III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ГУСТОТЕ НУЛЕЙ $Z$ — ФУНКЦИЙ ГЕККЕ

К. БУЛОТА

Вопросы распределения нулей римановой дзета-функции всё время занимают важное место в теории чисел. До сих пор не удаётся доказать не только знаменитую гипотезу Римана о том, что все нули $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, лежат на пряммой $\sigma=\frac{1}{2}$, но и ослабленную „плотностную" гипотезу, утверждающую, что $N(\alpha, T)$ — число нулей функции $\zeta(s)$ в прямоугольнике

$$\begin{gathered}\alpha\leqslant\sigma\leqslant 1\\ 0<t\leqslant T\end{gathered}$$

не превышает

$$c_1 T^{2(1-\alpha)}\ln^{c_2} T.$$

Если обозначить

$$N(\alpha, T)\leqslant T^{\varkappa(\alpha)(1-\alpha)}\ln^{c_3} T,$$

то наилучшие результаты последних лет такие:

$$\varkappa(\alpha)\leqslant\min\left\{\frac{3}{2-\alpha},\ 2(1+2c)\right\},$$

где

$$c=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\ln t}.$$

(Титчмарш [11], гл. XI, п. 18—19)

$$\begin{gathered}\varkappa(\alpha\leqslant 2+600(1-\alpha)^{0,01},\\ \varkappa(\alpha)\leqslant 2+(1-\alpha)^{0,14}\end{gathered}$$

(Туран [5]),

$$\varkappa(\alpha)\leqslant 2+c_4(1-\alpha)^{\frac{1}{3}}$$

(Родосский [14]).

Имеются аналогичные результаты и для $L$-рядов Дирихле. Так, например, Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым получено

$$\varkappa_1(\alpha)\leqslant\frac{4}{3-2\alpha}$$

(Чудаков [2], Линник [12]).

К. А. Родосский для $L$-рядов Дирихле получил в 1952 г.

$$\varkappa_1(\alpha)\leqslant\frac{9}{2\alpha},$$

Стас в 1961 г.

$$\varkappa_1(\alpha)\leqslant 2+(1-\alpha)^{0,08}.$$

Сравнительно мало исследованы вопросы такого типа в алгебраических полях степени $n \geqslant 2$. Здесь имеются ряд работ Кубилюся, Хаселгрове и др.

Пусть $N(\alpha, T, \Xi)$ обозначает число нулей $Z$-функции Гекке мнимого квадратичного поля, причём характер Гекке имеет фиксированный модуль $\mathfrak{m}$ и показатель — целый рациональный $m$, $|m| \leqslant M$, в области

$$\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1,$$
$$0 < t \leqslant T.$$

Тогда вблизи прямой $\sigma = 1$ результаты Кубилюса следующие:

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} N(\alpha, T, \Xi) \ll \begin{cases} (M^{15+\varepsilon_1} T^{18+\varepsilon_1})^{1-\alpha} \ln^{25} MT, \\ (M^{9+\varepsilon_2} T^{12+\varepsilon_2})^{1-\alpha+\varepsilon_2}, \end{cases}$$

([7], лемма 17).

Приведём также некоторые результаты Хаселгрове для гауссового поля $K(i)$ и единичного модуля $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$:

$$N(\alpha, T, \Xi) \ll (T^2 + M^2)^{2c_5(1-\alpha)} T^{2(1-\alpha)} \ln^{c_6} (T^2 + M^2),$$

$$\sum_{|m| \leqslant M} N(\alpha, T, \Xi) \ll (T^2 + M^2)^{(2+2c_5)(1-\alpha)} \ln^{c_6} (T^2 + M^2).$$

где $c_5 \leqslant \frac{1}{2}$ (Хаселгрове [4]).

В настоящей статье доказываются следующие три теоремы:

**Теорема 1.** *Пусть $Z(s, \Xi, \mathfrak{N})$ — $Z$-функция Гекке от класса идеалов $\mathfrak{N}$ мнимого квадратичного поля $K$, $\Xi(\mathfrak{a})$ — характер Гекке второго рода по фиксированному модулю $\mathfrak{m}$ и с показателем $m$, $\alpha$ — любое число из интервала $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, $N_1(\alpha, T, 2T, \Xi)$ — число нулей указанной $Z$-функции в области*

$$\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1,$$
$$T < |t| \leqslant 2T.$$

*Тогда при $T \geqslant c_7$, $m \ll T$,* где *$c_7$ — достаточно большая константа, справедлива оценка*

$$N_1(\alpha, T, 2T, \Xi) \ll T^{4\alpha(1-\alpha)} \ln^5 T.$$

**Теорема 2.** *Сохраняя все обозначения теоремы 1, имеем*

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M \ll T}} N_1(\alpha, T, 2T, \Xi) \ll (MT)^{8(1-\alpha)} \ln^{6,5} T.$$

**Теорема 3.** *При тех же самых обозначениях и при любом $\varepsilon < 0$ имеем*

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M \ll T}} N_1(\alpha, T, 2T, \Xi) \ll (MT)^{4(1-\alpha)+\varepsilon}.$$

Доказательство этих теорем проводится так называемым классическим Ландау — Карлсона — Титчмарша методом, аналогично, например, работам Линника [12] и Чудакова [2]. Для этого используется приближенное функциональное уравнение $Z$-функций Гекке над мнимым квадратичным полем, доказанное в [9]. Отметим, что ограничения, наложенные в теоремах 1—3 на числа $m$, $M$ не являются существенными. Они связаны с формулировкой приближённого функционального уравнения в [9]. При некотором видоизменении этого уравнения возможно получение теми же классическими методами результатов без указанных ограничений.

Следуя Гекке, поле $K$ можно расширить до систем идеальных чисел, каждая система распадается на $h$ классов идеальных чисел ($h$ — число классов идеалов поля). В этом случае каждый идеал поля будет представлен группой сопряжённых идеальных чисел. Если определённым образом фиксировать одно идеальное число из группы сопряжённых, то будем иметь взаимно однозначное соответствие между всеми идеалами поля и идеалными числами. Поэтому изложение можно ввести как в терминах идеальных чисел (например, [6]–[7]), так и в терминах идеалов. Здесь, как и в [9], употребляется терминология идеалов. Однако приходится ввести понятие аргумента идеала, как величины, равной аргументу идеалу соответствующего идеального числа. Поэтому представление характера Гекке второго рода

$$\Xi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{a})\, e^{im \arg \mathfrak{a}},$$

где $\chi(\mathfrak{a})$ — групповой характер Дирихле по $\bmod \mathfrak{m}$, будет иметь вполне определённый смысл.

В начале статьи формулируются три хорошо известные теоремы, на которые часто придётся ссылаться, затем следуют несколько вспомогательных лемм (4–6), являющихся аналогами сходственных лемм в поле рациональных чисел и далее — само уж применение классического метода, разбито также на несколько лемм. В отдельных местах возможны упрощения доказательства.

Улучшение результатов теорем 1–3 при данном методе возможно как за счёт улучшения остаточного члена приближенного функционального уравнения $Z$-функций Гекке, так и за счёт улучшения оценок тригонометрических сумм типа

$$\sum_{|m| \leq M} e^{im \arg \mathfrak{a}}.$$

На протяжении всей статьи символ $\ll$ будет включать константу, зависящую от поля $K$ и идеала $\mathfrak{m}$. Через $c$, $c_1$, $c_2$, ... будем обозначать обсолютные постоянные, $\varepsilon$ — любое положительное, сколь угодно малое число, не всегда одно и то же самое. Также часто функции, зависящие от несколько аргументов, будут обозначаться сокращенно, с указанием только одного — двух наиболее нам важных аргументов.

**Лемма 1.** *(Теорема Абеля о частном суммированнии.) Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... $\lambda_n$, ... неубывающая последовательность вещественных чисел, стремящаяся к бесконечности, $a_1$ $a_2$, ... — произвольная последовательность комплексных чисел, $\Phi(x)$ — функция действительного переменного $x$, имеющая непрерывную производную.*

*Тогда*

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n \Phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{x} S(\xi)\, \Phi'(\xi)\, d\xi + S(x)\, \Phi(x), \tag{1}$$

где

$$S(x)=\sum_{\lambda_n\leqslant x} a_n.$$

*Здесь суммирование распространяется по тем $n$, для которых $\lambda_n\leqslant x$, $x$ — любое $\geqslant\lambda_1$.*

Доказательство можно найти, например, в [5].

**Лемма 2.** *(Теорема Иенсена.) Пусть функция $f(z)$ является регулярной в круге $|z-z_0|\leqslant R$ и имеет не более $n$ нулей в круге $|z-z_0|\leqslant r<R$.*

*Тогда, если $f(z_0)\neq 0$,*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n\leqslant\frac{M}{|f(z)_0|},\tag{2}$$

*где*

$$M=\max_{|z-z_0|\leqslant R}|f(z)|.$$

Доказательство можно найти в книге Ингама [10] и др.

**Лемма 3.** *(Теорема Литллвуда.) Пусть $\varphi(s)$, $s=\sigma+it$, функция, мероморфная внутри и на границе прямоугольника, ограниченного прямыми $t=T_1$, $t=T_2$, $\sigma=\alpha$, $\sigma=\beta$, и регулярна в некоторой окрестности прямой $\sigma=\beta$. Пусть в этой окрестности определена функция $F(s)=\ln\varphi(s)$, которая аналитически продолжаётся на весь прямоугольник. Пусть, далее, $\nu(\alpha, T_1, T_2)$ означает разность между числом нулей и числом полюсов функции $\varphi(s)$ в части прямоугольника, лежащей справа от прямой $\sigma=\alpha$, если считать нули и полюсы на прямой $t=T_2$ и не считать на прямой $t=T_1$.*

*Тогда*

$$\int_C F(s)\,ds=-2\pi i\int_\alpha^\beta \nu(\sigma, T_1, T_2)\,d\sigma,\tag{3}$$

*где интеграл в левой части берётся вдоль контура $C$ прямоугольника в положительном направлении.*

Доказательство см. в [11].

**Лемма 4.** *Пусть $\tau_k(\mathfrak{a})$ означает число решений в целых идеалах уравнения $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_k$, $l\geqslant 1$ и $k\geqslant 1$ — натуральные числа, $x\geqslant 2$. Тогда*

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\tau_k^l(\mathfrak{a})\ll x(\ln x)^{k^l-1}.\tag{4}$$

Доказательство. Лемма доказывается такими же методами, как и в случае поля рациональных чисел (Марджанишвили [8]). Поэтому приведём только важнейшие этапы доказательства.

Используя равенство

$$\tau_k(\mathfrak{a})=\sum_{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}\tau_{k-1}(\mathfrak{b}),$$

оцениваемую сумму преобразуем следующим образом:

$$T_k^l(x)=\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\sum_{N\mathfrak{b}_2\leqslant x}\cdots\sum_{N\mathfrak{b}_l\leqslant x}\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_1)\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_2)\ldots\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_l)\sum_{\pi}1,$$

где последняя сумма берётся по всем целым идеалам $\pi_i$, удовлетворяющим условию

$$\mathfrak{b}_1\pi_1=\mathfrak{b}_2\pi_2=\ldots=\mathfrak{b}_l\pi_l,$$
$$N\mathfrak{b}_i\pi_i\leqslant x,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ l.$$

Нетрудно проверить, что эта последняя сумма

$$\sum_{\pi}1\ll\frac{x}{N\left(K(\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{b}_l)\right)},$$

где через $K(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_l)$ обозначено наименьшее общее кратное идеалов $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_l$.

Так как

$$\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_1)\sum_{N\mathfrak{b}_2\leqslant x}\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_2)\frac{1}{N\left(K(\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2)\right)}=$$
$$=\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_1)\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{b}_1}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_2'=\frac{\mathfrak{b}_2}{(\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2)}\\ N\mathfrak{b}_2'\leqslant\frac{x}{N\mathfrak{d}}}}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_2')}{N\left(K(\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{d}\,\mathfrak{b}_2')\right)}\ll$$
$$\ll\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_1)\tau_k(\mathfrak{b}_1)\sum_{N\mathfrak{b}_2'\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_2')}{N(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{b}_2')}$$

в силу известного свойства $\tau_i(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)\leqslant\tau_i(\mathfrak{a}_1)\tau_i(\mathfrak{a}_2)$, то, постепенно продолжая такое преобразование, получим

$$T_k^l(x)\ll x\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_1)\tau_k^{l-1}(\mathfrak{b}_1)}{N\mathfrak{b}_1}\sum_{N\mathfrak{b}_2\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_2)\tau_k^{l-2}(\mathfrak{b}_2)}{N\mathfrak{b}_2}\cdots\sum_{N\mathfrak{b}_l\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b}_l)}{N\mathfrak{b}_l}.$$

По одной лемме Кубилюса ([7], лемма 1) имеем

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\tau_k(\mathfrak{a})\ll x\ln^{k-1}x,$$

так что лемма справедлива для $l=1$. Предположим её справедливость для всех степеней $1\leqslant n\leqslant l$ и докажем её для $n=l+1$. Так как

$$T_k^{l+1}(x)\ll x\prod_{n=1}^{l+1}\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}},$$

то достаточно оценить суммы вида

$$\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}},$$

где

$$1\leqslant n\leqslant l+1.$$

Прежде всего доказывается, что

$$\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\tau_m(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})\ll x(\ln x)^{mk^{n-1}-1},\qquad 1\leqslant n\leqslant l+1.\tag{5}$$

Если $m=1$, оценка (5) верна в силу предположения индукции по $l$. Пусть она верна для всех индексов $1\leqslant q\leqslant m$, докажем её справедливость для индекса $q=m+1$.

$$\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\tau_{m+1}(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})=\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})\sum_{\mathfrak{b}_1/\mathfrak{b}}\tau_m(\mathfrak{b}_1)=$$

$$=\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\tau_m(\mathfrak{b}_1)\sum_{N\mathfrak{b}_2\leqslant\frac{x}{N\mathfrak{b}_1}}\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)\ll\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\tau_m(\mathfrak{b}_1)\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b}_1)\sum_{N\mathfrak{b}_2\leqslant\frac{x}{N\mathfrak{b}_1}}\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b}_2)\ll$$

$$\ll x(\ln x)^{k^{n-1}-1}\sum_{N\mathfrak{b}_1\leqslant x}\frac{\tau_m(\mathfrak{b}_1)\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b}_1)}{N\mathfrak{b}_1}$$

в силу индукции по $l$. Имея в виду предположение индукции по $m$ и суммируя по частям, находим

$$\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\tau_{m+1}(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})\ll x(\ln x)^{k^{n-1}-1}(\ln x)^{mk^{n-1}}=x(\ln x)^{(m+1)k^{n-1}-1}.$$

Тем доказана (5) для любых целых $m\geqslant 1$ и для всех $1\leqslant n\leqslant l+1$. Полагая в (5) $m=k-1$, имеем

$$\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\tau_{k-1}(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})\ll x(\ln x)^{(k-1)k^{n-1}-1}.$$

Суммирование по частям приводит к оценке

$$\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x}\frac{\tau_{k-1}(\mathfrak{b})\tau_k^{n-1}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}}\ll(\ln x)^{(k-1)k^{n-1}}.$$

Таким образом

$$T_k^{l+1}(x)\ll x(\ln x)^{\sum\limits_{n=1}^{l+1}(k-1)k^{n-1}}=x(\ln x)^{k^{l+1}-1}.$$

Тем по индукции завершается доказательство леммы.

**Лемма 5.** *Пусть* $\tau(\mathfrak{a})=\tau_2(\mathfrak{a})$, $l\geqslant 1$ *натуральное число,* $v>u\geqslant 2$. *Тогда*

$$\sum_{u\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant v}\frac{\tau^l(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^k}\ll\begin{cases}v^{1-k}(\ln v)^{2^l-1}, & \text{при } 0\leqslant k<1, \quad (6)\\ (\ln v)^{2^l}, & \text{при } k=1, \quad (7)\\ u^{1-k}(\ln v)^{2^l-1}, & \text{при } k>1. \quad (8)\end{cases}$$

Доказательство. По теореме Абеля (лемма 1) имеем

$$\sum_{u\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant v}\frac{\tau^l(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^k}=k\int_u^v\frac{D(x)}{x^{k+1}}\,dx+v^{-k}D(v),$$

где

$$D(x)=\sum_{u\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant x}\tau^l(\mathfrak{a}).$$

Применив лемму 4 с $k=2$, получаем

$$D(x)\ll x(\ln x)^{2^l-1}.$$

Отсюда лемма следует непосредственно.

**Лемма 6.** *Пусть $k_1$, $k_2$ — натуральные неотрицательные числа,* $\frac{1}{2}<\sigma\leqslant 1$, $v\geqslant 2$. *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{N\mathfrak{a}<N\mathfrak{b}\leqslant v}\sum \frac{\tau^{k_1}(\mathfrak{a})\,\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{a}^{\sigma}N\mathfrak{b}^{\sigma}\ln\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}}\ll v^{2-2\sigma}(\ln v)^{4^{k_1-\frac{1}{2}}+4^{k_2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Доказательство. В силу неравенства

$$\frac{1}{\ln\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}}<1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{b}-N\mathfrak{a}},$$

при $N\mathfrak{b}>N\mathfrak{a}$ имеем

$$T(v)=\sum_{N\mathfrak{a}<N\mathfrak{b}\leqslant v}\sum \frac{\tau^{k_1}(\mathfrak{a})\,\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{(N\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\sigma}\ln\frac{N\mathfrak{b}}{N\mathfrak{a}}}\leqslant \sum_{N\mathfrak{b}\leqslant v}\frac{\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{\sigma}}\sum_{N\mathfrak{a}<N\mathfrak{b}\leqslant v}\frac{\tau^{k_1}(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{\sigma}}+$$

$$+\sum_{N\mathfrak{a}<v}\frac{\tau^{k_1}(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{2\sigma-\frac{3}{2}}}\sum_{N\mathfrak{a}<N\mathfrak{b}\leqslant v}\frac{\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{\sqrt{N\mathfrak{b}}\,(N\mathfrak{b}-N\mathfrak{a})}=$$

$$=T_1(v)+T_2(v).$$

$T_1(v)$ оценивается по лемме 5, полагая в ней $k=\sigma$, $l=k_1$ (при $k_1=0$ полагаем в лемме 4 $k=1$, $l=1$)

$$T_1(v)\ll(\ln v)^{2^{k_1}}\sum_{N\mathfrak{b}\leqslant v}\frac{\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2\sigma-1}}\ll v^{2-2\sigma}(\ln v)^{2^{k_1}+2^{k_2}}.$$

По лемме частного суммирования находим

$$T_2(v)=\left(2\sigma-\frac{3}{2}\right)\int_1^v x^{\frac{1}{2}-2\sigma}D(x)\,dx+v^{\frac{3}{2}-2\sigma}D(v), \tag{10}$$

где

$$D(x)=\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\tau^{k_1}(\mathfrak{a})\sum_{N\mathfrak{a}<N\mathfrak{b}\leqslant v}\frac{\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{\sqrt{N\mathfrak{b}}\,(N\mathfrak{b}-N\mathfrak{a})},$$

далее,

$$D(x)=\sum_{q=1}^{v-1}\frac{1}{q}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x_0}\tau^{k_1}(\mathfrak{a})\sum_{N\mathfrak{b}=N\mathfrak{a}+q}\frac{\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{\sqrt{N\mathfrak{b}}},$$

где

$$x_0=\min([x],\ v-q).$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$D(x)\ll\sum_{q=1}^{v-1}\frac{1}{q}\left\{\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x_0}\tau^{2k_1}(\mathfrak{a})\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x_0}\left(\sum_{N\mathfrak{b}=N\mathfrak{a}+q}\frac{\tau^{k_2}(\mathfrak{b})}{\sqrt{N\mathfrak{b}}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как для любого целого $m\geqslant 1$

$$\left(\sum_{N\mathfrak{a}=m}\tau^{p}\,\mathfrak{a})\right)^2\leqslant\sum_{N\mathfrak{a}=m^2}\tau^{2p}(\mathfrak{a}),$$

как это следует из простого рассмотрения свойств нормы и делимости идеалов, то

$$D(x) \leqslant x (\ln x)^{\frac{1}{2}(2^{2k_1}-1)} \sum_{q=1}^{v-1} \frac{1}{q} \left\{ \sum_{N\mathfrak{b} \leqslant v^2} \frac{\tau^{2k_2}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, по лемме 5

$$D(x) \ll x^{\frac{1}{2}} (\ln v)^{2^{2k_1-1}-\frac{1}{2}+2^{2k_2-1}} \sum_{q=1}^{v-1} \frac{1}{q},$$

и окончательно

$$D(x) \ll x^{\frac{1}{2}} (\ln v)^{4^{k_1-\frac{1}{2}}+4^{k_2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Из (10) находим

$$T_2(v) \ll v^{2-2\sigma} (\ln v)^{4^{k_1-\frac{1}{2}}+4^{k_2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}.$$

Лемма доказана.

Приведенное доказательство аналогично, как и в леммах такого же характера для поля рациональных чисел. (Например, Чудаков [2].)

**Лемма 7.** *Пусть $\Xi(\mathfrak{a})$ в этой и во всех последующих леммах обозначает характер Гекке второго рода по фиксированному модулю $\mathfrak{m}$ с произвольным целым рациональным показателем $m$, $|m| \leqslant M$, $\mu(\mathfrak{a})$ – функцию Мёбиуса, $\mathfrak{N}$ – фиксированный класс идеалов мнимого квадратичного поля $K$. Через $s=\sigma+it$, как и в дальнейшем, будет обозначаться комплексное переменное, $X$, $Z$, $T$, $M$ – вещественные числа $\geqslant 2$. Определим функцию $\Phi_1(s)$ уравнением*

$$\Phi_1(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{a} \leqslant X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{b} \leqslant Z}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} - 1. \tag{12}$$

*Тогда в области $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\int_T^{2T} |\Phi_1(\sigma+it)|^2 dt \ll Z^{1-2\sigma} \{T + Z X^{2-2\sigma}\} \ln^{3,5} XM, \tag{13}$$

$$\sum_{\chi} \sum_{|m| \leqslant M} \int_T^{2T} |\Phi_1(\sigma+it)|^2 dt \ll \begin{cases} (XZ)^{1-2\sigma} \{XZ + MT(XZ)^{\frac{3}{4}}\} \ln^{6,5} MXZ & (14) \\ (XZ)^{1-2\sigma} \{XZ + MT(XZ)^{\frac{1}{2}}\} (MXZ)^{\varepsilon}. & (15) \end{cases}$$

*Первая сумма по $\chi$ берётся по всем характерам $\chi \bmod \mathfrak{m}$. Это замечание относится и ко всем другим леммам, где имеется сумма по $\chi$.*

*Оценка (13) верна при условии $Z \leqslant X$. Здесь, как и в дальнейшем, $\varepsilon$ обозначает любое положительное, сколь угодно малое число, не обязательно всегда то же самое.*

Доказательство. Введём обозначение

$$V = \begin{cases} [X][Z], & \text{при нецелом } X, \\ (X-1)[Z], & \text{при целом } X. \end{cases}$$

Непосредственное перемножение рядов по $\mathfrak{a}$ и по $\mathfrak{b}$, в силу мультипликативности характеров и норм идеалов, показывает, что

$$\Phi_1(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}\leqslant V}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\lambda(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

где

$$\lambda(\mathfrak{a})=\sum_{\substack{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\\ \frac{N\mathfrak{a}}{X}\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant Z}}\mu(\mathfrak{b})\leqslant\tau(\mathfrak{a}).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\lambda(\mathfrak{a})=0,\ \text{если}\ N\mathfrak{a}\leqslant Z.$$

Имеем

$$\int_T^{2T}|\Phi_1(\sigma+it)|^2\,dt=\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ Z<N\mathfrak{a}_1\leqslant V\\ Z<N\mathfrak{a}_2\leqslant V}}\sum\frac{\Xi(\mathfrak{a}_1)\bar{\Xi}(\mathfrak{a}_2)\lambda(\mathfrak{a}_1)\lambda(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^\sigma N\mathfrak{a}_2^\sigma}\int_T^{2T}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it}dt. \tag{16}$$

Суммирование по всем характерам с $|m|\leqslant M$ даёт

$$\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\chi(\mathfrak{a}_1)\bar{\chi}(\mathfrak{a}_2)e^{img(\arg\mathfrak{a}_1-\arg\mathfrak{a}_2)}=\varphi_1(\mathfrak{m})\psi_1(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2),$$

где

$$\varphi_1\leqslant\varphi(\mathfrak{m}),$$

$$\psi_1(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)\leqslant\min\left\{M,\ \frac{1}{\operatorname{dist}\left(\frac{g}{2\pi}(\arg\mathfrak{a}_1-\arg\mathfrak{a}_2)\right)}\right\}.$$

Здесь через $\operatorname{dist}\alpha$ обозначено расстояние вещественного числа $\alpha$ до ближайшего целого числа.

Так как

$$\int_n^{n+1}a^{it}\,dt=\frac{1}{\ln a}\{a^{i(n+1)}-a^{in}\}=a^{in}\,\omega(a),\ (a\neq 1) \tag{17}$$

где функция $\omega(a)\leqslant 1$ и не зависит от $n$, то

$$\int_T^{2T}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it}dt=\omega\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)\sum_{[T]<n<[2T]}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{in}+\int_T^{[T]+1}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it}dt+\int_{[2T]}^{2T}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it}dt\leqslant$$

$$\leqslant\psi_2(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)=\min\left\{T,\ \frac{1}{\operatorname{dist}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)}\right\}.$$

Следовательно,

$$S(\sigma)=\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_T^{2T}|\Phi_1(\sigma+it)|^2\,dt\leqslant\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ Z<N\mathfrak{a}_1\leqslant V\\ Z<N\mathfrak{a}_2\leqslant V}}\sum\frac{\tau(\mathfrak{a}_1)\tau(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^\sigma N\mathfrak{a}_2^\sigma}\psi_1(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)\psi_2(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2).$$

Далее, имеем

$$S(\sigma)\leqslant\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}\\ Z<N\mathfrak{a}_1<V}}\frac{\tau(\mathfrak{a}_1)}{N\mathfrak{a}_1^\sigma}\sum_{N\mathfrak{a}_1<n\leqslant V}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_2=n}}\tau(\mathfrak{a}_2)\psi_1(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)\psi_2(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)$$

и

$$S(\sigma) \ll \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{R} \\ Z < N\mathfrak{a}_1 < V}} \frac{\tau(\mathfrak{a}_1)}{N\mathfrak{a}_1^\sigma} \left\{ \int_{N\mathfrak{a}_1}^{V} \frac{D(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx + V^{-\sigma} D(V) \right\},$$

где

$$D(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a}_1 < N\mathfrak{a}_2 \leqslant x}} \tau(\mathfrak{a}_2)\, \psi_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)\, \psi_2(\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2).$$

Сумма $D(x)$ оценена в работе Кубилюса [7] при доказательстве леммы 17. В наших обозначениях будет

$$D(x) \ll \begin{cases} \left(x \ln x + MTx^{\frac{3}{4}}\ (\ln x)^{\frac{19}{16}}\right) \ln^2 x \cdot \ln M, & (18) \\ (x + MTx^{\frac{1}{2}})\,(Mx)^\varepsilon,\ \varepsilon > 0. & (19) \end{cases}$$

Поэтому

$$S(\sigma) \ll \begin{cases} V^{1-\sigma} + MTV^{\frac{3}{4}-\sigma}\ \ln^{\frac{3}{16}} V)\ln^3 V \ln M \displaystyle\sum_{Z < N\mathfrak{a} < V} \frac{\tau(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^\sigma}, \\ (V^{1-\sigma} + MTV^{\frac{1}{2}-\sigma})(MV)^\varepsilon \displaystyle\sum_{Z < N\mathfrak{a} < V} \frac{\tau(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^\sigma}. \end{cases}$$

Применяя лемму 5, получаем оценки (14)—(15).

Далее, проинтегрируем (16) по $t$:

$$\int_T^{2T} |\Phi_1(\sigma+it)|^2\, dt = T \sum\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{R} \\ Z < N\mathfrak{a}_1 = N\mathfrak{a}_2 \leqslant V}} \frac{\Xi(\mathfrak{a}_1)\,\bar{\Xi}(\mathfrak{a}_2)\,\lambda(\mathfrak{a}_1)\,\lambda(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^{2\sigma}} +$$

$$+ \sum\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{R} \\ Z < N\mathfrak{a}_1 < N\mathfrak{a}_2 \leqslant V}} \frac{\Xi(\mathfrak{a}_1)\,\bar{\Xi}(\mathfrak{a}_2)\,\lambda(\mathfrak{a}_1)\,\lambda(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^\sigma N\mathfrak{a}_2^\sigma \ln \frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}}\, \omega_1(N\mathfrak{a}_1,\ N\mathfrak{a}_2),$$

где $\omega_1(N\mathfrak{a}_1,\ N\mathfrak{a}_2) \ll 1$. Оценивая суммы по леммам 5 и 6 соответственно получаем

$$\int_T^{2T} |\Phi_1(\sigma+it)|^2\, dt \ll TZ^{1-2\sigma} \ln^3 V + V^{2-2\sigma} \ln^{3,5} V.$$

Остается вспомнить, что

$$V \ll XZ.$$

Лемма доказана.

Так как в оценках (14)—(15), как это видно из хода доказательства, нижний предел суммирования $Z$ не играет роли, то для этих оценок условие $Z \leqslant X$ излишнее.

**Лемма 8.** *Пусть* $\Xi(\mathfrak{a})$, $\mu(\mathfrak{a})$, $s = \sigma + it$ *имеют значения, указанные в предыдущей лемме,* $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ — *два класса идеалов поля,* $K$, $Y$, $Z$, $T$, $M$ *вещественные числа* $\geqslant 2$. *Определим функцию* $\Phi_2(s)$ *уравнением*

$$\Phi_2(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_1 \\ N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_2 \\ N\mathfrak{a} \leqslant Z}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}. \qquad (20)$$

*Тогда в области* $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\int_T^{2T} |\Phi_2(\sigma+it)|^2 dt \ll Y^{2\sigma-1}\{T+YZ^{2-2\sigma}\}\ln^{3,5} MYZ, \tag{21}$$

$$\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_T^{2T} |\Phi_2(\sigma+it)|^2 dt \ll \begin{cases} (YZ^{-1})^{2\sigma-1}\{YZ+MT(YZ)^{\frac{3}{4}}\}\ln^{6,5} MYZ & (22)\\ (YZ^{-1})^{2\sigma-1}\{YZ+MT(YZ)^{\frac{1}{2}}\}(MYZ)^{\varepsilon}. & (23)\end{cases}$$

Доказательство.

$$S_1(\sigma)=\int_T^{2T} |\Phi_2(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_1\leqslant Y}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_2\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_2\leqslant Y}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{a}_1\leqslant Z}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{a}_2\leqslant Z}} \Xi(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)\times$$

$$\times\overline{\Xi}(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)(N\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^{-\sigma}(N\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^{\sigma-1}\int_T^{2T}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2}{N\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}\right)^{it} dt. \tag{24}$$

Суммирование по всем характерам $\Xi$ с $|m|\leqslant M$ и замена интеграла суммой комплексных чисел по типу (17) приводит к соотношению

$$S(\sigma)=\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_T^{2T} |\Phi_2(\sigma+it)|^2 dt \ll \sum_{\substack{\mathfrak{b}_1\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_1\leqslant Y}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_2\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_2\leqslant Y}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{a}_1\leqslant Z}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{a}_2\leqslant Z}} (N\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^{-\sigma}\times$$

$$\times(N\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^{\sigma-1}\psi_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)\psi_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2).$$

Функции $\psi_1$ и $\psi_2$ имеют те же самые определения, что и в лемме 7. Обозначив $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1=\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2=\mathfrak{i}_2$, имеем

$$S(\sigma)\ll\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_1\leqslant YZ}}\sum_{\substack{\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_2\leqslant YZ}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_1\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_1\leqslant Y\\ \mathfrak{b}_1/\mathfrak{i}_1}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_2\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_2\leqslant Y\\ \mathfrak{b}_2/\mathfrak{i}_2}} (N\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2)^{-\sigma}(N\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^{2\sigma-1}\psi_1(\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2)\psi_2(\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2)\ll$$

$$\ll Y^{4\sigma-2}\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_1\leqslant YZ}}\sum_{\substack{\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_2\leqslant YZ}}\frac{\tau(\mathfrak{i}_1)\tau(\mathfrak{i}_2)\psi_1(\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2)\psi_2(\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2)}{(N\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2)^{\sigma}}. \tag{25}$$

Двойная сумма в (25) оценена при доказательстве леммы 7 и ей справедливы оценки (14)—(15) с заменой $X$ на $Y$. Поэтому имеем

$$S(\sigma)\ll\begin{cases}\left(\frac{Y}{Z}\right)^{2\sigma-1}\{YZ+MT(YZ)^{\frac{3}{4}}\}\ln^{5,5} YZ\cdot\ln M,\\ \left(\frac{Y}{Z}\right)^{2\sigma-1}\{YZ+MT(YZ)^{\frac{1}{2}}\}(MYZ)^{\varepsilon}.\end{cases} \tag{26}$$

Теперь выполним интегрирование в (24). Получаем

$$S_1(\sigma)\ll T\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_1=N\mathfrak{i}_2\leqslant YZ}}\sum_{\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_1\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_1\leqslant Y\\ \mathfrak{b}_1/\mathfrak{i}_1}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_2\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_2\leqslant Y\\ \mathfrak{b}_2/\mathfrak{i}_2}} (N\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2)^{-\sigma}(N\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^{2\sigma-1}+$$

$$+\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_1\leqslant YZ}}\sum_{\substack{\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_2\leqslant YZ}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_1\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_1\leqslant Y\\ \mathfrak{b}_1/\mathfrak{i}_1}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}_2\in\mathfrak{N}_1\\ N\mathfrak{b}_2\leqslant Y\\ \mathfrak{b}_2/\mathfrak{i}_2}} (N\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2)^{-\sigma}(N\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^{2\sigma-1}\ln^{-1}\frac{N\mathfrak{i}_2}{N\mathfrak{i}_1}.$$

Далее имеем

$$S_1(\sigma)\ll T\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1,\,\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_1=N\mathfrak{i}_2\leqslant Y}}\sum (N\mathfrak{i}_1)^{2\sigma-2}\tau(\mathfrak{i}_1)\,\tau(\mathfrak{i}_2)+TY^{4\sigma-2}\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1,\,\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ Y<N\mathfrak{i}_1=N\mathfrak{i}_2\leqslant YZ}}\sum (N\mathfrak{i}_1)^{-2\sigma}\tau(\mathfrak{i}_1)\,\tau(\mathfrak{i}_2)+$$

$$+Y^{4\sigma-2}\sum_{\substack{\mathfrak{i}_1,\,\mathfrak{i}_2\in\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\\ N\mathfrak{i}_1<N\mathfrak{i}_2\leqslant YZ}}\sum \frac{\tau(\mathfrak{i}_1)\,\tau(\mathfrak{i}_2)}{(N\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2)^{\sigma}\ln\dfrac{N\mathfrak{i}_2}{N\mathfrak{i}_1}}.$$

Оценивая имеющиеся суммы по леммам 5 и 6, находим

$$S_1(\sigma)\ll\{TY^{2\sigma-1}+Y^{4\sigma-2}(YZ)^{2-2\sigma}\}\ln^{3,5}YZ.$$

Эта оценка вместе с (26) завершает доказательство.

**Лемма 9.** *Пусть для* $Z$, $T$ и $M\geqslant 2$ *функция* $\Phi_3(s)$ *определяется уравне нием*

$$\Phi_3(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}\leqslant Z}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}. \tag{27}$$

*Тогда в области* $\frac{1}{2}<\sigma\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\int_T^{2T}|\Phi_3(\sigma+it)|^2\,dt\ll Z^{2-2\sigma}\{1+TZ^{-1}\}\ln^3 Z, \tag{28}$$

$$\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_T^{2T}|\Phi_3(\sigma+it|^2\,dt\ll Z^{2-2\sigma}\{1+MTZ^{-\frac{1}{2}}\}\ln^5 MZ. \tag{29}$$

Доказательство.

$$S(\sigma)=\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_T^{2T}|\Phi_3(\sigma+it)|^2\,dt=\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}S_1(\sigma)=$$

$$=\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_1\leqslant Z}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_2\leqslant Z}}\frac{\Xi(\mathfrak{a}_1)\,\bar{\Xi}(\mathfrak{a}_2)\,\mu(\mathfrak{a}_1)\,\mu(\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^{\sigma}\,N\mathfrak{a}_2^{\sigma}}\int_T^{2T}\left(\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}\right)^{it}dt.$$

Таким же путём, как и в предыдущих двух леммах, приходим к выражению

$$S(\sigma)\ll\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_1\leqslant Z}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_2\leqslant Z}}\frac{\psi_1(\mathfrak{a}_1,\,\mathfrak{a}_2)\,\psi_2(\mathfrak{a}_1,\,\mathfrak{a}_2)}{N\mathfrak{a}_1^{\sigma}\,N\mathfrak{a}_1^{\sigma}}$$

с теми же $\psi_1$ и $\psi_2$, что и в леммах 7—8. Далее следует

$$S(\sigma)\ll\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_1\leqslant Z}}\frac{1}{N\mathfrak{a}_1^{\sigma}}\sum_{n=1}^{[Z]}\frac{1}{n^{\sigma}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_2=n}}\psi_1(\mathfrak{a}_1,\,\mathfrak{a}_2)\,\psi_2(\mathfrak{a}_1,\,\mathfrak{a}_2)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_1\leqslant Z}}\frac{1}{N\mathfrak{a}_1^{\sigma}}\left\{\int_1^{Z}\frac{D(x)}{x^{\sigma+1}}\,dx+Z^{-\sigma}D(Z)\right\},$$

где

$$D(x)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_2\leqslant x}}\psi_1(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)\,\psi_2(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2).$$

Как уже говорилось, в (18)–(19) было приведено из одной леммы Кубилюса оценка аналогичной суммы, но содержащей ещё множитель $\tau(\mathfrak{a}_2)$. В нашем случае, когда отсутствует указанный множитель, можно, несколько изменив доказательство, получить

$$D(x)\ll(x\ln x+MTx^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}x)\ln^2 x\ln M.$$

Это достигается, если вместо оценки $\Sigma\tau(\mathfrak{a})$ применить

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \varphi_1\leqslant \operatorname{Arg}\mathfrak{a}\leqslant\varphi_2}}1=c_1x(\varphi_2-\varphi_1)+O(x^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}x).$$

Последняя же оценка верна в силу теоремы 3 той же работы Кубилюса. Следовательно,

$$S(\sigma)\ll(Z^{2-2\sigma}+MTZ^{\frac{3}{2}-2\sigma})\ln^5 MZ. \tag{30}$$

Вторую оценку леммы получим интегрированием по $t$:

$$S_1(\sigma)\ll T\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}\leqslant Z}}\frac{\tau^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{2\sigma}}+\sum\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{N}\,\mathfrak{a}_2\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}_1<N\mathfrak{a}_2\leqslant Z}}\frac{1}{N\mathfrak{a}_1^{\sigma}\,N\mathfrak{a}_2^{\sigma}\ln\dfrac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{a}_1}}.$$

Леммы 5 и 6 приводят к

$$S_1(\sigma)\ll(TZ^{1-2\sigma}+Z^{2-2\sigma})\ln^3 Z, \tag{31}$$

что вместе с (30) завершает лемму.

**Лемма 10.** *Пусть $Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})$ – $Z$ – функция Гекке, $M\ll T$,* где $M,\ T,\ Z$ – *достаточно большие числа. Определим функцию $\Psi(s)$ уравнением*

$$\Psi(s)=Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}\leqslant Z}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}-1. \tag{32}$$

*Очевидно, что функция $\Psi(s)$ является регулярной всюду в плоскости комплексного переменного $s=\sigma+it$, кроме точки $s=1$, в которой она, в случае главного характера, имеет простой полюс. В области $\frac{1}{2}<\sigma\leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\int_T^{2T}|\Psi(\sigma+it)|^2\,dt\ll T^{4\sigma(1-\sigma)}\ln^4 T \tag{33}$$

$$\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_T^{2T}|\Psi(\sigma+it)|^2\,dt\ll\begin{cases}(MT)^{8(1-\sigma)}\ln^{6,5}T & (34)\\ (MT)^{4(1-\sigma)+\varepsilon} & (35)\end{cases}$$

Доказательство. Как было показано в (9), $Z$ – функции Гекке обладают приближённым функциональным уравнением

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}\leqslant X}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}+\psi(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{N}^*\\ N\mathfrak{b}\leqslant Y}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}+O(R) \tag{36}$$

в достаточно широкой полосе переменного $\sigma$, причём

$$|t| = T = 2\pi \sqrt{\frac{XY}{dN\mathfrak{m}}}, \tag{37}$$

$$|m_0| \leqslant M \ll T,$$

где $X$, $Y$ — достаточно большие положительные числа, а функция $\psi(s)$ имеет вид

$$\psi(s, \Xi) = i^{m_0 g} N\mathfrak{m}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{dN\mathfrak{m}}\right)^{1-2s} \chi(-1)\, e^{im_0 g \arg \mathfrak{m}\mathfrak{d}} \times$$

$$\times \sum_{\tau}^{\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}} \chi(\tau)\, e^{2\pi i\, S\left(\frac{\tau}{\mathfrak{m}\mathfrak{d}}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{|m_0 g|}{2} + 1 - s\right)}{\Gamma\left(\frac{|m_0 g|}{2} + s\right)}.$$

Здесь $\mathfrak{d}$ означает дифференту поля, $g$ — число единиц поля, $\equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$, $m = m_0 g$, $S$ — след, $d$ — дискриминант поля. Остаточный член $R$ имеет несколько оценок, из которых приведём следующие:

$$R \ll X^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln^{\frac{1}{2}} Y \quad \text{при} \quad X \leqslant Y \ln^2 Y, \tag{38}$$

$$R \ll X^{\frac{1}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} \ln Y \quad \text{при} \quad Y \ln^2 Y \leqslant X \leqslant Y^{3+\varepsilon}. \tag{39}$$

Сначала оценим функцию $\psi(s)$, входящую в функциональное уравнение (36).

Очевидно, что

$$\psi(s, \Xi) \ll \left| \frac{\Gamma\left(\frac{|m_0 g|}{2} + 1 - s\right)}{\Gamma\left(\frac{|m_0 g|}{2} + s\right)} \right|,$$

так как величины, зависящие от $\mathfrak{m}$ и поля, входят в символ $\ll$. В силу известных свойств гамма функций применяя формулу Стирлинга, имеем:

$$\psi(s, \Xi) \ll V^{1-2\sigma},$$

где

$$V = \sqrt{\frac{m_0^2 g^2}{4} + t^2}.$$

Следовательно,

$$\psi(s, \Xi) \ll T^{1-2\sigma}.$$

Далее получаем

$$\Psi(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{a} \leqslant X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{a} \leqslant Z}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} - 1 +$$

$$+ \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{N}^* \\ N\mathfrak{b} \leqslant Y}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{a} \leqslant Z}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + c_2 R \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{a} \leqslant Z}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}.$$

Согласно определениям (12), (20), (27)

$$\Psi(s) = \Phi_1(s) + \psi(s)\,\Phi_2(s) + c_2 R\,\Phi_3(s),$$

где функции $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\Phi_3(s)$ удовлетворяют условиям лемм 7, 8 и 9 соответственно. Следовательно,

$$S(\sigma)=\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_{T}^{2T}|\Psi(\sigma+it)|^2dt\ll\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_{T}^{2T}|\Phi_1(\sigma+it)|^2dt+$$
$$+T^{2-4\sigma}\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_{T}^{2T}|\Phi_2(\sigma+it)|^2dt+R^2\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_{T}^{2T}|\Phi_3(\sigma+it)|^2dt.$$

Применяя для оценок сумм соответственно (14), (22), (29) из лемм 7–9, а также (38) для $R$, находим

$$S(\sigma)\ll(XZ)^{1-2\sigma}\{XZ+MT(XZ)^{\frac{3}{4}}\}\ln^{6,5}MXZ+$$
$$+T^{2-4\sigma}(YZ^{-1})^{2\sigma-1}\{YZ+MT(YZ)^{\frac{3}{4}}\}\ln^{6,5}MYZ+$$
$$+X^{1-2\sigma}Z^{2-2\sigma}\{1+MTZ^{-\frac{1}{2}}\}\ln^5 MZ.$$

Выбирая $X=Y$, $Z=M^4T^3$, получаем (34). При выборе оценок (15), (23), (29) имеем

$$S(\sigma)\ll(XZ)^{1-2\sigma}\{XZ+MT(XZ)^{\frac{1}{2}}\}(MXZ)^{\varepsilon}+$$
$$+T^{2-4\sigma}(YZ^{-1})^{2\sigma-1}\{YZ+MT(YZ)^{\frac{1}{2}}\}(MYZ)^{\varepsilon}+$$
$$+X^{1-2\sigma}Z^{2-2\sigma}\{1+MTZ^{-\frac{1}{2}}\}\ln^5 MZ.$$

Выбор $X=Y$, $Z=M^2T$ даёт (35). Наконец оценивая соответствующие суммы по (13), (21) и (28), получаем

$$S_1(\sigma)=\int_{T}^{2T}|\Psi(\sigma+it)|^2dt\ll Z^{1-2\sigma}\{T+ZX^{2-2\sigma}\}\ln^{3,5}XZ+$$
$$+T^{2-4\sigma}Y^{2\sigma-1}\{T+YZ^{2-2\sigma}\}\ln^{3,5}YZ+(XZ)^{1-2\sigma}\{Z+T\}\ln^3 Z.$$

Выбирая $X=Y$, $Z=T^{2\sigma-1}$, получаем (33). Лемма доказана.

**Примечание.** Нетрудно проверить, что лемма будет верна, если верхний предел интегрирования $2T$ заменить другим числом $T_1=c_3T$, где $c_3>1$ любая постоянная. В результате конечная оценка увеличится самое большое на $(c_3-1)^4+1$.

**Лемма 11.** *Пусть функция* $\Psi(s)$, *как и в предыдущей лемме, определяется уравнением*

$$\Psi(s)=\Psi(s,\ m)=Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}\leqslant Z}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}-1,$$

*где* $|m|\leqslant M$. *Пусть далее,* $k=[M]$, $M\geqslant 2$; $T$ и $Z$ — *достаточно большие положительные числа. Тогда для любого* $\alpha$, $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 2$ *имеют место оценки*

$$\int_{\alpha}^{\infty}\arg\left(1-\Psi^2(\sigma+iT)\right)d\sigma\ll\ln TZ, \tag{40}$$

$$\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_{2}^{\infty}\arg\left(1-\Psi^2(\sigma+iT)\right)d\sigma\ll MZ^{2(\varepsilon-1)}. \tag{41}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Phi_0(s) = 1 - \Psi'^2(s).$$

Легко видеть, что

$$\bar{\Phi}_0(s) = \bar{\Phi}_0(s, \Xi) = \Phi_0(\bar{s}, \bar{\Xi}).$$

Введём функцию

$$\Psi_0(s) = \Phi_0(s + iT, \Xi) + \Phi_0(s - iT, \bar{\Xi}),$$

которая, очевидно, регулярна в круге $|s-2| \leqslant \frac{7}{4}$. Нули функции $\operatorname{Re}\Phi_0(s, \Xi)$, лежащие в интервале

$$s = \sigma + iT, \quad \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2,$$

являются одновременно и нулями функции $\Psi_0(s)$, находящимися в круге $|s-2| \leqslant \frac{3}{2}$. Поэтому, если обозначим число первых через $n$, а число последних — через $n'$, то $n \leqslant n'$. Согласно теореме Иенсена,

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{n'} \leqslant \frac{\max\limits_{|s-2| \leqslant \frac{7}{4}} |\Psi_0(s)|}{|\Psi_0(2)|}.$$

Оценим модуль функции $\Psi_0(s)$ в круге $|s-2| \leqslant \frac{7}{4}$:

$$\max_{|s-2| \leqslant \frac{7}{4}} |\Psi_0(s)| \leqslant \max_{\substack{\frac{1}{4} \leqslant \sigma \leqslant \frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \leqslant |t| \leqslant T + \frac{7}{4}}} |1 - \Psi'^2(s)| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \left| Z\left(\frac{1}{4} + iT\right) \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant Z} N\mathfrak{a}^{-\frac{1}{4}} \right|^2 \leqslant (T^2 Z)^{\frac{3}{4}},$$

так как модуль $Z$-функций Гекке в критической полосе по одной лемме Кубилюса ([7], лемма 6) оценивается как

$$(MT)^{1-\sigma}.$$

Также просто оценивается и $|\Psi_0(2)|$:

$$|\Psi_0(2)| = 2\operatorname{Re}\Phi_0(2 + iT, \Xi) \geqslant 1 - \Bigg(\sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N} \\ N\mathfrak{a} \geqslant Z}} \frac{\tau(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^2}\Bigg)^2 \geqslant 1 - Z^{2(\varepsilon - 1)} > \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$n \leqslant n' \ll \ln TZ.$$

Таким образом, установлено, что функция $\operatorname{Re}\Phi_0(s)$ на интервале $s = \sigma + iT$, $\alpha \leqslant \sigma \leqslant 2$ имеет не более $n_1 \leqslant n \ll \ln TZ$ нулей. Обозначим эти нули через $u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}$. Они делят рассматриваемый сегмент на части $\delta_1\ \delta_2, \ldots\ \delta_{n_1+1}$. Следовательно,

$$\int_\alpha^2 \arg\left(1 - \Psi'^2(\sigma + iT)\right) d\sigma = \int_\alpha^2 \arg\Phi_0(\sigma + iT)\, d\sigma = \sum_{\nu=1}^{n_1} \int_{\delta_\nu} \arg\Phi_0(\sigma + iT)\, d\sigma =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\nu=1}^{n_1+1} \int_{u_{\nu-1}+\varepsilon}^{u_\nu - \varepsilon} \arg\Phi_0(\sigma \pm iT)\, d\sigma \leqslant (n_1 + 1)\,\pi \ll \ln TZ. \qquad (42)$$

Обозначим теперь

$$\int_2^\infty \arg\left(1-\Psi^2(\sigma+it)\right)d\sigma=\int_2^\infty \arg\Phi_0(\sigma+iT)\,d\sigma.$$

Из представления

$$\Phi_0(\sigma+iT)=|\Phi_0(\sigma+iT)|\,e^{i\arg\Phi_0(\sigma+iT)}$$

следует

$$\operatorname{Re} i\frac{\Phi_0'}{\Phi_0}(\sigma+iT)=-\left(\arg\Phi_0(\sigma+iT)\right)'.$$

Так как $\arg\Phi(s)\to 0$, когда $s$ удаляется в бесконечность по прямой, параллельной вещественной оси, то

$$\arg\Phi_0(\sigma+iT)=\int_\sigma^\infty \operatorname{Re} i\frac{\Phi_0'}{\Phi_0}(x+iT)\,dx. \tag{43}$$

Оценим $\Phi_0'(x+iT)$ при $x\geqslant 2$.

Согласно определению

$$\Phi_0'(x+iT)=\left(1-\Psi^2(x+iT)\right)'=-2\Psi(x+iT)\,\Psi'(x+iT).$$

Легко подсчитать, что

$$\Psi(x+iT)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}>Z}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})\lambda(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{x+iT}}, \tag{44}$$

где

$$\lambda(\mathfrak{a})\ll\tau(\mathfrak{a}).$$

Следовательно,

$$\Phi_0'(x+iT)\ll\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}>Z}}\frac{\tau(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^x}\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}>Z}}\frac{\tau(\mathfrak{a})\ln N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}^x}\ll Z^{2(1+\varepsilon-x)}. \tag{45}$$

Имеем, аналогично,

$$\Phi_0(x+iT)\geqslant 1-\Big(\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}\\ N\mathfrak{a}>Z}}\frac{\tau(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^x}\Big)^2\geqslant 1-Z^{2(1+\varepsilon-x)}>\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\int_2^\infty \arg\Phi_0(\sigma+iT)\,d\sigma=\int_2^\infty d\sigma\int_\sigma^\infty \operatorname{Re} i\frac{\Phi_0'}{\Phi_0}(x+iT)\,dx\ll$$

$$\ll\int_2^\infty d\sigma\int_\sigma^\infty Z^{2(1+\varepsilon-x)}dx\ll\int_2^\infty Z^{2(1+\varepsilon-\sigma)}d\sigma\ll 1 \tag{46}$$

(42) и (46) вместе доказывают оценку (40).

Второе утверждение леммы следует вполне аналогично. А именно

$$\sum_\chi\sum_{|m|\leqslant M}\int_2^\infty \arg\left(1-\Psi^2(\sigma+iT)\right)d\sigma=\int_2^\infty \arg\prod_{\substack{\Xi\\ |m|\leqslant M}}{}' \Phi_0(\sigma+iT)\,d\sigma=$$

$$=\int_2^\infty d\sigma\int_\sigma^\infty \operatorname{Re} i\frac{\Omega_0'}{\Omega_0}(x+iT)\,dx,$$

где

$$\Omega_0(x+iT)=\prod_{\substack{\Xi\\ |m|\leqslant M}}\Phi_0(x+iT). \tag{47}$$

Воспользовавшись оценками (45)—(46), получаем

$$\sum_{\chi}\sum_{|m|\leqslant M}\int_2^{\infty}\arg\left(1-\Psi^2(\sigma+it)\right)d\sigma\ll MZ^{2(\varepsilon-1)}.$$

Лемма доказана.

Теперь можем завершить доказательство в начале статьи сформулированных теорем.

Пусть $N_1(\alpha,\ T_1,\ T_2)$ обозначает число нулей $Z$—функции Гекке с любым показателем $m$ в области

$$\begin{gathered} T_1<|t|\leqslant T_2,\\ \sigma\geqslant\alpha>\frac{1}{2}, \end{gathered} \tag{48}$$

где $T_2\geqslant T_1\geqslant c_4$, $c_4$—достаточно большое положительное число. Пусть далее $N_1(\alpha,\ T_1,\ T_2,\ M)$ обозначает число нулей всех $Z$—функций Гекке с $|m|\leqslant M$ в той же области (48). Примем $T_2=2T_1=2T$.

Заметим, во-первых, что $N_1(\alpha,\ T,\ 2T)$ не больше числа нулей в той же области функции $\Phi_0(s)$, а $N_1(\alpha,\ T,\ 2T,\ M)$ также не превышает числа нулей функции $\Omega_0(s)$ в $T<t\leqslant 2T$, $\sigma\geqslant\alpha$. Поэтому достаточно оценить соответствующие числа $N_1'(\alpha,\ T,\ 2T)$, $N_1'(\alpha,\ T,\ 2T,\ M)$ для функций $\Phi_0(s)$ и$\Omega_0(s)$ соответственно.

Пусть $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$, $\beta\geqslant 2$. Обозначим контур, состоящий из прямоугольника с вершинами в точках $\alpha+iT$, $\alpha+i2T$, $\beta+i2T$, $\beta+iT$ через $C$. Предположим, что на прямой $\sigma=\beta$ нет нулей ни функции $\Phi_0(s)$, ни $\Omega_0(s)$. Если это не так, можем правую сторону контура $C$ на $\varepsilon$ сдвинуть вправо или влево, это ни на что не отразится, так как на этой части контура получается сравнительно малый остаточный член. Так что, не меняя общности, будем считать, что правая сторона контура свободна от нулей обеих функций $\Phi_0(s)$ и $\Omega_0(s)$.

Определим в области, ограниченной контуром $C$, аналитическую функцию $\ln\Phi_0(s)$. В силу регулярности этой функции в области, ограниченной контуром $C$, а также и на самом контуре, и на обращении ее на $\sigma=\beta$ в 0, в некоторой окрестности прямой $\sigma=\beta$ $\ln\Phi_0(s)$ является регулярной функцией. В других точках прямоугольника определим $\ln\Phi_0(s)$ непрерывным продолжением $\ln\Phi_0(\beta+it)$ от точки $\beta+it$ до $\sigma+it$ по прямой. При этом полагаем, что на этом пути нет нулей функции $\Phi_0(s)$. В противоположном случае полагаем

$$\ln\Phi_0(s)=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\Phi_0(\sigma+it+\varepsilon).$$

Аналогично строится и функция $\ln\Omega_0(s)$ для $\Omega_0(s)$. Теперь по теореме Литтлвуда (лемма 3) имеем

$$\int_C\ln\Phi_0(s)\,ds=-2\pi i\int_{\alpha}^{\beta}N_1'(\sigma,\ T,\ 2T)\,d\sigma.$$

Далее находим

$$I(\alpha, \beta)=2\pi \int_{\alpha}^{\beta} N_1'(\sigma, T, 2T)\,d\sigma=\int_{T}^{2T} \ln|\Phi_0(\alpha+it)|\,dt-$$

$$-\int_{T}^{2T} \ln|\Phi_0(\beta+it)|\,dt+\int_{\alpha}^{\beta} \arg\Phi_0(\sigma+2iT)\,d\sigma-\int_{\alpha}^{\beta} \arg\Phi_0(\sigma+iT)\,d\sigma.$$

Так как при $\beta\to\infty$ функция $\Phi_0(\beta+it)\to 1$, то получаем

$$I(\alpha)=\lim_{\beta\to\infty} I(\alpha, \beta)=$$

$$=\int_{T}^{2T} \ln|\Phi_0(\alpha+it)|\,dt+\int_{\alpha}^{\infty} \arg\Phi_0(\sigma+2iT)\,d\sigma-\int_{\alpha}^{\infty} \arg\Phi_0(\sigma+iT)\,d\sigma.$$

Имеем далее,

$$I(\alpha)\ll\int_{T}^{2T} \ln\left(1+|\Psi(\alpha+it)|^2\right)dt+\int_{\alpha}^{\infty} \arg\left(1-\Psi^2(\sigma+iT)\right)d\sigma.$$

Легко проверить, что функция $\Psi(s)$ удовлетворяет всем условиям лемм 10, и 11, и поэтому мы вправе применить оценки (33) и (40)

$$I(\alpha)\ll\int_{T}^{2T} |\Psi(\alpha+it)|^2\,dt+\ln TZ\ll T^{4\alpha(1-\alpha)}\ln^4 T$$

так как при получении (33) было положено $Z=T^{2\alpha-1}$. Обозначив $\nu=\alpha-\frac{1}{2}$ имеем

$$\int_{\alpha}^{\infty} N_1(\sigma, T, 2T)\,d\sigma\leqslant\int_{\alpha}^{\infty} N_1'(\sigma, T, 2T)\,d\sigma\ll T^{4\alpha(1-\alpha)}\ln^4 T.$$

поэтому

$$\int_{\frac{1}{2}+\nu}^{1} N_1(\sigma, T, 2T)\,d\sigma\ll T^{1-4\nu^2}\ln^4 T.$$

Очевидно, что $N_1(\sigma, T, 2T)$ является невозрастающей функцией от аргумента $\sigma$. Пусть, сначала

$$\nu>\frac{1}{2\ln T}.$$

Имеем

$$N_1\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\ll\ln T\int_{\frac{1}{2}+\nu-\frac{1}{2\ln T}}^{\frac{1}{2}+\nu} N_1(\sigma)\,d\sigma\ll\ln T\int_{\frac{1}{2}+\nu-\frac{1}{2\ln T}}^{1} N_1(\sigma)\,d\sigma\ll T^{1-4\nu^2}\ln^5 T.$$

Если же

$$\nu\leqslant\frac{1}{2\ln T},$$

то из тривиальной оценки ([7], лемма 12) следует

$$N_1\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\ll T\ln T\ll T^{1-4\nu^2}\ln^5 T. \tag{49}$$

Тем доказана теорема 1.

Для доказательства двух других теорем, изменим контур $C$ следующим образом: сдвинем нижнюю горизонтальную сторону прямоугольника на $\varepsilon_1$ вниз, верхнюю — на $\varepsilon_2$ вверх, причем $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ выбираем так, чтобы функция $\operatorname{Re}\Omega_0(s)$ на отрезках

$$\alpha\leqslant\sigma\leqslant 2,\ |t|=T-\varepsilon_1,\ |t|=2T+\varepsilon_2$$

имела не более $O(\ln^5 T)$ нулей. Такой выбор $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ всегда возможен, так как число нулей функции $\operatorname{Re}\Omega_0(s)$ в круге $|s+2-it|\leqslant\frac{7}{4}$, конечный и, как видно из доказательства теоремы 1, не превышает $O(M\ln MT)$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве оценки (49), имеем

$$\int_\alpha^\infty N_1(\sigma,\ T,\ 2T,\ M)\,d\sigma\leqslant\int_\alpha^\infty N_1'(\sigma,\ T,\ 2T,\ M)\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\int_\alpha^\infty N_1'(\sigma,\ T-\varepsilon_1 2T+\varepsilon_2,\ M)\,d\sigma\leqslant\Bigg|\int_{T-\varepsilon_1}^{2T+\varepsilon_2}\ln|\Omega_0(\alpha+it)|\,dt+$$

$$+\int_\alpha^2\arg\Omega_0(\sigma+iT-i\varepsilon_1)\,d\sigma+\int_\alpha^2\arg\Omega_0(\sigma+i\,2T+i\,\varepsilon_2)\,d\sigma+$$

$$+\int_2^\infty\arg\Omega_0(\sigma+iT-i\varepsilon_1)\,d\sigma+\int_2^\infty\arg\Omega_0(\sigma+i\,2T+i\varepsilon_2)\,d\sigma\Bigg|.$$

Имея в виду определение (47), оценку (41) и выбор чисел $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, находим

$$\int_\alpha^\infty N_1(\sigma,\ M)\,d\sigma\leqslant\sum_\chi\sum_{|m|\leqslant M}\int_{T-\varepsilon_1}^{2T+\varepsilon_2}\ln\left(1+|\Psi(\alpha+it)|^2\right)dt+MZ^{2(\varepsilon-1)}+\ln^5 T.$$

Теперь, в силу замечания в конце леммы 10, а также оценок (34)—(35), имея в виду соответствующие выборы $Z$, получаем утверждения теорем 2—3.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Кубилюсу за внимание и ценные советы.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
15.XI.1962

## ЛИТЕРАТУРА


1. Carlson F. Über die Nullstellen der Dirichtlet'schen Reihen und der Riemann'schen ζ—Funktion. Arkiv för Math., astr. och. fysik, Band 15. № 20 (1921).
2. Tchudakoff N. On Goldbach—Vinogradov's theorem. Annals of Mathematic, vol 48, № 3, July (1947).
3. Turan P. On the zeros of the zeta—function of Riemann. J. of Indian Math. Soc., vol. XX, № 1—3, 17—36 (1956).
4. Haselgrove C. B. Some theorems in the analytic theory of numbers. J. of Lond Math. Soc., vol 26, part 4, 273—277 (1951).
5. Архангельская В. М. $L$—функции Дирихле. Изд. Саратовского Университета, 1962.
6. Кубилюс Й. О некоторых задачах геометрии простых чисел. Мат. сборник, новая серия, т. 31 (73) : 3 (1952).
7. Кубилюс Й. Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел. Научные труды Вильнюсского Университета, серия мат. физ. и хим. наук, т. IV (1955).

8. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы. Доклады АН СССР, т. 22, № 7 (1939).
9. Булота К. Приближённое функциональное уравнение $Z$—функций Гекке мнимого квадратичного поля. Литовский мат. сборник, II, 2, 39—82 (1962).
10. Ингам А. Е. Распределение простых чисел, ОНТИ, 1936.
11. Титчмарш Е. К. Теория дзета функции Римана. ИЛ, 1953.
12. Линник Ю. В. О густоте нулей $L$—рядов. Известия АН СССР, сер. мат., 10, № 1 (1946), 35—46.
13. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Новые методы в теории $L$—функций Дирихле. Успехи мат. наук, т. 1, вып. 2 (30), 22—56 (1949).
14. Родосский К. А. О новом применении оценок И. М. Виноградова к теории дзета—функции Римана. Доклады АН СССР, т. 134, № 6 (1960).

## KAI KURIOS HEKE $Z$—FUNKCIJŲ NULIŲ TANKIO TEOREMOS

K. BULOTA

### *Reziumė*

Šiame straipsnyje nagrinėjama kvadratinio menamo algebrinio skaičių kūno $K$ Heke $Z$—funkcijos, definuojamos Dirichle eilute

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}},$$

kur $\mathfrak{N}$—fiksuota kūno $K$ idealų klasė, $s=\sigma+it$—kompleksinis kintamasis, $\Xi(\mathfrak{a})$—Heke antros rūšies charakteris su fiksuotu moduliu $\mathfrak{m}$ ir rodikliu $m$. Kaip žinoma, analogiškai racionalių skaičių kūnui, šių nulių pasiskirstymas kritiškoje juostoje $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$ sudaro vieną iš svarbių algebrinių skaičių teorijos problemų.

Naudojant klasišką Landau—Karlson—Titčmaršo metodą, o taip pat autoriaus gautą artutinę funkcionalinę Heke $Z$—funkcijų lygtį (9), gaunama šie rezultatai.

*Pažymėsime* $N(\alpha,\ T,\ 2T,\ \Xi)$ *funkcijos* $Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})$ su $|m|\leqslant M\ll T$ *nulių skaičių srityje* $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant\sigma\leqslant 1,\ T<|t|\leqslant 2T.$

*Tada turime*

$$N(\alpha,\ T,\ 2T,\ \Xi)\ll T^{4\alpha(1-\alpha)}\ln^5 T,$$

$$\sum_{\substack{\Xi\\ |m|\leqslant M}} N(\alpha,\ T,\ 2T,\Xi)\ll\begin{cases}(MT)^{8(1-\alpha)}\ln^{6,5}T,\\ (MT)^{4(1-\alpha)+\varepsilon}.\end{cases}$$

Šie įvertinimai yra žinomų prof. Kubiliaus rezultatų (6), (7) patikslinimas.

## SOME THEOREMS ABOUT THE DENSITY OF THE HECKE ZETA—ZEROS

K. BULOTA

### *Summary*

In this paper we regard the quadratic immaginaire algebraic field $K$. The functions of Hecke, definated by Dirichlet's series

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{N})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}}\frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

where $s=\sigma+it$ komplex variable, $\mathfrak{N}$—a fixed ideal class of fields $K$, $\Xi(\mathfrak{a})$—Hecke character of second kind with modulo $\mathfrak{m}$ and exponent $m$, may have zeros in the critical stripe

$\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$. The questions of distribution those zeros have the great importance in the investigations of algebraic number theory.

This work contents three theorems about the density of zeta—zeros. They are an estimation of analoguos results, taken by prof. Kubilius ([7], [8]). The results are obtained by the classical Landau—Carlson—Titchmarsh method, using the approximate functional equation of Hecke $Z$—functions, given by author in [9].

*Let $N(\alpha, T, 2T, \Xi)$ denote the number of zeros of the $Z(s, \Xi, \mathfrak{N})$ with an arbitrally rational integer $m(|m| \leqslant M \ll T)$ in the stripe $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \sigma \leqslant 1$, $T < |t| \leqslant 2T$. Than we have*

$$N(\alpha, T, 2T, \Xi) \ll T^{4\alpha(1-\alpha)} \ln^6 T,$$

$$\sum_{\substack{\Xi \\ |m| \leqslant M}} N(\alpha, T, 2T, \Xi) \ll \begin{cases} (MT)^{8(1-\alpha)} \ln^{6,5} T, \\ (MT)^{4(1-\alpha)+\varepsilon}. \end{cases}$$