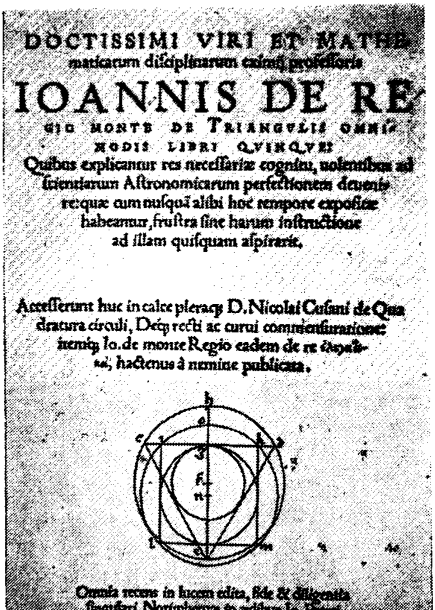
1962

РАЗВИТИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ В СТАРОМ ВИЛЬНЮССКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Б. ХМЕЛЕВСКИЙ

В труде Региомонтана «Пять книг о различных треугольниках» европейская тригонометрия окончательно отделилась от астрономии и начала быстро развиваться, как отдельная математическая дисциплина, причем в ходе ее развития все более выяснялись ее связи с алгеброй и геометрией, частью которой еще долгое время она считалась. Тем не менее, связь тригонометрии с потребностями астрономии и геодезии. непосредственно вытекающими из практической деятельности людей, отчетливо проявлялась как в труде самого Региомонтана, так и в работах более поздних авторов, из которых многие были крупными астрономами. Полный заголовок сочинения Региомонтана, изданного лишь в 1533 году, гласит: «Ученейшего мужа и знаменитого профессора математических дисциплин Иоанна из Королевской Горы пять книг о различных треугольниках: в которых рассматриваются вопросы, необходимые для познания желающим дойти до совершенства в астрономических науках: поскольку в настоящее время нигде нет изложенных этих вопросов, то любой человек напрасно будет стремиться к этому совершенству без их руководства» (рис. 1). Как видно из заголовка, основным стимулом развития тригонометрии здесь является желание овладеть «совершенством астрономических дисциплин». В тру-

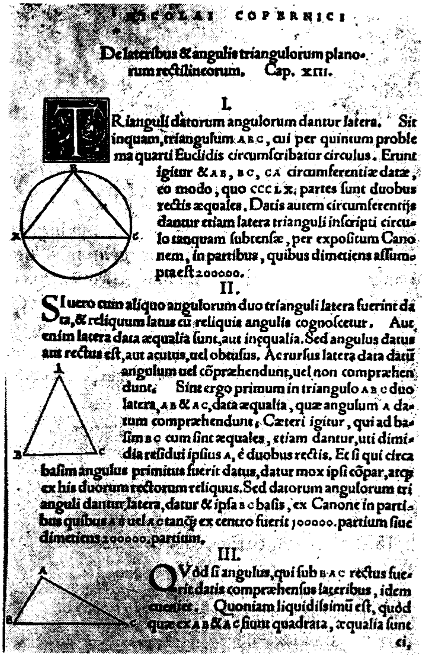

DOCTISSIMI VIRI ET MATHE
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI
MODIS LIBRI QVINQVE
Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad
scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni
re: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ
habeantur, frustra sine harum instructione
ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Qua
dratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione:
itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτι
κά, hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia
singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.
ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

Рис. 1. Титульный лист сочинения Региомонтана «Пять книг о различных треугольниках».

де Николая Коперника имеется ряд предложений из тригонометрии, рассматриваемых, конечно, в полной зависимости от астрономических целей (рис. 2). Ученик Коперника Ретик дал систематическое изложение тригонометрии в своем сочинении „Opus Palatinum". В труде Франциска Виета



NICOLAI COPERNICI

De lateribus & angulis triangulorum planorum rectilineorum. Cap. XIII.

I.

TRianguli datorum angulorum dantur latera. Sit inquam, triangulum ABC, cui per quintum problema quarti Euclidis circumſcribatur circulus. Erunt igitur & AB, BC, CA circumferentiæ datæ, eo modo, quo CCCLX. partes ſunt duobus rectis æquales. Datis autem circumferentijs dantur etiam latera trianguli inſcripti circulo tanquam ſubtenſæ, per expoſitum Canonem, in partibus, quibus dimetiens aſſumpta eſt 200000.

II.

SI uero cum aliquo angulorum duo trianguli latera fuerint data, & reliquum latus cũ reliquis angulis cognoſcetur. Aut enim latera data æqualia ſunt, aut inæqualia. Sed angulus datus aut rectus eſt, aut acutus, uel obtuſus. Ac rurſus latera data datũ angulum uel cõpræhendunt, uel non compræhendunt. Sint ergo primum in triangulo ABC duo latera, AB & AC, data æqualia, quæ angulum A datum compræhendunt. Cæteri igitur, qui ad baſim BC cum ſint æquales, etiam dantur, uti dimidia reſidui ipſius A, è duobus rectis. Et ſi qui circa baſim angulus primitus fuerit datus, datur mox ipſi cõpar, atq; ex his duorum rectorum reliquus. Sed datorum angulorum trianguli dantur latera, datur & ipſa BC baſis, ex Canone in partibus quibus AB uel AC tanquam ex centro fuerit 100000. partium ſiue dimetiens 200000. partium.

III.

QVòd ſi angulus, qui ſub BAC rectus fuerit datis compræhenſus lateribus, idem eueniet. Quoniam liquidiſsimũ eſt, quòd quæ ex AB & AC fiunt quadrata, æqualia ſunt ei,

Рис. 2. Страница из сочинения Коперника.

„Canon mathematicus" и в работе его ученика Александра Андерсона „Ad angularium sectionum analyticen theoremata" находим тригонометрические преобразования, которые применяются для составления системы тригонометрических формул. В начале XVII столетия тригонометрию развивали Клавий, Снелий, Питиск, Валентин Ото, Фаульхабер, Таке, Джон Ньютон, Отред и ряд других. Вполне естественно, что Вильнюсская Академия, которая начала свое существование как раз в этот период бурного развития тригонометрии, использовала для своих целей этот богатый материал. Наряду с занятиями тригонометрией, в Вильнюсской Академии с самого начала зародились геодезические и астрономические интересы, которые продолжались и после преобразования Академии в Главную Литовскую Школу, а затем в 1803 г. — в университет. Историческое развитие тригонометрии внимательно изучалось профессорами Академии, о чем свидетельствуют, например, исторические примечания профессора Академии Якова Накциановича (1725—1790), в его сочинении „Praelectiones mathematicae". «Из Птоломеева Алмагеста — пишет Накционович — узнаем, что древние делили радиус на 60 частей, которые называли градусами, и таким образом хорды выражали через первые, вторые, третьи и т. д. минуты, т. е. шестидесятичные дроби радиуса, которыми пользовались в вычислении треугольников. Половинные хорды, или синусы, впервые применили, насколько известно, сарацены. В обычных таблицах синусов и тангенсов радиус принимается разделенным на 10.000.000 частей, и дальше этих дробей не идут, определяя величины синусов и тангенсов. Но Иоанн Региомонтан, Николай Коперник, Ретик, Валентин Ото, которые составили эти таблицы, снизошли до значительно меньших дробей, чтобы в мельчайших частицах не появилась значительная ошибка» ([4], стр. 278).

Созданная для борьбы с реформацией, для укрепления теологии и развития схоластической философии, Академия первоначально отрицательно относилась к развитию естествознания и реальных наук. Но постепенный рост капиталистических общественных отношений и вызванное им развитие мировой науки с внутренней необходимостью заставляло Академию внимательно следить за ходом развития математических дисциплин и естествознания, создавать учебники, следуя лучшим образцом зарубежных стран, знакомить молодежь с новейшими достижениями науки, — все это под угрозой потерять влияние на народные массы и потерпеть поражение со стороны реформации, вооруженной новейшими достижениями науки. Таким образом, внутри самой Академии постепенно зарождались начатки естественно-научных интересов, все более раскрывающих ценность экспериментального метода и практическую применимость математики. С течением времени интерес к естественно-научным методам стал мощной силой, угрожающей вытеснить бесплодную схоластику на второй план.

Это внутреннее противоречие между развитием науки и косностью старых схоластических форм преподавания являлось предпосылкой нового этапа развития старинной Академии, качественного изменения его внутренней структуры, хода преподавания, ее учебных планов и программ. Победа иезуитов над протестантской ересью не могла быть длительной, потому что «неистребимость протестантской ереси соответствовала непобедимости поднимавшегося бюргерства»[1]. Закрытие ордена иезуитов и переход Академии в светские руки является лишь внешним заключительным актом этого внутреннего закономерного развития.

---

[1] **Ф. Энгельс, Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии.** К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, Москва, 1961, т. 21., стр. 314.

I. Ученики математики Накциановича и Россиньоля

Вполне естественно, что Накцианович был знаком с сочинением по тригонометрии Таке, которого он вскользь упоминает в геометрической части своих «Математических лекций». Замечательно, что Накцианович в качестве образца для своих лекций избрал произведение не Таке, но ученика Лейбница—Христиана Вольфа, который в своих философских сочинениях неоднократно высказывал мысли, идущие вразрез с христианскими догмами. О характере сочинения Накциановича можно судить по названию его учебника: «Математические лекции на основании элементов Вольфа, украшенные и так приспособленные к пользованию слушателей математики, что всё, там пропущенное или перенесенное в другое место, что могло быть желательным для учеников, прилагается; что же обычно обвинялось в неясности или многословии, излагается более ясно и кратно отцом Яковом Накциановичем ордена иезуитов, доктором свободных искусств и философии, в Вильнюсской академии и университете публичным и ординарным профессором математики. Том первый, который содержит рассуждения о метаметическом методе, арифметику, геометрию, плоскую тригонометрию и анализ. В Вильне, в королевской академической типографии, 1759 года» (рис. 3). Эти лекции являются переработкой весьма популярного в то время учебника математики Христиана Вольфа.

Астрономия составляла стержень, вокруг которого развивалась математическая мысль в старой Вильнюсской академии и в старом университете. Еще в 1639 году под руководством вильнюсского математика Освальда Кригера было написано сочинение «Центурия астрономика» Альбертом Дыблинским, который для вычисления расстояния небесного светила от земли по данному параллаксу применяет теорему синусов и пользуется таблицей тригонометрических функций. Научная деятельность Томаша Жебровского, Андрея Стржецкого, «королевского астронома» Мартина Почобута, и, наконец, Яна Снядецкого, свидетельствуют о том, что астрономические интересы в Вильнюсской академии и университете не угасали до самого конца его существования. В тесной связи с этими интересами развивалась тригонометрия, которая в старом Вильнюсском университете всегда стояла на уровне европейской математической мысли, а в последние десятилетия его существования вильнюсским астрономом Яном Снядецким был внесен существенный вклад в развитие сферической тригонометрии. Вильнюсские математики внимательно следили за ходом развития мировой математической мысли, а некоторые из них вступали в личные сношения с крупными зарубежными учеными. Вилейтнер в своей «Истории математики» отмечает значение работ римского математика Бошковича (Boscovich) в области тригонометрии ([10], стр. 348). С Бошковичем поддерживали связь вильнюсские математики, как видно из следующего письма Бошковича, направленного лорду Шеллбруну 19-го февраля 1778 г. «Простите мне, Милорд, что я Вас беспокою второй раз среди столь многих важнейших дел, которые должны Вас занимать в настоящих обстоятельствах. Делаю это, чтобы просить Вас изволить Вашу протекцию для г. аббата Стржецкого, молодого астронома из Вильна, который прибыл в Лондон, чтобы увидеть все относящееся к наукам,

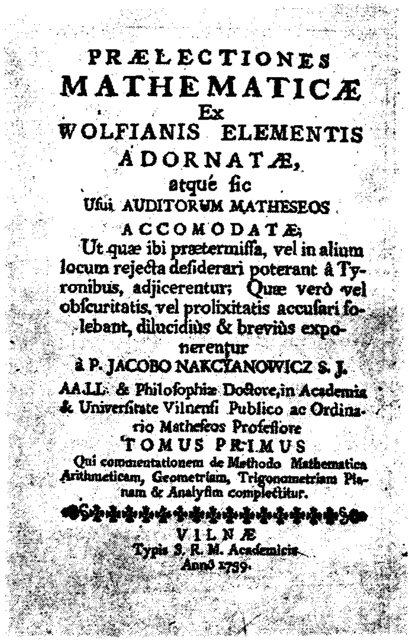

PRÆLECTIONES
MATHEMATICÆ
Ex
WOLFIANIS ELEMENTIS
ADORNATÆ,
atque ſic
Uſui AUDITORUM MATHESEOS
ACCOMODATÆ;
Ut quæ ibi prætermiſſa, vel in alium locum rejecta deſiderari poterant à Tyronibus, adjicerentur; Quæ verò vel obſcuritatis, vel prolixitatis accuſari ſolebant, dilucidiùs & breviùs exponerentur
à P. JACOBO NAKCIANOWICZ S. J.
AA.LL. & Philoſophiæ Doctore, in Academia & Univerſitate Vilnenſi Publico ac Ordinario Matheſeos Profeſſore
TOMUS PRIMUS
Qui commentationem de Methodo Mathematica Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam Planam & Analyſim complectitur.
VILNÆ
Typis S. R. M. Academicis
Annò 1759.

Рис. 2. Титульный лист сочинения Накциановича «Математические лекции»

особенно к астрономии, и чтобы поискать инструменты для этой обсерватории. Прошу Вас познакомить его с Вашим знаменитым г. Пристли, и через его посредство с другими учеными. Я бесконечно интересуюсь всем, что относится к нему, поскольку он является моим старым собратом. Я не хочу Вам надоедать, поэтому прошу принять заверение в моих искренных чувствах, с которыми всегда остаюсь».

В учебнике Накциановича после описания основ арифметики и геометрии как на плоскости, так и в пространстве, следует систематическое изложение плоской тригонометрии, которая определяется как «наука о нахождении по трем частям прямолинейного треугольника остальных его частей». Тригонометрическая часть «Лекций» Накциановича состоит из трех разделов: «О составлении таблиц синусов, тангенсов и секансов, так натуральных, как искусственных», «О решении треугольников», «О приложении тригонометрии к практической геометрии». Уже в первом разделе находим историко-математическое пояснение (scholion), в котором упоминается Региомонтан, Коперник, Ретик, Валентин Ото, а также изобретатели логарифмов Непер, Бригс и Влак. Такой исторический характер изложения свойственен не только Накциановичу, но и другим математикам старого Вильнюсского университета. В начале книги описывается способ нахождения тригонометрических функций некоторых углов, как 30°, 60°, 45°, и даются основные соотношения между тригонометрическими функциями, необходимые для вычисления функций кратных и дробных углов по найденным функциям данных углов. Во втором разделе доказываются теоремы, нужные для решения косоугольных треугольников. Например, теорема 3 гласит: «Во всяком треугольнике ABC стороны относятся, как синусы им противолежащих углов». Интересно, что Накцианович начинает доказательство замечанием о том, что всякий треугольник может быть вписан в окружность, причем ссылается на соответствующий параграф геометрической части своих лекций. Такая же логическая строгость характерна и для остальных теорем этого раздела, в котором рассматриваются всевозможные случаи решения прямоугольных и косоугольных треугольников. Третий раздел, посвященный практическим приложениям тригонометрии, начинается задачей: «Построить транспортирующий прямолинейный инструмент, т. е. шкалу, соответствующую тому отношению, которое имеют хорды, стягивающие дуги, к радиусу». Для построения такого «инструмента», который по существу является номограммой, Накцианович берет из таблицы синусов значения синусов 2,5; 5; 7,5 градусов и т. д., умножает все члены полученных последовательностей на 2 и составляет следующую таблицу:

Градусы	Половина хорды	Хорда
5	43,6	87
10	87,1	174
15	130,5	261
20	173,6	347
25	216,4	433
30	258,8	517
35	300,7	601
40	352,0	684
45	382,6	763

и т. д. до 90 градусов.

Затем Накцианович строит схему, изображенную здесь на рис. 4 и 5.

Построение выполняется следующим образом:

1) Составляется вышеприведенная таблица хорд.
2) Отрезки, пропорциональные хордам откладываются на двух параллельных прямых, образуя шкалу хорд.

3) Расстояние между параллельными прямыми делится на 5 равных частей и через точки деления проводятся прямые, параллельные первоначально взятым прямым.
4) Точки, соответствующие 5, 10, 15 и т. д. градусам, соединяются зигзагообразной ломаной. Тогда отрезки, параллельные основаниям треугольников, равны соответственно хордам 2, 4, 6, 8, 10 градусов.

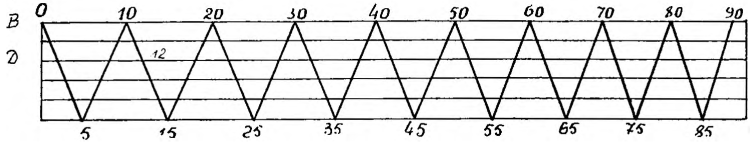


Рис. 4. Номограмма Накциановича для измерения углов.

К этому построению Накциановчи дает такое пояснение („corollarium“): «Так как хорда, стягивающая 60 градусов, есть радиус, то чтобы найти величину угла, нужно на расстоянии *B-60* от вершины угла между его сторонами начертить дугу *BC*, которая является его мерой (§ 48, Геом.), и хорду этого угла приложить к шкале; если эта хорда растягивается от *D* до *12*, то это указывает, что угол *DAE* равен 12 градусам» (рис. 6). Пояснение второе описывает применение той же номограммы для построения угла данной величины. Проиллюстрируем способ Накциановича на следующем примере (рис. 7).

Пусть надо построить угол 24°.

Радиусом *B-60* вычерчиваем дугу окружности, берем циркулем на шкале отрезок, соответствующий 24°, и радиусом *60-C* из точки *60* вычерчиваем соответствующую дугу. Точку пересечения этих дуг соединяем с точкой *B*. Полученный угол равен 24°.

К этому построению Накцианович делает следующее замечание: «Опыт показывает, что благодаря этому инструмен-

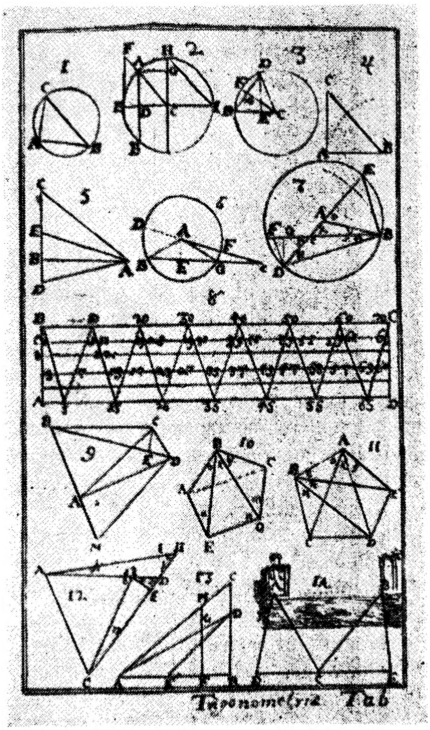


Рис. 5. Чертёж из сочинения Накциановича, содержащий номограмму.

ту можно определить величину углов довольно точно даже для частиц градуса» ([4], стр. 298). После описания этой номограммы Накцианович рассматривает вопрос о погрешности, допускаемой при решении треугольников, связанных с измерением на местности. В связи с этим Накцианович указывает, как следует выбирать место для измерения углов (statio), чтобы погрешность была наименьшей. Здесь встречаем

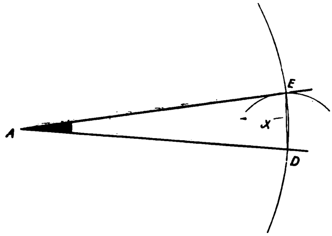


Рис. 6. Измерение данного угла с помощью номограммы Накциановича.

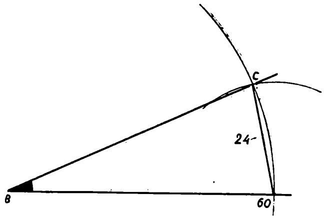


Рис. 7. Построение угла данной величины с помощью номограммы Накциановича.

интересное замечание Накциановича относительно связи теории и практики: «Мы дали здесь образчик того, что заслуживает внимания в точной практике геометрии, дабы показать, что точная теория подготавливает точную практику и дабы призвать к совершенному овладению теорией всех тех, кто будет заниматься практикой. Ошибается, кто воображает, что посредством теории невозможно изучить некоторые обстоятельства точных практических действий, которые могут быть наблюдаемы только тогда, когда начинаешь действовать практически. В этом случае эти обстоятельства наблюдаются только расплывчато; посредством теории же они определяются точно. То, что теория имеет значение не меньшее, чем практика, хорошо выразил знаменитый Мариноний стихами, написанными на титульном листе своей книги: «Когда пытливую мысль достаточно просветят теоремы, тогда дело само собой поддается рукам» ([4], стр. 303).

Вопросам измерения на местности Накцианович уделяет много внимания как в планиметрической, так и в тригонометрической части своего учебника (Рис. 8).

Приведем пример.

«Задача 20. Найти доступную высоту *BC*.

Решение.

1) Выбрав в точке *E* место стояния (statio) и правильно установив инструмент (§ 248, Геом.), найдем угол BEC (§ 134, Геом.) и расстояние от места стояния *EC* (§ 113, Геом.), которая будет перпендикулярна к *CB* (§ 197, Геом.).
2) Так как угол *C* прямой (§ 6, Геом.), найдем BC (§ 25), к которому если прибавим AC, то получим весь отрезок AB. Что требовалось найти» (рис. 9, 76).

Интересно, что здесь же Накцианович доказывает теорему: «Есл измерении величины угла *A* будет допущена ошибка, то правильна ысота *BD* так будет относиться к ошибочной *BC*, как тангенс пра ильного угла *DAB* к тангенсу ошибочного угла *CAB*» (стр. 306).

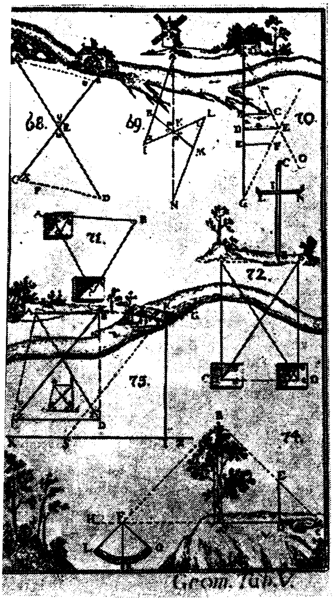


Рис. 8. Рисунок из книги Накциановича, иллюстрирующий измерения на местности.

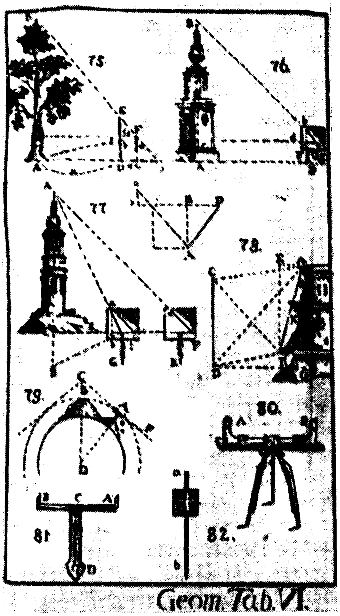


Рис. 9. Измерение высоты по учебнику Накциановича.

Из оценки погрешности в измерении на местности Накцианович делает соответствующие практические выводы. В случае нахождения доступной высоты в учебнике Накциановича находим такое пояснение („corollarium“): «Так как при неизменных углах отношение правильной высоты к ошибочной остается одно и то же (§ 52), то погрешность для большей высоты будет содержать больше футов, чем для меньшей (§ 276, Аритм.).

В задаче 22 требуется найти отношение диаметра к длине окружности. Эта задача решается тригонометрически, пользуясь старинными приемами. Если радиус разделить на 10 000 000 частей, то как синус, так и тангенс одной минуты содержит приближенно 2909 частей. Поэтому и дуга, соответствующая одной минуте, должна содержать приближенно 2909 частей. Тогда в полной окружности должно содержаться $2909 \cdot 2160 = 62.834.400$ частей. Поскольку диаметр содержит 20.000.000 частей, то отношение окружности к диаметру равно

$$\frac{628344}{200000} \approx 3{,}1417.$$

Вопрос об отношении длины окружности к диаметру Накцианович рассматривает более подробно в планиметрической части своего сочинения, кратко описывая историю этого вопроса*.

Второе издание сочинения Накциановича вышло в 1761 году. Два года спустя была закончена рукопись учебника прямолинейной тригонометрии, написанная французом Яковом Россиньолем, который в 1762/3 годах преподавал математику в Вильнюсской академии. Из рукописи, написанной на латинском языке, которая хранится в научной библиотеке Вильнюсского университета под шифром 1456, видно, что Россиньоль собирался написать учебник сферической тригонометрии, а прямолинейную тригонометрию рассматривал лишь как введение в сферическую тригонометрию. Рукопись начинается словами: «О сферической тригонометрии. Вступительный вопрос к Астрономии геометрической. Сферическая тригонометрия прокладывает путь к астрономии. Но перед сферической тригонометрией как бы факел несет прямолинейная; поэтому, чтобы в нашем трактате было необходимая ясность, совершенно уместно будет предпослать краткое обозрение прямолинейной тригонометрии» ([5], см. рис. 10). По-видимому, своего намерения Россиньоль не успел осуществить, так как скоро был вынужден оставить Вильно, написав лишь учебник прямолинейной тригонометрии. В начале рукописи дается такое определение тригонометрии: «Прямолинейная тригонометрия есть часть геометрии, которая рассматривает прямолинейные треугольники». Во время Эйлера, который завершил образование тригонометрии, как отдельной математической дисциплины, рассмотрев свойства тригонометрических функций, в силу старых традиций тригонометрия все еще рассматривалась как наука о решении треугольников и, таким образом, как часть геометрии. Соответственно этому, тригонометрические функции синус, тангенс и секанс, а также синус версус, рассматривались не как функции в абстрактном понимании, а как некоторые отрезки в круге. В своем сочинении по тригонометрии известный римский профессор Андреас Таке пишет: «Синусы, тангенсы, секансы являются некоторыми прямыми линиями,

* „Archimedes primus adinvenit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta et circumscripta, ei polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere... Nemo autem plus operae impendit Ludolpho a Ceulen, qui tandem reperit, posita diametro I, peripheriam esse maiorem quam 3,14159265358979323846626433832785О. Sed minorem quam idem numerus cyphra ultima in unitatem mutata. Sed quia numeri tam prolixi parum praxi respondent, in Geometria practica hodie assumitur diametrum esse ad peripheriam ut 100 ad 314, vel in circulis maioribus ut 10000 ad 31415. Hugenius compendiosiorem monstravit viam, sed pluribus Theorematis nixam, quae in his elementis non demonstrantur" ([4], стр. 189).

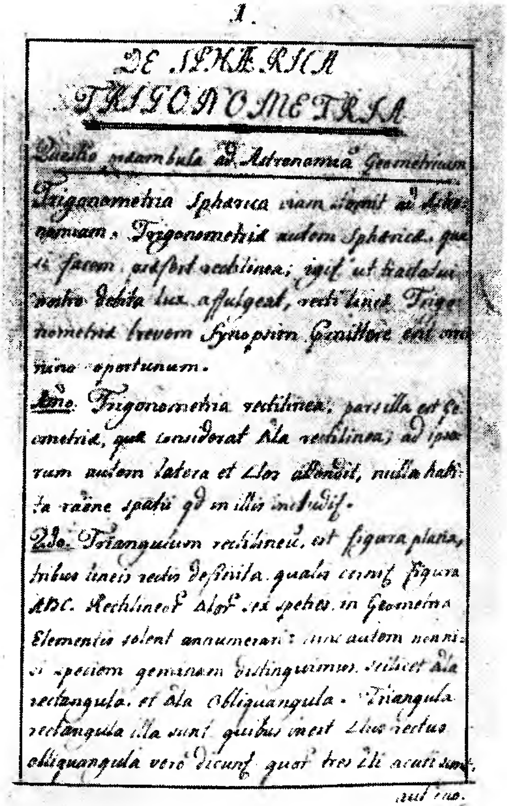
которые находят большое применение в решении треугольников, в практической геометрии, в астрономии и в других дисциплинах» ([6], стр. 1). Как Россиньоль, так и Накцианович рассматривает синусы, тангенсы и секансы, как соответствующие отрезки. В первом разделе «О построении таблиц или о способе нахождения синусов, тангенсов и секансов» Россиньоль доказывает ряд теорем, выражающих зависимость между тригонометрическими функциями различных углов, функции суммы и разности, функции кратных и половинных углов. Уже в самом начале проявляется особенность точки зрения математиков XVIII столетия, считавших тригонометрические функции прямолинейными отрезками. Если в современной точки зрения величина тригонометрических функций не зависит от величины радиуса тригонометрического круга, то у Россиньоля находим теорему: «В неравных кругах синусы, тангенсы и секансы подобных дуг относятся, как радиусы кругов». Ход доказательства у Россиньоля чисто словесный, без каких бы то ни было алгебраических символов.

В следующих разделах «О применении таблиц» и «О решении треугольников» рассматриваются различные способы, связанные с решением прямоугольных и косоугольных треугольников. Далее рассматриваются свойства логарифмов и их применение к решению треугольников, и, наконец, приложение тригонометрии к практике („De applicatione trigonometriae ad praxim"). Здесь встречаем ряд задач, относящихся к измерению высот и расстояний, и к некоторым вопросам астрономии, как, напр., вычисление расстояния Луны от Земли. В конце рукописи рассматриваются вопросы, уже не относящиеся к тригонометрии, как, например, устройство и применение пропорционального циркуля („De circino proportionis"), ряд задач на составление и решение систем линейных уравнений („Quaestiones arithmeticae, quae methodo analytica facillime resolvuntur") и даже вовсе не математические вопросы о культуре фруктовых деревьев („Observationes 100 hortenses").

II. Астрономические интересы в старом Виленском университете, учебники тригонометрии Снядецкого и Полинского

Закостенелые формы преподавания в старинной иезуитской академии, догматизм и рутина, группирование всех дисциплин вокруг теологии, бесплодные схоластические диспуты, — все это не соответствовало все более развивающимся производительным силам, задерживало развитие науки, подавляло всякую попытку самостоятельного исследования. Поэтому вполне естественно, что после закрытия ордена иезуитов, с переходом академии в светские руки, особенно же с реорганизацией 1803 года и превращением Главной Литовской Школы в университет начинается качественно новый, более высокий этап развития математических наук.

Сразу же после закрытия ордена иезуитов желание создать благоприятные условия для научной деятельности выразилось попыткой создать литовское научное общество.



1.

DE SPHAERICA TRIGONOMETRIA

Quaestio praeambula ad Astronomiam Geometricam

Trigonometria Sphaerica viam sternit ad Astronomiam. Trigonometria autem Sphaerica quae si faciem affert rectilineae; igitur ut tradatur nostro debita lux affulgeat, rectilineae Trigonometriae brevem Synopsin praemittere erit omnino opportunum.

1mo. Trigonometria rectilinea, pars illa est Geometriae, quae considerat triangula rectilinea; ad ipsorum autem latera et angulos attendit, nulla habita ratione spatii quod in illis includitur.

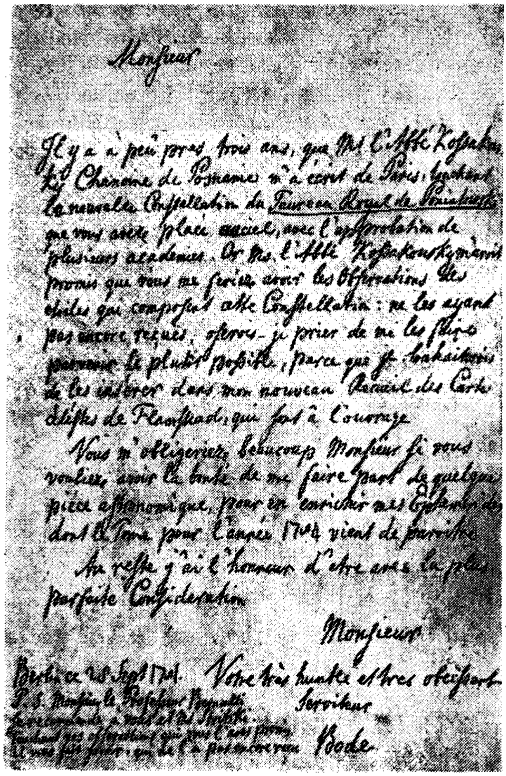
2do. Triangulum rectilineum, est figura plana, tribus lineis rectis definita, qualis est figura ABC. Rectilineorum triangulorum tres species in Geometriae Elementis solent annumerari: nos autem nonnisi speciem geminam distinguimus, scilicet triangula rectangula, et triangula obliquangula. Triangula rectangula illa sunt, quibus inest angulus rectus; obliquangula vero dicuntur, quae tres angulos acutos habent, aut uno.

Рис. 10. Страница из рукописи Россиньоля

«Будучи убеждены ежедневным опытом, как много пользы в других странах приносят академии наук, начатые частным усердием ученых и лишь потом поддерживаемые авторитетом Монархов, и пользуясь настоящими благополучными обстоятельствами, под влиянием такого же усердия на общее благо, которого Отечество в будущем может ожидать из роста литературы, мы задумали создать свободное патриотическое литературное общество, для которого законом будет любовь к наукам, а наградой — благополучные результаты, даваемые литературой. Сущность этого общества и его основные обязательства, пока не будут описаны более точно и обширно, содержатся в следующих пунктах».

Так начинается акт учреждения Вильнюсского научного общества, основанного формально астрономом Мартином Почобутом в 1773 году[1].

Акт подписали Франциск Нарвойш, Юзеф Керкилло, Юзеф Рымвид Мицкевич, Андрей Стржецкий (товарищ королевского астронома), Петр Гатей (товарищ королевского астронома) и другие.



Monsieur

Il y a à peu près trois ans, que Mr l'Abbé [illegible] Chanoine de Posnanie m'a écrit de Paris touchant la nouvelle Constellation du Taureau Royal de Poniatowski que vous avez placé au ciel, avec l'approbation de plusieurs academies. Or Mr. l'Abbé [illegible] m'avoit promis que vous me feriez avoir les Observations des étoiles qui composent cette Constellation: ne les ayant pas encore reçues, oserois-je prier de me les faire parvenir le plutôt possible, parce que je souhaiterois de les insérer dans mon nouveau Recueil des Cartes célestes de Flamstead, qui est à l'ouvrage.

Vous m'obligeriez beaucoup Monsieur si vous vouliez avoir la bonté de me faire part de quelque pièce astronomique, pour en enrichir mes Ephémérides dont le Tome pour l'année 1784 vient de paroître.

Au reste j'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite Considération

Monsieur

Berlin ce 28 Sept 1781.

Votre très humble et très obeissant Serviteur

Bode

P.S. [illegible]

Рис. 11. Письмо берлинского астронома Боде Мартину Почобуту.

Создатель этого научного общества, знаменитый астроном Мартин Одляницкий Почобут (1728—1810) преподавал в академии сферическую тригонометрию и аналитическую геометрию, но никаких работ по тригонометрии не оставил; тем не менее, его общепризнанная научная деятельность в области астрономии во многом способствовала развитию тригонометрии. Его астрономические наблюдения и точные вычисления основывались на хорошем овладении методами сферической тригонометрии. О важности его наблюдений и вычислений свидетельствует, например, письмо берлинского астронома Боде от 28 сентября 1781 г. (рис. 11). «Около трех лет тому назад — говорится в письме —

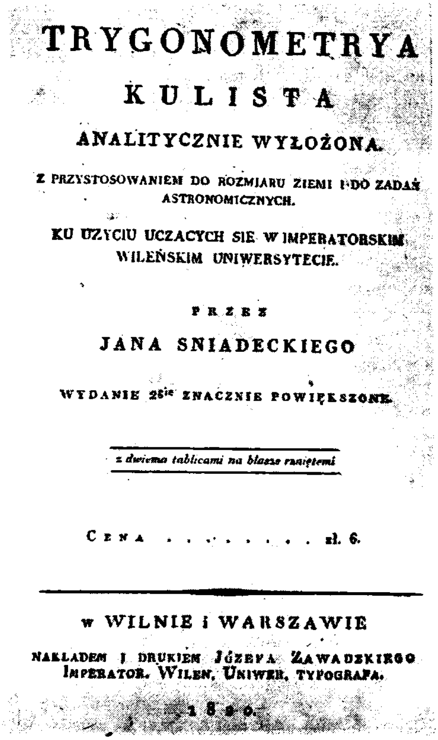
[1] В настоящее время акт хранится в научной библиотеке Вильнюсского университета под № DC, 57.

г. аббат Коссаковский, каноник познанский, писал мне из Парижа касательно нового созвездия «Королевский Бык Понятовского», которое Вы поместили на небе с признанием со стороны большей части академий. Г. аббат Коссаковский заверил меня, что Вы предоставите мне наблюдения звезд, которые составляют это созвездие: не получив их еще, я осмеливаюсь просить Вас прислать их мне как можно скорее, потому что я хотел бы их поместить в моем новом сборнике небесных карт Флемстида, которые находятся в сочинении (Речь идет о сочинении английского астронома Джона Флемстида „Atlas coelestis", изданном в 1729 году. *Б. Х.*). Я буду Вам очень обязан, Господин, если Вы изволите мне предоставить несколько астрономических статей, чтобы обогатить мои эфемериды, которых том на 1784 год уже выходит».

В постскрипте написано: «Представляю Вам и Стритскому г. профессора Бернулли. Относительно Ваших наблюдений, которые Вы ему обещали, он сообщает Вам, что их не получил» (рис. 11).

Если Почобут применял данные сферической тригонометрии для астрономических целей, не очень интересуясь вопросами изложения этой дисциплины, то его друг, астроном и математик Ян Снядецкий (1756—1830), интересовавшийся тригонометрией, как наукой, а также ее историческим развитием и вопросами ее преподавания, изложил полный курс сферической тригонометрии в своем сочинении „Trygonometria kulista analitycznie wyłożona, Wilno, 1817", вышедшем вторым изданием в 1820 году и впоследствии переведенном на немецкий язык (рис. 12). Книга содержит некоторые новые методы вывода уравнений сферической тригонометрии и поэтому имеет значение в развитии тригонометрии, как науки. Разработка этих методов, по словам самого Снядецкого, была представлена Петербургской Академии наук. Каков был ответ академии, остается неизвестным. «Сферическая тригонометрия» Снядецкого по содержанию тесно связана с изданным им еще в 1783 году двухтомных руководством по алгебре, на которое Снядецкий постоянно ссылается. Как в упомянутом руководстве по алгебре, так и в учебнике сферической тригонометрии ярко выражена педагогическая направленность, характеризующая автора, как глубокого мыслителя и хорошего педагога.

Во введении к первому изданию своей «Тригонометрии» Снядецкий пишет: «Наверно, никто не сомневается в большой пользе и применениях математики; но только с начальными знаниями этой науки никакая страна не достигает этой пользы и никогда не будет принадлежать к ряду основательно образованных народов. Чтобы успешно проникнуть в более глубокие математические знания и почувствовать восторг ума, каким эти знания наполняют мыслящего человека, необходимо ими овладеть в их первоначальных основах. Поэтому намерением моей жизни было облегчить молодежи нашей страны доступ и путь к этим глубоким умениям; но события нашей страны, бросая меня по различным трудностям, не дали мне довести до конца этого так нужного начинания... При закате жизни я бы хотел еще что-нибудь сделать для этой молодежи, добро и польза которой никогда не перестанут меня живо интересовать. Писал в Вильне, 12/24 февраля 1817 г.» ([9], стр. VIII). В соответствии с общим стремлением XVIII-го столетия «вывести все из одного начала», Снядецкий



TRYGONOMETRYA

KULISTA

ANALITYCZNIE WYŁOŻONA.

Z PRZYSTOSOWANIEM DO ROZMIARU ZIEMI I DO ZADAŃ ASTRONOMICZNYCH.

KU UŻYCIU UCZĄCYCH SIĘ W IMPERATORSKIM WILEŃSKIM UNIWERSYTECIE.

PRZEZ

JANA SNIADECKIEGO

WYDANIE 2gie ZNACZNIE POWIĘKSZONE.

z dwiema tablicami na blasze rzniętemi

Cena . . . . zł. 6.

w WILNIE i WARSZAWIE

NAKŁADEM I DRUKIEM JÓZEFA ZAWADZKIEGO IMPERATOR. WILEN. UNIWER. TYPOGRAFA.

1820.

Рис. 12. Титульный лист сочинения Снядецкого о сферической тригонометрии.

тоже ищет «начало», из которого можно вывести все содержание сферической и плоской тригонометрии. Во введении ко второму изданию этой книги читаем: «Уже почти сорок лет тому назад я представлял себе все вычислительные науки, выраженные с помощью букв, как единую алгебру, рассматриваемую в двойном аспекте, который нам передали греческие геометры. Первый аспект я заключил в двух томах, изданных в 1783 году, где дана подготовка учащихся к более глубоким рассуждениям о величине. Второго аспекта, который должен был заключать дифференциальное и интегральное исчисление, не дали мне выработать события страны. Все же, придерживаясь той же мысли, я рассматриваю сферическую тригонометрию, как существенную часть алгебры и как дополнение её исчисления в первом аспекте, поскольку она дает нам новые истины и взаимосвязи тригонометрических линий, которым принадлежит в этом исчислении широкое применение» ([9], стр. XI). Сочинение состоит из трех разделов. В первом разделе рассматриваются свойства сферического треугольника и выводятся уравнения и формулы для его решения. Во втором разделе свойства сферического треугольника применяются к геодезическим вопросам. В том же разделе проводится сравнение сферического и прямолинейного треугольника. Наконец, в третьем разделе описывается применение тригонометрии к астрономическим задачам.

Сочинение начинается упоминанием тринадцатого предложения второй книги Евклидовых «Начал», которое Снядецкий записывает в форме теоремы косинусов прямолинейной тригонометрии. Выяснив понятие сферического треугольника, Снядецкий выводит «фундаментальное уравнение всей тригонометрии»:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Далее следуют исторические замечания, относящиеся к этим формулам. Вообще, каждое предложение, каждую мысль Снядецкий рассматривает исторически, показывая ход развития данного вопроса и его связь с другими разделами тригонометрии.

В рассматриваемом сочинении читаем: «Каждое из этих уравнений называется фундаментальным уравнением, так как из него Де Лагранж вывел всю тригонометрию. Мы сделаем то же самое способом, как нам кажется, еще более простым, прилагая другие важные уравнения, которых этот великий геометр даже не упомянул». Из фундаментального уравнения Снядецкий выводит три главных уравнения:

$$\sin A = \frac{f}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\sin B = \frac{f}{\sin c \cdot \sin a},$$

$$\sin C = \frac{f}{\sin a \cdot \sin b}, \quad \text{откуда} \tag{1}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}, \tag{2}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos B \cdot \cos A}{\sin B \cdot \sin A}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} b \cdot \sin c &= \cos c \cdot \cos A + \sin A \cdot \operatorname{ctg} B,\\
\operatorname{ctg} b \cdot \sin a &= \cos a \cdot \cos C + \sin C \cdot \operatorname{ctg} B,\\
\operatorname{ctg} c \cdot \sin a &= \cos a \cdot \cos B + \sin B \cdot \operatorname{ctg} C, \qquad (3)\\
\operatorname{ctg} c \cdot \sin b &= \cos b \cdot \cos A + \sin A \cdot \operatorname{ctg} C.
\end{aligned}$$

«Фундаментальное уравнение и выведенные из него три главных уравнения — пишет Снядецкий — решают все случаи и вопросы, встречаемые в сферическом треугольнике». Далее в сочинении выводятся четыре равенства:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}, \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}, \qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A}, \qquad (\mathrm{III})$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A}. \qquad (\mathrm{IV})$$

«Ничего не может быть проще, — пишется в сочинении, — чем уравнения I, II, III, IV, из которых каждое выражает связь между всеми сторонами и всеми углами сферического треугольника. Всех их впервые дал Деламбр в книге „Connoissance des tems“ 1809, лист 45, которая вышла в 1809 году, но без никаких доказательств. Потом Гаусс в своем сочинении „Theoria motus coryorum coelestium“, изданном в 1809 г., на 51 листе опубликовал эти уравнения, как до этого времени неизвестные в геометрии, но тоже без никакого доказательства, и применил их к важным астрономическим вопросам. До меня дошло сочинение Гаусса в начале 1811 года; упомянутые уравнения в нем поразили меня своей простотой и применимостью. Я сразу искал их доказательства, и найдя таковое, как оно здесь изложено, я послал его в Петербургскую Академию наук 24 марта 1811 года. В „Connoissanse des tems“ 1812 г. выступил Деламбр против мнения Гаусса относительно этих уравнений, как данных им впервые, но доказательства их не предложил. Только в большом и прекрасном сочинении по астрономии, изданном в Париже в 1814 году, том I, лист 161—163, доказал эти уравнения Деламбр совсем другим способом, выводя их из Неперовых аналогий. Это делает и вычисление более сложным, и доказательство непрямым. Мое исчисление показывает, что эти уравнения выводятся из уравнений Каньоли, сочетая два значения cos A

с двумя значениями cos$a$, или, говоря в более общем виде, два значения косинуса угла сочетая с двумя значениями косинуса стороны, лежащей против этого угла; а это делает доказательство прямым (demonstratio directa) и более общим, ибо из каждого уравнения Каньоли, взяв угол с одной стороны уравнения выраженный через косинус, и косинус противолежащей стороны с другой стороны уравнения, и поступая здесь указанным способом, из каждого, говорю, уравнения Каньоли, выводятся четыре подобных уравнения» ([9], стр. 20, 21). Приводимые Снядецким примеры для иллюстрации применения формул интересны тем, что взяты большей частью из личных наблюдений Снядецкого, проводимых им в Вильнюсской обсерватории. Например, рассматривая различные способы применения сферической тригонометрии к астрономическим вычислениям, Снядецкий предлагает следующую задачу: «Знаменитая комета, наблюдавшаяся и вычисленная в Вильне в июле 1819 года, имела 6 июля н. с. в 12 часов среднего времени, т. е. в полночь, среднюю солнечную долготу $9^s23°22'58''=l$; среднюю солнечную северную широту $64°12'1''=p$. 14-го июля н. с. во столько же часов она имела среднюю солнечную долготу $0^s20°25'17''=l$; среднюю солнечную северную широту $80°21'10''=p$; какая отсюда следует долгота ее узла и наклон ее траектории?»

Искренний патриотизм Снядецкого, его всесторонняя образованность и глубокие знания в области астрономии и математики, его глубоко продуманные педагогические взгляды,—все это придает его математическим сочинениям непреходящую ценность в истории культуры Литвы.

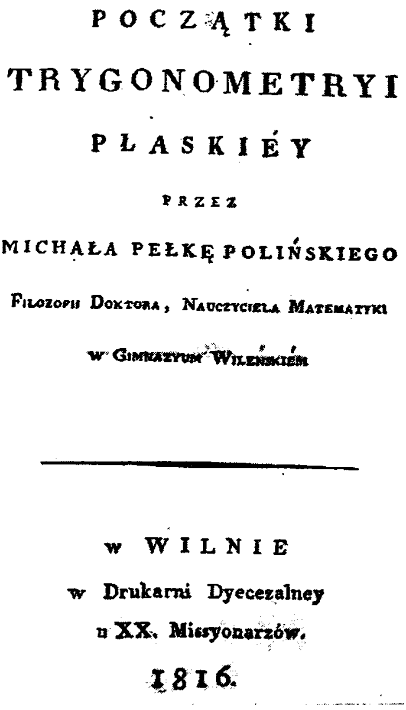
За год до появления «Сферической тригонометрии» Снядецкого вышел из печати учебник прямолинейной тригонометрии, написанный учителем математики Вильнюсской гимназии Михаилом Пэлкой-Полинским (1784—1848; см. рис. 13). Этот учебник подвергался переработке и издавался дважды уже в период деятельности Полинского в качестве профессора Вильнюсского университета, в 1821 и 1828 годах. Второе издание, подготовленное к печати после научного путешествия Полинского в Германию, Францию и Италию, значительно отличается от первоначального издания в 1816 году.

Во всем учебнике чувствуется большое влияние французской школы, в частности Лежандра, у которого Полинский много позаимствовал. В начале своего учебника Полинский пишет: «Все прямолинейные фигуры можно или преобразовать или разделить на прямолинейные треугольники с помощью прямых линий, проведенных ко всем углам из точки взятой в вершине угла, на его стороне или внутри фигуры; поэтому для познания свойств каких-нибудь прямолинейных фигур и для их измерения достаточно знать свойства и способ измерения треугольников». Во втором издании, кроме обычного школьного курса тригонометрии, находим бесконечные ряды для функции sin$x$, cos$x$, tg$x$, формулы Эйлера, связывающие показательную и тригонометрические функции, разложение в бесконечный ряд функций

$\log \frac{1+z}{1-z}$ и позаимствованный из учебника Лежанра ряд для вычисления $\sin \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ в следующей форме:

$$\sin \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963267948966 \frac{m}{n} - 0{,}6459640975062463 \frac{m^3}{n^3} + \\ + 0{,}0796926262461670 \frac{m^5}{n^5} - \dots ,$$

и аналогичный ряд для $\cos \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$. Ко второму и третьему изданию тригонометрии приложены таблицы логарифмов чисел, а также логарифмов синусов и тангенсов. Несмотря на богатство и разнообразие


POCZĄTKI

TRYGONOMETRYI

PŁASKIÉY

PRZEZ

MICHAŁA PEŁKĘ POLIŃSKIEGO

Filozofii Doktora, Nauczyciela Matematyki

w Gimnazyum Wileńskiém

w WILNIE

w Drukarni Dyecezalney

u XX. Missyonarzów.

1816.

Рис. 13. Титульный лист учебника тригонометрии М. Пэлки-Полинского.

изложенного материала, учебник Полинского с научной точки зрения стоит значительно ниже «Сферической тригонометрии» Снядецкого. Тем не менее, этот учебник сыграл значительную роль в математической подготовке молодежи.

Значительный интерес представляет собой рукописное сочинение Полинского «О конических сечениях» [7], написанное на польском языке в 1810—11 году, когда Полинский преподавал математику в Минской гимназии. Под влиянием учебника аналитической геометрии Ж. Б. Биота в этой рукописи Полинский выводит уравнения конических сечений, пользуясь методом тригонометрии.

Ход рассуждения Полинского таков: Пусть плоскость, пересекающая конус, составляет с его образующей угол α (рис. 14). Постоянный отрезок AB обозначим буквой c. Из треугольника ABE, APK, AFP находим соответственно:

$$AE=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma};\quad AK=\frac{x\cdot\sin\varphi}{\sin\gamma};\quad FP=\frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma},\text{ где } x=AP.$$

Так как

$$PG=KE,\quad\text{то}\quad y^2=FP\cdot PG=FP\cdot KE=FP(AE-AK)=$$
$$=\frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{x\cdot\sin\varphi}{\sin\gamma}\right)=\frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cdot[c\cdot\sin\beta-x\cdot\sin(\alpha+\beta)],$$

где y является перпендикуляром, опущенным из точки окружности на её диаметр.

Полученное уравнение

$$y^2=\frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cdot[c\cdot\sin\beta-x\cdot\sin(\alpha+\beta)]\tag{1}$$

есть общее уравнение конического сечения.

Если на секущей плоскости возьмем прямоугольную систему координат с началом в точке A, считая ось X расположенной вдоль отрезка AL, то AP будет абсциссой x точки M конического сечения, а y ординатой этой точки. Приравнивая y нулю, найдем точки пересечения кривой с осью X:

$$\frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cdot[c\cdot\sin\beta-x\cdot\sin(\alpha+\beta)]=0,\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Обозначив расстояние между точками пересечения через $2a$, получим:

$$\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=2a,$$
$$c\cdot\sin\beta=2a\cdot\sin(\alpha+\beta),$$
$$y^2=\frac{\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cdot[2ax\cdot\sin(\alpha+\beta)-x^2\cdot\sin(\alpha+\beta)],$$
$$y^2=\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\gamma}\cdot(2ax-x^2).\tag{2}$$

Пусть b представляет собой то значение y, для которого $x=a$. Тогда

$$b^2=\frac{\sin a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\gamma}\cdot(2a^2-a^2);\quad\text{если}\quad\alpha+\beta<2d,\quad\text{то}$$
$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\gamma}=\frac{b^2}{a^2}.\tag{3}$$

Подставляя значение этого выражения в (2), получим:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).\tag{4}$$

Уравнение (4) есть уравнение эллипса.

Выразив это уравнение в форме пропорции

$$y^2:(2a-x)\cdot x=b^2:a^2,$$

из равенств

$$\frac{y_1^2}{(2a-x_1)\cdot x_1}=\frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{y_2^2}{(2a-x_2)\cdot x_2}=\frac{b^2}{a^2}$$

Полинский делает вывод: квадраты из ординат перпендикулярных к большей оси так относятся друг к другу, как произведения или прямоугольники из соответствующих им абсцисс. Это напоминает древне-греческое словесное выражение свойств конических сечений.

Идея применения тригонометрических функций для выражения уравнений конических сечений не является новой. Эту мысль Полинский позаимствовал из сочинения Биота, но изложил материал посвоему, не пользуясь пространственными координатами, как это имеет место у Биота.

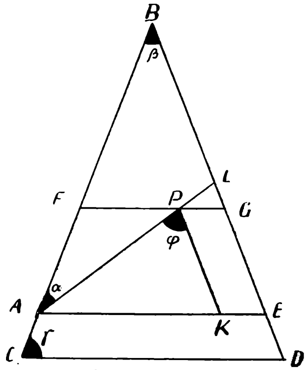


Рис. 14. Вывод уравнений конических сечений по рукописи Полинского.

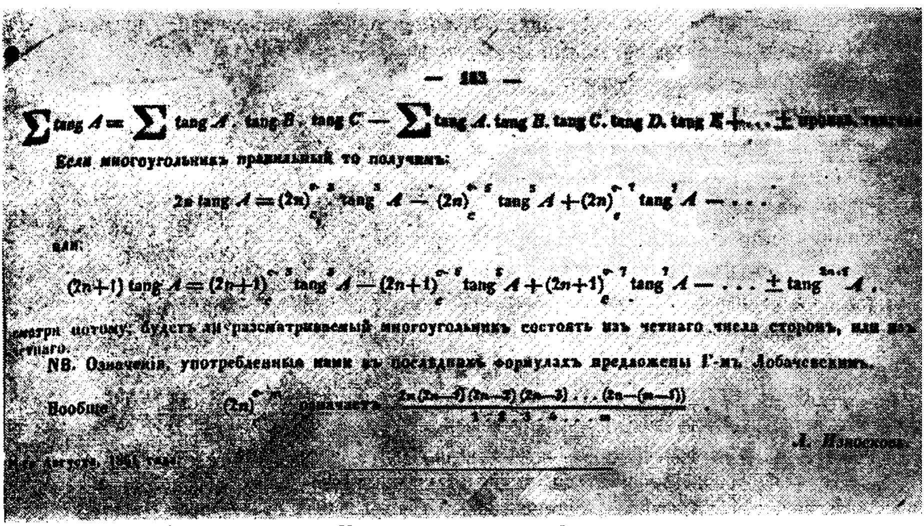
После закрытия Вильнюсского университета интерес к математическим наукам в Вильне угас. Вместе с тем стали забываться астрономические традиции Почобута и Снядецкого. В шестидесятных годах девятнадцатого столетия эти традиции попытался оживить воспитанник Казанского университета, с 1852 года директор Виленской обсерватории Матвей Матвеевич Гусев, начав с 1860 года издание научного математического журнала «Вестник математических наук». Постоянными сотрудниками этого журнала были такие крупные ученые, как профессора Московского университета Ершов и Любимов, профессор Бреславльского университета Шретер, преподаватель киевского кадетского корпуса Ващенко-Захарченко, профессор Мюнхенского университета Зейдель, профессор Казанского университета Ковальский, учитель второй казанской гимназии Износков. Кроме того, в журнале печатались письма профессора Московского университета Н. Брашмана, извлечения из работ П. Чебышева и других выдающихся математиков. Статьи по тригонометрии и по математическому анализу печатал учитель Казанской гимназии Л. Износков. В некоторых его работах сказывается влияние Н. Лобачевского. Например, в № 20—21 (один выпуск 1 декабря 1861 г.) этого журнала напечатана статья Износкова «Вывод формул, выражающих зависимость между углами многоугольника». В конце статьи автор получает следующие формулы для правильных многоугольников:

$$2n \cdot \operatorname{tang} A = (2n)_c^{c-3} \cdot \operatorname{tang}^3 A - (2n)_c^{c-5} \cdot \operatorname{tang}^5 A + (2n)_c^{c-7} \cdot \operatorname{tang}^7 A - \ldots,$$

или

$$(2n+1) \cdot \operatorname{tang} A = (2n+1)_c^{c-3} \cdot \operatorname{tang}^3 A - (2n+1)_c^{c-5} \cdot \operatorname{tang}^5 A +$$
$$+ (2n+1)_c^{c-7} \cdot \operatorname{tang}^7 A - \ldots \pm \operatorname{tang}^{2n+1} A,$$

смотря по тому, будет ли рассматриваемый многоугольник состоять из четного числа сторон, или из нечетного, и делает следующее, с исто-


$\sum \operatorname{tang} A = \sum \operatorname{tang} A . \operatorname{tang} B . \operatorname{tang} C - \sum \operatorname{tang} A . \operatorname{tang} B . \operatorname{tang} C . \operatorname{tang} D . \operatorname{tang} E + \ldots \pm$ произв. тангенс.

Если многоугольникъ правильный то получимъ:

$$2n \operatorname{tang} A = (2n)_c^{c-3} \operatorname{tang}^3 A - (2n)_c^{c-5} \operatorname{tang}^5 A + (2n)_c^{c-7} \operatorname{tang}^7 A - \ldots$$

или:

$$(2n+1) \operatorname{tang} A = (2n+1)_c^{c-3} \operatorname{tang}^3 A - (2n+1)_c^{c-5} \operatorname{tang}^5 A + (2n+1)_c^{c-7} \operatorname{tang}^7 A - \ldots \pm \operatorname{tang}^{2n+1} A,$$

смотря потому, будетъ ли разсматриваемый многоугольникъ состоять изъ четнаго числа сторонъ, или изъ нечетнаго.

NB. Означенія, употребленныя нами въ послѣднихъ формулахъ предложены Г-мъ Лобачевскимъ.

Вообще $(2n)_c^{\Omega m}$ означаетъ $\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-(m-1))}{1.2.3.4\ldots m}$

А. Износковъ

21 Августа 1861 года.

Рис. 15. Окончание статьи Износкова, напечатанной в виленском научном журнале «Вестник математических наук» в 1861 г.

рико-математической точки зрения весьма интересное, применение: «Означения, употребленные нами в последних формулах, предложены г-м Лобачевским.

Вообще $(2n)_c^{\Omega m}$ означает

$$\frac{2n \cdot (2n-1)(2n-2)\ldots[2n-(m-1)]''}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}.$$

Статья написана 21-го августа 1861 года (рис. 14). Так, сто лет тому назад, в вильнюсском математическом журнале сказались следы влияния великого казанского геометра.

Если историк науки в настоящее время бросит беглый взгляд на развитие математики в древней иезуитской академии и старинном Вильнюсском университете, если он попытается обобщить данные фактического материала, то перед ним развернется захватывающая картина научных исканий, борьбы научной мысли с закостенелыми схоластическими формами, диалектика перехода от схоластического оцепенения к свободному развертыванию научных исследований.

В начале XIX столетия в культурной жизни университета наблюдается бурный расцвет. В это время начинает проявляться поэтическое творчество студента Адама Мицкевича, в это время в университете работают такие крупные ученые, как филолог Гродек, медик Петр Франк, химик Андрей Снядецкий и его брат, знаменитый астроном Ян Снядецкий, математик Зигмунд Ревковский. Переводится на польский язык «Аналитическая геометрия» Ж. Б. Биота, «Начала дифференциального и интегрального исчисления» С. Лакруа, крепнут связи университета с Петербургской Академией наук: Ян Снядецкий посылает в Академию свою работу из области сферической тригонометрии, академик М. В. Остроградский рассматривает программу З. Ревковского по теории вероятностей. Но основной областью применения математики является попрежнему астрономия. Характерно, что после закрытия университета попытка оживить математическую мысль в Вильнюсе принадлежит опять-таки астроному, директору Виленской обсерватории Матвею Гусеву. Таким образом, в течение почти трех столетий через все многообразие математических интересов, проявляющихся в научной жизни старинного Вильнюсского университета, красной нитью проходит неуклонное развитие астрономии и непосредственно с ней связанной математической дисциплины — тригонометрии.

Вильнюсский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 15 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bieliński, Uniwersytet Wileński, Kraków, 1889—1890.
2. Nicolai Copernici Torinensis De revolutionibus orbium coelestium libri VI. Norimbergae, 1543.
3. Doctissimi viri et mathematicarum disciplinarum eximii professoris Joannis de Regio Monte De triangulis omnimodis libri quinque, Norimbergae, 1533.
4. Praelectiones mathematicae ex Wolfianis elementis adornatae a P. Jacobo Nakcyanowicz, Vilnae, 1759.
5. Trigonometria a P. Rossiniol dictata Vilnae, 1763. Рукопись, Научная библиотека Вильнюсского университета им. В. Капсукаса, 1456.
6. Andreae Tacquet S. J. Trigonometria plana nec non trigonometria sphaerica Rogerii Boscovich eiusdem S. J. et sectiones conicae Guidonis Grandi cum amplissimis annotationibus et additamentis Octaviani Cometi tomus secundus. Romae, 1745.
7. Przecięcia ostrokrężne i inne linije krzywe wykladane przez Michała Polinskiego w Gimnazjum Mińskiem 1810—1811 i t. d. Рукопись, Научная библиотека Вильнюсского университета им. В. Капсукаса, D. C. 159.
8. Początki trygonometryi płaskiey przez Michała Pełkę Polińskiego, w Wilnie, wyd. I 1816, wyd. II 1821, wyd. III 1828.
9. Trygonometrya kulista analitycznie wyłożona... przez Jana Sniadeckiego, w Wilnie i Warszawie, 1820.
10. Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия, перевод с немецкого под редакцией А. П. Юшкевича, Москва, 1960.
11. Личная переписка Мартина Почобута с зарубежными учеными, научная библиотека Вильнюсского университета им. В. Капсукаса, D. C. 53, D. C. 57.
12. Л. Износков, Вывод формул, выражающих зависимость между углами многоугольника. «Вестник математических наук», Вильна, 1861, декабрь, № 20—21, стр. 161—163.

TRIGONOMETRIJOS ISSIVYSTYMAS SENAJAME VILNIAUS UNIVERSITETE

B. CHMIELEVSKIS

(R e z i u m ė)

Šiame eskize pirmą kartą mėginama atvaizduoti trigonometrijos išsivystymą senojoje Vilniaus akademijoje ir senajame universitete, išskiriant šio vystymosi dvi fazes ir iškeliant senojo universiteto matematikos sąveiką su Europos matematika. Remiantis faktine medžiaga, konstatuojama, kad J. Nakcianavičiaus darbe „Praelectiones mathematicae" (1759) ne tik sistemingai išdėstoma plokščioji trigonometrija, bet taip pat išreiškiama pagrindinė nomografijos idėja. Straipsnyje pabrėžiama Jono Sniadeckio „Sferinės trigonometrijos" reikšmė, kur Sniadeckis mėgina visas sferinės trigonometrijos formules išvesti iš vieningo bendrojo principo. Straipsnio pabaigoje iškeliama Vilniaus astronomo M. Gusievo įsteigto mokslinio matematinio žurnalo „Vestnik matematičeskich nauk" reikšmė matematinės kultūros kėlimui Vilniuje. Sąryšyje su tuo konstatuojamas N. Lobačevskio mokslinės veiklos atgarsis minėtame žurnale.

DIE ENTWICKLUNG DER TRIGONOMETRIE IN DER ALTEN WILNAER UNIVERSITÄT

B. CHMIELEWSKI

(Z u s a m m e n f a s s u n g)

In vorliegendem Entwurf wird zum erstenmal der Versuch unternommen, die Entwicklung der Trigonometrie in der alten Wilnaer Akademie und Universität darzustellen, wobei zwei verschiedene Phasen dieser Entwicklung unterschieden und die Beziehungen zur europäischen Mathematik hervorgehoben werden. Auf Grund von Tatsachenmaterial wird festegestellt, dass in „Praelectiones Mathematicae" von Jakob Nakcyanowicz nicht nur die ebene Trigonometrie in systematischer Weise dargestellt, sondern sogar Grundidee der Nomographie zu finden ist. Besonders wird die Bedeutung der „Sphärischen Trigonometrie" von Johann Sniadecki hervorgehoben, in der er alle wichtigsten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie aus einem einheitlichen Prinzip herzuleiten versucht. Ferner wird die Bedeutung der wissenschaftlichen mathematischen Zeitschrift „Westnik matematitscheskich nauk", die von Wilnaer Astronomen Matwej Gusjew gegründet war, für die Entwicklung der Trigonometrie in Wilna gezeigt. Mit Beziehung darauf wird der Nachhall der wissenschaftlichen Tätigkeit von Lobatschewskij in genannter Zeitschrift festgestellt.