, что нам достаточно рассматривать некоторое ограниченное (в смысле верхней грани значений нормы элементов) множество Ω и приближения неприводимыми полиномами $P(z)$ с условием

$$|a_0| \leqslant |a_1| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| = H.$$

Будем различать неприводимые полиномы без кратных корней (полиномы первого рода) и неприводимые полиномы, имеющие кратные корни (полиномы второго рода). В случае полиномов первого рода, ввиду всего ранее изложенного, с тривиальными изменениями применимы рассуждения вышеупомянутой статьи „К гипотезе К. Малера о мере множества s — чисел", повторять которые было бы нецелесообразно. Единственное дополнение к рассуждениям этой статьи заключается в следующем: число целых полиномов $P(z)$

степени не более n, со старшим коэффициентом, имеющим норму H, и удовлетворяющих неравенству

$$\min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |P'(y_\nu)| < H^{1-\delta} \qquad (\delta > 0 - \text{фиксировано})$$

есть величина $\ll H^{n-1}$. Действительно, для такого полинома имеем

$$|D(P)| \ll H^{2n-2-\delta},$$

а также

$$\left| D\left(\frac{1}{a_n} P\right)\right| \ll H^{-\delta}.$$

Теперь указанное утверждение следует из того, что размерность многообразия

$$D(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1) = 0$$

есть $n-1$.

Что касается полиномов второго рода, то каждый такой полином имеет вид

$$P(z) = a_0 + a_p z^p + \ldots + a_{ps} z^{ps} = (\sqrt[p]{a_0} + \sqrt[p]{a_p}\, z + \cdots + \sqrt[p]{a_{ps}}\, z^s)^p = P_1^p(z).$$

Если $P_1(z)$ имеет кратные корни, то его также можно представить в аналогичной форме, и т. д. В конечном счете мы приходим к полиномам, с которыми можно оперировать как с полиномами первого рода.

Таким образом, получается следующая

Теорема 1. *Для почти всех элементов* ω *поля* $K\langle x\rangle$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{n} w_n(\omega) \leqslant \max\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8n}, \frac{4}{3} - \frac{1}{4n}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, преобразование

$$\omega \to \omega + \alpha x^j, \ \alpha \in K$$

не изменяет величины $w_n(\omega)$. Следовательно, рассуждая как в [6] (см. доказательство леммы 8) мы приходим к утверждению:

Теорема 2. *Существуют такие числа* w_n, *что*

$$w_n(\omega) = w_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

для почти всех ω.

Заметим, что равенство $w_1 = 1$ легко доказывается, а равенство $w_2 = 2$, аналогичное результату И. П. Кубилюса [3], также доказывается с помощью изложенных соображений.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
10.IV.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logaritmus. I, J. reine und angew. Math. **166**, 1932 (118—136).
2. K. Mahler. Über das Maß der Menge aller S—Zahlen, Math. Ann. **106**, 1932 (131—139).
3. И. П. Кубилюс. О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел, ДАН СССР, **67**, 1949 (783—786).

4. J. Kubilius. Об одной метрической задаче теории диофантовых приближений, Liet. TSR Mokslų Akad. Darbai, ser. B, 2 (18), 1959 (3–7).
5. B. Volkmann. Zur metrischen Theorie der S–Zahlen, J. reine und angew. Math. **209**, 3/4, 1962 (201–210),
6. В. Г. Спринджук. О некоторых общих вопросах приближения чисел алгебраическими числами, Лит. мат. сб., Liet. mat. rink., II, 1, 1962.

ALGEBRINIŲ APROKSIMACIJŲ LAIPSNIŲ EILUČIŲ KŪNE METRINĖS TEORĖMOS

V. SPRINDŽIUK

(Reziumė)

Tegul K yra baigtinis kūnas, kurio elementų skaičius p^f, $K\langle x\rangle$ yra kūnas formulių laipsninių eilučių

$$\omega(x)=\sum_{j\geqslant j_0}\alpha_j x^{-j},\ \alpha_{j_0}\neq 0 \qquad (\alpha_j\in K).$$

Pažymėkime

$$|\,\omega(x)\,|=p^{-fj_0}.$$

Tegul $\mathfrak{P}_n(H)$ yra visų daugianarių $P(z)$ aibė,

$$P(z)=a_0(x)+a_1(x)z+\cdots+a_n(x)z^n,\ \max_{0\leqslant i\leqslant n}|\,a_i(x)\,|\leqslant H,$$

$a_i(x)\in K[x]$, $\omega(x)$—transcendentinis kūno $K\langle x\rangle$ elementas. Tada

$$w_n(\omega,\ H)=\min_P |\,P(\omega)\,|,\ P\in\mathfrak{P}_n(H),$$

$$w_n(\omega)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\ln\frac{1}{w_n(\omega,\ H)}}{\ln H}.$$

Šiame straipsnyje įrodoma, kad tinkamai parinktiems skaičiams w_n

$$w_n(\omega)=w_n \qquad (n=1,2,\ \ldots)$$

beveik visiems ω (kurio nors mato atžvilgiu), ir

$$n\leqslant w_n<\frac{4}{3}\,n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

THE METRICAL THEOREMS ON ALGEBRAIC APPROXIMATIONS IN THE FIELDS OF POWER SERIES

W. SPRINDJUK

(Summary)

Let K be a finite field of order p^f and let $K\langle x\rangle$ be the field of formal power series

$$\omega(x)=\sum_{j\geqslant j_0}\alpha_j x^{\ j},\ \alpha_{j_0}\neq 0 \qquad (\alpha_j\in K).$$

We define

$$|\,\omega(x)\,|=p^{-fj_0}.$$

Let $\mathfrak{P}_n(H)$ be the set of all polinomials $P(z)$,

$$P(z)=a_0(x)+a_1(x)z+\cdots+a_n(x)z^n,\ \max_{0\leqslant i\leqslant n}|\,a_i(x)\,|=H,$$

$a_i(x)\in K[x]$, and, let $\omega(x)$ be a transcendental element of $K\langle x\rangle$. Then

$$w_n(\omega,\ H)=\min_P |\,P(\omega)\,|\ P\in\mathfrak{P}_n(H),$$

$$w_n(\omega)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\ln\frac{1}{w_n(\omega,\ H)}}{\ln H}.$$

It is proved in this paper that for suitably chosen numbers w_n we have

$$w_n(\omega)=w_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

or almost all ω (in the sense of some measure), and

$$n\leqslant w_n<\frac{4}{3}\,n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$