II ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1962

К ГИПОТЕЗЕ К. МАЛЕРА О МЕРЕ МНОЖЕСТВА S-ЧИСЕЛ

В. Г. СПРИНДЖУК

Пусть ω – трансцендентное число, и пусть

$$w_n(\omega,\ H) = \min |P(\omega)|,$$

где $P(x)$ – целочисленный полином степени не более n, высоты не более H а минимум берется по всем таким полиномам. Положим

$$w_n(\omega) = \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{\ln \dfrac{1}{w_n(\omega,\ H)}}{\ln H},$$

$$w(\omega) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\omega)}{n}.$$

В классификации К. Малера [1] трансцендентное число ω называется S-числом, если $w(\omega) < \infty$.

Малер доказал [2], что почти все числа являются S-числами и высказал гипотезу о том, что

$$\frac{1}{n} w_n(\omega) \geqslant \begin{cases} 1, & \omega \text{ вещественное,} \\ \dfrac{1}{2}, & \omega \text{ комплексное} \end{cases}$$

для почти всех чисел. Так как выполнимость неравенств

$$\frac{1}{n} w_n(\omega) \leqslant \begin{cases} 1, & \omega \text{ вещественное,} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}, & \omega \text{ комплексное} \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

легко доказывается (см. [10], стр, 69), то получается, что гипотеза Малера весьма точно решает задачу о наименьших значениях величины $w_n(\omega,\ H)$ при $H \to \infty$ для почти всех чисел.

Удобно ввести следующие обозначения:

$$\frac{1}{n} w_n(\omega) = \begin{cases} \Theta_n(\omega), & \omega \text{ вещественное,} \\ \eta_n(\omega), & \omega \text{ комплексное.} \end{cases}$$

Тогда можно доказать (см. [9], теорема 1) существование таких чисел Θ_n, η_n что для всех вещественных и комплексных чисел соответственно

$$\Theta_n(\omega) = \Theta_n, \quad \eta_n(\omega) = \eta_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Теперь гипотеза Малера выражается равенствами

$$\Theta = \sup_{(n)} \Theta_n = 1, \quad \eta = \sup_{(n)} \eta_n = \frac{1}{2} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

В 1949 г. И. П. Кубилюс [3] доказал равенство $\Theta_2=1$, а в 1958 г. Ф. Каш [5] и в 1960 г. Б. Фолькман [6] доказали соответственно равенства $\eta_2=\frac{1}{4}$, $\eta_3=\frac{1}{3}$. Наконец, в недавнее время Б. Фолькман [7] доказал равенство $\Theta_3=1$, а в общем случае [8] получил неравенства

$$\Theta_n\leqslant\frac{3}{2},\quad \eta_n\leqslant\frac{3}{4}-\frac{1}{2n}\qquad (n=4,\ 5,\ \ldots).$$

Таким образом,

$$1\leqslant\Theta\leqslant\frac{3}{2},\quad \frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant\frac{3}{4}.$$

Мы доказываем в этой статье, что неравенства Б. Фолькмана можно заменить следующими

$$1\leqslant\Theta\leqslant\frac{4}{3},\quad \frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant\frac{2}{3}.$$

Метод доказательства использует некоторые соображения статьи Б. Фолькмана [8] и статьи автора [9].

По результатам статьи [9] достаточно рассматривать множества $\mathfrak{P}_n(H)$ неприводимых целочисленных полиномов P вида

$$P(x)=a_0+a_nx+\ldots+a_nx^n,\quad \max|a_i|\leqslant a_n=H\qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

и некоторую ограниченную область $\Omega=\{\omega\}$. Для данного числа ω во множестве $\mathfrak{P}_n(H)$ существует полином, принимающий в точке ω наименьшее значение. Беря $H\to\infty$, мы получим последовательность ,,минимальных'' в ω полиномов $P_1,\ P_2,\ \ldots$ Если число $\lambda>0$ таково, что неравенство

$$|P(\omega)|<H^{-n\lambda}\tag{1}$$

выполняется для бесконечной последовательности полиномов, то оно выполняется также для бесконечной последовательности минимальных в ω полиномов.

Пусть P — минимальный полином

$$P(x)=H(x-\varkappa_1)\ldots(x-\varkappa_n)$$

и пусть

$$|\omega-\varkappa_1|=\min|\omega-\varkappa_i|\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$|\omega-\varkappa_1|\leqslant\frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|}\tag{2}$$

(см. [9], доказательство леммы 5). Пусть

$$|\varkappa_1-\varkappa_2|\leqslant|\varkappa_1-\varkappa_3|\leqslant\ldots\leqslant|\varkappa_1-\varkappa_n|,$$
$$|\varkappa_1-\varkappa_i|=H^{-\rho_i}\qquad (i=2,\ \ldots,\ n).$$

Возьмем произвольно $\varepsilon>0$, натуральное число $m>\frac{n}{\varepsilon}$ и определим целые числа r_i неравенствами

$$\frac{r_i}{m}\leqslant\rho_i<\frac{r_i+1}{m}\qquad (i=2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$\frac{r_2+\ldots+r_n}{m}\leqslant\rho_2+\rho_3+\ldots\rho_n<\frac{r_2+\ldots+r_n}{m}+\varepsilon,$$

$$H^{-\frac{r_i+1}{m}}\leqslant|\varkappa_1-\varkappa_i|<H^{-\frac{r_i}{m}}\qquad (i=2,\ \ldots,\ n).\tag{3}$$

Пусть теперь $\mathfrak{P}_n(\omega;\ m,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ — множество минимальных в ω полиномов, удовлетворяющих неравенствам (3), и пусть

$$\mathfrak{P}_n(m,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)=\bigcup_{\omega\in\Omega}\mathfrak{P}_n(\omega;\ m,\ r_2,\ \ldots,\ r_n).$$

Очевидно, достаточно определить верхнюю грань тех λ, для которых неравенство (1) имеет бесконечное число решений в полиномах из $\mathfrak{P}_n(m,\ r_2,\ \ldots,\ r_r)$ для почти всех чисел из Ω.

В дальнейшем мы ограничимся случаем вещественных чисел, так как в случае комплексных чисел не требуется никаких существенно новых соображений.

Множества полиномов $\mathfrak{P}_n(m,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ разобьем на три класса в зависимости от выполнения условий:

$$1^0\quad \frac{r_2}{m}>\frac{n}{2}-\frac{1}{4};$$

$$2^0\quad \frac{r_2}{m}\leqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{4},\quad s=\frac{r_2+\ldots+r_n}{m}>\frac{n+\varepsilon}{3};$$

$$3^0\quad \frac{r_2}{m}\leqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{4},\quad s\leqslant\frac{n+\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим отдельно приближения полиномами каждого класса.

1^0. Если в неравенстве (1) взять

$$\lambda>\frac{5}{4}-\frac{3}{8n}\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots),\tag{4}$$

то это неравенство может иметь бесконечное число решений лишь для множества нулевой меры.

Действительно, если P_1, P_2 различные полиномы первого класса из $\mathfrak{P}_n(H)$, то, допуская справедливость неравенства,

$$|\varkappa_1^{(1)}-\varkappa_1^{(2)}|<H^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}},\tag{5}$$

находим

$$H\leqslant|R(P_1,\ P_2)|=H^{2n}\prod_{i,j}|\varkappa_i^{(1)}-\varkappa_j^{(2)}|\ll H^{1-3\delta},$$

где $\delta=\frac{r_2}{m}-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}>0$. Следовательно, при достаточно большом H неравенство (5) невозможно, и тогда число полиномов первого класса, попадающих в $\mathfrak{P}_n(H)$, будет величиной

$$\ll H^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Так как

$$|\omega-\varkappa_1|\ll H^{-1-\left(\frac{2\lambda-1}{3}\right)n}$$

(см. [9], лемма 6), то мы приходим к утверждению 1^0 с неравенством (4).

2^0. Если

$$\lambda>\frac{4}{3}-\frac{1}{n}+\frac{4\varepsilon}{3n}\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots),$$

то верно утверждение, аналогичное 1^0.

Для полиномов P второго класса пусть $\Delta(P)$ будет интервал всех вещественных чисел ω, содержащий $\varkappa_1$, и для точек которого

$$|P(\omega)| < H^{-n\lambda}, \quad \lambda = \frac{4}{3} - \frac{2}{n} + \frac{\varepsilon}{3n}. \tag{6}$$

Тогда множества $\Delta(P_1)$ и $\Delta(P_2)$ не пересекаются, если P_1 и P_2 различны. Действительно, в противном случае для точки пересечения α мы имели бы

$$\max\left(|\alpha - \varkappa_1^{(1)}|, \quad |\alpha - \varkappa_1^{(2)}|\right) \ll H^{-n\lambda+s-1+\varepsilon},$$

и тогда

$$|\varkappa_1^{(1)} - \varkappa_1^{(2)}| \ll H^{-n\lambda+s-1+\varepsilon}.$$

Применяя последнее неравенство, получаем

$$H \leqslant |R(P_1, P_2)| \ll H^{2n-n\lambda+s-1+\varepsilon} \prod_{(i,j)\neq(1,1)} H^{-\frac{1}{m} r_{\max(i,j)}}.$$

Следовательно, при достаточно большом H должно быть

$$2n - 2 - n\lambda + s + \varepsilon - \frac{1}{m} \sum_{(i,j)\neq(1,1)} r_{\max(i,j)} \geqslant 0.$$

Применяя (6) и равенство

$$\sum_{(i,j)\neq(1,1)} r_{\max(i,j)} = ms + 2\left(r_2 + 2r_3 + \ldots + (n-1) r_n\right),$$

находим

$$\frac{2}{3} n + \frac{2}{3} \varepsilon + s - 3s \geqslant 0,$$

что противоречит принадлежности полиномов P_1, P_2, ко второму классу.

Если теперь α — ближайшее к $\varkappa_1$ число с условием

$$|P(\alpha)| = H^{-n\lambda}, \quad \lambda = \frac{4}{3} - \frac{2}{n} + \frac{\varepsilon}{3n},$$

то из неравенства

$$|\alpha - \varkappa_1| \gg H^{-n\lambda+s-1}$$

следует, что число полиномов второго класса, содержащихся в $\mathfrak{P}_n(H)$, есть величина

$$\ll H^{n\lambda-s+1},$$

откуда легко следует утверждение 2°.

3°. Очевидно, для полиномов третьего класса верно утверждение 2° (см. [9], доказательство теоремы 2).

Мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Справедливы неравенства*

$$\Theta_n \leqslant \frac{5}{4} - \frac{3}{8n} \quad (n = 4,\ 5,\ 6,\ 7), \qquad \Theta_n \leqslant \frac{4}{3} - \frac{1}{n} \quad (n = 8,\ 9,\ \ldots).$$

Аналогичные неравенства верны для величин η_n. Заметим, что некоторая детализация проведенных рассуждений позволяет получить более сильные результаты.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
20.IV.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logaritmus, 1, J. reine und angew. Math. 166, 1932 (118—136).
2. K. Mahler. Über das Mab der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann. 106, 1932 (131—139).
3. И. П. Кубилюс. О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел, ДАН СССР, 67, 1949 (783—786).
4. J. Kubilius. Об одной метрической задаче теории диофантовых приближений, Liet. TSR Mokslų Akademijos Darbai, serija B, 2 (18), 1959 (3—7).
5. F. Kasch. Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen. Math. Zeitschr. 70, 1958 (263—270).
6. B. Volkmann. Zur Mahlerschen Vermutung in Komplexen, Math. Ann. 140, 1960 (351—359).
7. B. Volkmann. The real cubic case of Mahler's conjecture, Mathematika, 8, Nr. 15, 1961 (55—57)
8. B. Volkmann. Zur metrischen Theorie der S-Zahlen, J. reine und. angew. Math. 209, 314, 1962 (201—210).
9. В. Г. Спринджук. О некоторых общих вопросах приближения чисел алгебраическими числами. Лит. мат. сб. Liet. mat. rink. II, 1, 1962.
10. Th. Schneider. Einführung in die transzendenten Zahlen, Springer, Berlin, 1957.

K. MALERIO HIPOTEZĖS APIE *S*-SKAIČIŲ AIBĖS MATĄ

V. SPRINDŽIUK

(Reziumė)

Tegul $\mathfrak{P}_n(H)$ yra visų daugianarių $P(x)$ aibė,

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n, \quad \max|a_i|\leqslant H \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

a_i — sveiki, ω yra transcendentinis skaičius,

$$w_n(\omega, H)=\min_{(P)}|P(\omega)|, \quad P\in\mathfrak{P}_n(H),$$

$$w_n(\omega)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\ln\frac{1}{w_n(\omega, H)}}{\ln H},$$

Pažymėkim

$$\frac{1}{n}w_n(\omega)=\begin{cases}\Theta_n(\omega), & \omega \text{ realus,}\\ \eta_n(\omega), & \omega \text{ kompleksinis.}\end{cases}$$

Tada (žr. [9], teorema 1) egzistuoja tokios konstantos Θ_n, η_n, kad beveik visiems ω

$$\Theta_n(\omega)=\Theta_n, \quad \eta_n(\omega)=\eta_n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Pagal Malerio hipotezę

$$\Theta_n=\sup_{(n)}\Theta_n=1, \quad \eta=\sup_{(n)}\eta_n=1 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Gerai žinoma (žr. [10], p 69), kad

$$\Theta_n\geqslant 1, \quad \eta_n\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \qquad (n=1, 2, \ldots);$$

vadinasi, $\Theta\geqslant 1$, $\eta\geqslant\frac{1}{2}$. Folkmanas [8] įrodė, kad

$$\Theta\leqslant\frac{3}{2}, \quad \eta\leqslant\frac{3}{4}.$$

Šiame straipsnyje mes pageriname paskutiniąją nelygybę. Įrodome, kad

$$\Theta\leqslant\frac{4}{3}, \quad \eta\leqslant\frac{2}{3}.$$

ON K. MAHLER'S CONJECTURE ON THE MEASURE OF THE SET OF *S*-NUMBERS

W. SPRINDJUK

(Summary)

Let $\mathfrak{P}_n(H)$ be the set of all polinomials $P(x)$,

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n, \quad \max|a_i|\leqslant H \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

a_i — integers, and let ω be a trascendental number. Then

$$w_n(\omega, H)\min_{(P)}|P(\omega)|, \quad P\in\mathfrak{P}_n(H),$$

$$w_n(\omega)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\ln\frac{1}{w_n(\omega, H)}}{\ln H},$$

Putting

$$\frac{1}{n}w_n(\omega)=\begin{cases}\Theta_n(\omega), & \omega \text{ is real number,}\\ \eta_n(\omega), & \omega \text{ is komplex number,}\end{cases}$$

we have $\Theta_n(\omega)=\Theta_n$, $\eta_n(\omega)=\eta_n$ for almost all (in the sense of Lebesgue's measure) numbers ω and some numbers Θ_n, η_n (see [9], theorem 1). K. Mahler [2] conjestured that

$$\Theta=\sup_{(n)}\Theta_n=1, \quad \eta=\sup_{(n)}\eta_n=\frac{1}{2} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

It is well known (see [10], p. 69) that

$$\Theta_n\geqslant 1, \quad \eta_n\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

so $\Theta\geqslant 1$, $\eta\geqslant\frac{1}{2}$, and it was proved by B. Volkmann [8] that

$$\Theta\leqslant\frac{3}{2}, \quad \eta\leqslant\frac{3}{4}.$$

In this paper we improve the last inequalities to

$$\Theta\leqslant\frac{4}{3}, \quad \eta\leqslant\frac{2}{3}.$$