II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

В. Г. СПРИНДЖУК

Известная классификация чисел К. Малера [1] строится на основе величины $w_n(\omega, H)$,

$$w_n(\omega, H) = \min |P(\omega)|,$$

где ω вещественное или комплексное число, $P(x)$ — целочисленный полином степени не более n, высоты не более H, и минимум берется по всем таким полиномам с условием $P(\omega) \neq 0$. Полагая при фиксированном n

$$w_n(\omega) = \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{\ln \frac{1}{w_n(\omega, H)}}{\ln H},$$

а затем полагая

$$w(\omega) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\omega)}{n},$$

мы приходим к величине $w = w(\omega)$, с помощью которой и совершается деление чисел на классы. Очевидно, $0 \leqslant w \leqslant \infty$. Если $w_\mu = \infty$ при некотором μ, то пусть μ и будет первым индексом, для которого это имеет место. В противном случае полагаем $\mu = \infty$. Малеровское деление чисел на классы дается следующей таблицей:

A — числа, если $w = 0$, $\mu = \infty$;
S — числа, если $0 < w < \infty$, $\mu = \infty$;
T — числа, если $w = \infty$, $\mu = \infty$;
U — числа, если $w = \infty$, $\mu < \infty$.

Тогда оказывается, в частности, что класс A — чисел совпадает с классом всех алгебраических чисел, а почти все (в смысле лебеговской меры) трансцендентные числа попадают в класс S — чисел (см. Малер [3]).

В настоящей статье мы рассмотрим аналогичное разбиение чисел на классы, но сначала возьмем $n \to \infty$, затем $H \to \infty$. Точнее говоря, пусть $\mathfrak{P}_n(H)$ — множество всех целочисленных полиномов степени не более n, высоты не более H. Положим

$$v_n(\omega, H) = \min |P(\omega)|,$$

где минимум берется по полиномам из $\mathfrak{P}_n(H)$ с условием $P(\omega)\neq 0$. Далее положим

$$\nu(\omega, H)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln\frac{1}{v_n(\omega, H)}}{\ln n},$$

$$\nu(\omega)=\sup_{(H)}\nu(\omega, H)\qquad (H=1, 2, \ldots).$$

Величину $\nu(\omega)$ будем называть порядком числа ω. Если порядок $\nu=\nu(\omega)$ конечен ($\nu<\infty$), то положим

$$t(\omega)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\frac{1}{v_n(\omega, H)}}{n^\nu},$$

$$t(\omega)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{t(\omega, H)}{\ln H},$$

и назовем величину $t(\omega)$ типом числа ω. Если же порядок ν бесконечен ($\nu=\infty$), но существует такое H, что $\nu(\omega, H)=\infty$, то пусть H_0 и будет наименьшим H, для которого это верно.

Теперь мы введем классы $\tilde{A}$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ и $\tilde{U}$ — чисел по следующей схеме:

$\tilde{A}: 0\leqslant\nu(\omega)\leqslant 1$; если $\nu(\omega)=1$, то $t(\omega)=0$;

$\tilde{S}: 1\leqslant\nu(w)<\infty$; если $\nu(\omega)=1$, то $t(\omega)>0$;

$\tilde{T}:\quad \nu(w)=\infty,\qquad H_0(\omega)=\infty$;

$\tilde{U}:\quad \nu(\omega)=\infty,\qquad H_0(\omega)<\infty$.

Теорема 1. *Все алгебраические числа имеют порядок не более* 1; *если алгебраическое число имеет порядок* 1, *то оно имеет нулевой тип.*

Все трансцендентные числа имеют порядок не менее 1; *если вещественное трансцендентное число имеет порядок* 1, *то оно имеет тип не менее* 1; *если комплексное трансцендентное число имеет порядок* 1, *то оно имеет тип не менее* $\frac{1}{2}$.

Доказательство. Если ω — алгебраическое число степени m,

$$P\in\mathfrak{P}_n(H),\ P(\omega)\neq 0,$$

то

$$1\leqslant|R(P, f)|\leqslant|a|^n|P(\omega)|\,(\omega_0^n(n+1)H)^{m-1},$$

где $f(x)$ минимальный полином для ω, a — старший коэффициент $f(x)$, и в дальнейшем мы полагаем

$$w_0=\begin{cases}1, & \text{если } |\omega|\leqslant 1,\\ |\omega|, & \text{если } |\omega|<1.\end{cases}$$

Очевидно, из этого следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы следует из того, что как это получается применением „принципа ящиков" Дирихле, существует такой целочисленный полином $P(x)$ степени не более n, высоты не более H, что для данного трансцендентного числа ω, если ω — вещественное число, то

$$0\neq|P(\omega)|<(n+1)\,\omega_0^n h^{-n};$$

и

$$0\neq|P(\omega)|<2(n+1)\,\omega_0^n h^{-\frac{n-1}{2}},$$

если ω — комплексное число.

Теперь мы докажем утверждение, аналогичное малеровской теореме о мере множества s-чисел. Нам потребуются леммы, из которых первая хорошо известна, а вторая принадлежит А. О. Гельфонду.

Лемма 1. *Пусть ω — произвольное число, P и Q — целочисленные полиномы без общих корней, степеней m и n, высот h и H соответственно. Тогда*

$$\frac{|P(\omega)|}{h}+\frac{|Q(\omega)|}{H}\geqslant \omega_0^{-m-n}\,\frac{h^{-n}H^{-m}}{(m+n)!}.$$

Доказательство. Известное представление результата $R(P,Q)$ в виде определителя можно легко привести к виду

$$R(P,\ Q)=\begin{vmatrix} P(\omega) & a_1 a_2 \ \dots\ a_m & & \\ \omega P(\omega) & a_0 a_1 \ \dots\ a_{m-1}\ a_m & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{n-1}P(\omega) & & a_0 a_1\ \dots & a_m \\ Q(\omega) & b_1 \quad b_n & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{m-1}Q(\omega) & & b_0 b_1\ \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Разлагая определитель по элементам первого столбца, приходим к утверждению леммы.

Лемма 2. ([4] стр. 22). *Пусть P, Q — целочисленные полиномы степеней m и n. Тогда*

$$\overline{|PQ|}\geqslant 2^{-3l}\,\overline{|P|}\ \overline{|Q|},\quad l=m+n.$$

Для дальнейшего введем некоторые новые величины. Пусть $\mathfrak{P}_n^*(H)$ — множество, состоящее из целочисленных неприводимых делителей всех полиномов из $\mathfrak{P}_n(H)$. Определим величину $\nu^*(\omega,\ H)$ аналогично тому, как была определена величина $\nu(\omega,\ H)$, но теперь по отношению ко множеству $\mathfrak{P}_n^*(H)$.

Лемма 3. *Для всякого трансцендентного числа*

$$\nu(\omega,\ H)\leqslant \nu^*(\omega,\ H).$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда можно найти такое $\varepsilon>0$, что будет

$$\nu^*+\varepsilon<\nu-\varepsilon,$$

где для простоты записей мы полагаем $\nu=\nu(\omega,\ H)$ $\nu^*=\nu^*(\omega,\ H)$, если $\nu(\omega,\ H)<\infty$, и ν — произвольное число, большее $\nu^*(\omega,\ H)$, если $\nu(\omega,\ H)=\infty$.

Очевидно, в силу определения величины ν существует бесконечная последовательность целочисленных полиномов P_n высоты не более H, степени $n\to\infty$, удовлетворяющих неравенству

$$|P_n(\omega)|<e^{-n^{\nu-\varepsilon}}.$$

В силу сделанного предположения все такие полиномы, начиная с некоторого, приводимы, и по лемме Гаусса (см. [6], стр. 195)

$$P_n(x)=\prod_i P_{n_i}(x),$$

где

$$P_{n_i}^*\in\mathfrak{P}_n^*(H).$$

Теперь находим

$$|P_n(\omega)| > c(\omega)\exp\Bigl(-\sum_{n_i>m} n_i^{\nu^*+\varepsilon}\Bigr),$$

так как по определению величины ν^*

$$|P^*_{n_i}(\omega)| > e^{-n_i^{\nu^*+\varepsilon}},$$

если только $n_i > m = m(\varepsilon)$. Следовательно,

$$n^{\nu-\varepsilon} \leqslant \sum_{n_i>m} n_i^{\nu^*+\varepsilon} - \ln c(\varepsilon),$$

в то время как

$$n = \sum_i n_i.$$

Положим

$$\overline{n} = \sum_{n_i>m} n_i,$$

тогда $\overline{n} \sim n$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\nu-\varepsilon}}{\overline{n}^{\nu^*+\varepsilon}} = \infty,$$

однако найденное неравенство показывает, что этот предел не превосходит

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{n_i>m} n_i^{\nu^*+\varepsilon} - \ln c(\varepsilon)}{\overline{n}^{\nu^*+\varepsilon}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{n_i>m} n_i^{\nu^*+\varepsilon}}{\Bigl(\sum\limits_{n_i>m} n_i\Bigr)^{\nu^*+\varepsilon}} \leqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Теорема. *Почти все числа имеют порядок не выше 2 и, следовательно, есть $\tilde{S}$ — числа.*

Доказательство. По лемме 2 все полиномы из $\mathfrak{P}^*_n(H)$ имеют высоту не более $e^{2n}H$. Если для какого-либо числа ω имеет место неравенство

$$|P(\omega)| < e^{-n^{2+\delta}},\quad \delta > 0,$$

где $P \in \mathfrak{P}^*_n(H)$, то в силу равенства

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{\varkappa} \frac{1}{x-\varkappa},\quad \varkappa \text{ — корень } P(x),$$

по лемме 1 находим

$$\min_{(\varkappa)} |\omega - \varkappa| < e^{-n^{2+\delta}+5n^{\varepsilon}} (\omega_0 H)^{2n},\quad n > n_0.$$

Очевидно, из этого легко следует теорема.

По-видимому, верно утверждение, что почти все числа имеют порядок 1.

Заметим, что по результатам К. Малера [2] число e имеет порядок не выше 2, а по результатам Н. И. Фельдмана [5] числа π и $\ln\alpha$ при алгебраическом $\alpha \neq 0, 1$ имеют порядки не более 2 и 3 соответственно.

Существование $\tilde{U}$ чисел без труда доказывается с помощью конструктивных рассмотрений, аналогичных [6], тогда как вопрос о существовании $\tilde{T}$ чисел, как и в классификации Малера, остается открытым.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
10.IV.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logaritmus. I, J. reine und angew. Math., 166, 1932 (118–136).
2. K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logaritmus, II, J. reine und angew. Math., 166, 1932 (137–150).
3. K. Mahler. Über das Mab der Menge aller S–Zahlen, Mat. Ann., 106, 1932 (131–139)
4. А. О. Гельфонд. Трансцендентные и алгебраические числа, Москва, ГТТИ, 1952.
5. Н. И. Фельдман. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, ДАН, 66, № 4, 1949.
6. W. J. Leveque. On Mahler's U–numbers, J. London Math. Soc., 28, 1953 (220–229).
7. Д. Ж. В. С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений ИЛ, 1961.

APIE VIENĄ TRANSCENDENTINIŲ SKAIČIŲ KLASIFIKACIJĄ

V. SPRINDŽIUK

(Reziumė)

Tegul $\mathfrak{P}_n(H)$ yra visų daugianarių $P(x)$ aibė

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \quad \max|a_i|\leqslant H \quad (i=0, 1, \ldots, n),$$

a_i—sveiki. Transcendentinių skaičių ω Malerio [1] klasifikacijoje pagrindinį vaidmenį vaidina kitimas dydžių

$$w_n(\omega, H)=\min|P(\omega)|, \quad P\in\mathfrak{P}_n(H),$$

kai $H\to\infty$, $n\leqslant n_0$ ir po to $n_0\to\infty$ (smulkiau žr. [1]). Klasifikuodami transcendentinius skaičius, mes vadovaujamės tais pačiais principais, kaip ir Maleris, bet mūsų atveju $H\leqslant H_0$, $n\to\infty$ ir po to $H_0\to\infty$. Tokiu būdu mes gauname skaičių $\bar{S}$, $\bar{T}$ ir $\tilde{U}$ klases ir įrodėme Malerio teoremos analogą apie S—skaičių aibės matą.

ON ONE CLASSIFICATION OF TRANSCENDENTAL NUMBERS

W. SPRINDJUK

(Summary)

Let $\mathfrak{P}_n(H)$ be the set of all polinomials $P(x)$.

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \quad \max|a_i|\leqslant H \quad (i=0, 1, \ldots, n),$$

a_i—integers. The classification of transcendental numbers ω due to K. Mahler [1] is based on the changing of values

$$w_n(\omega, H)=\min|P(\omega)|, \quad P\in\mathfrak{P}_n(H),$$

when $H\to\infty$ and $n\leqslant n_0$, than $n_0\to\infty$ (for detais see [1]) We construct the classification of transcendental numbers on the same ideas as Mahler's classification is, but at first we take $H\leqslant H_0$ and $n\to\infty$, than $H_0\to\infty$. In this way we get classes $\bar{S}$, $\tilde{T}$ and $\tilde{U}$—numbers and prove an analogy of Mahler's theorem [3] about the measure of all S—numbers.