III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

О РАССЛОЕНИИ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ

П. ВАШКАС

В настоящей заметке излагается попытка обобщить расслоение комплексов прямых посредством линейных элементов.

1. Инфинитезимальное перемещение репера $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$ трёхмерного проективного пространства P_3 запишем в виде:

$$dA_i=\omega_i^j A_j,$$

где ω_i^j – линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства [1]:

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k, \omega_k^j].$$

2. Пусть ребро $A_1A_2\equiv l$ подвижного репера описывает комплекс прямых (A_1A_2), определяемый дифференциальными уравнениями:

$$\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha=0,$$
$$[\nabla\lambda_\alpha^p, \omega_p^\alpha]=0, \tag{1}$$

где

$$\nabla\lambda_\alpha^p\equiv d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\omega_q^p-\lambda_\beta^p\omega_\alpha^\beta;$$
$$p, q, r, s, t=1, 2; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon=3,4.$$

3. Теория расслояемых пар строится при помощи вполне интегрируемого уравнения

$$\nabla t\equiv dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\omega_2^1+\omega_1^2=0, \tag{2}$$

где t – неоднородная координата точки A_1+tA_2 на луче l комплекса прямых (A_1A_2) [2]. Уравнение (2) можно записать в виде:

$$t^{[1}\nabla t^{2]}=0,$$

если через t^p обозначить однородные координаты точки на луче l $(t=t^2:t^1)$, а

$$\nabla t^p=dt^p+t^q\omega_q^p.$$

Уравнение (2), полученное геометрическим путем [2], заменяем другим, более общим, уравнением, связывающим формы ω_p^α и ∇t:

$$2t^{[1}\nabla t^{2]}-a_{pq\alpha}^r t^p t^q\omega_r^\alpha=0, \tag{3}$$

причем $a_{pq\alpha}^r$ – симметричны относительно индексов p и q.

Система дифференциальных форм ω_p^α вполне интегрируема и первые интегралы её определяют прямую A_1A_2. Система дифференциальных форм ω_p^α, ∇t тоже вполне интегрируема и первые интегралы её определяют линейный элемент (A_1+tA_2, A_1A_2), т. е. точку A_1+tA_2 и проходящую через неё прямую A_1A_2. Уравнения (1) определяют в пятимерном пространстве линейных элементов, базисным пространством которого является трёхмерное точечное пространство P_3 [3], специальную гиперповерхность (специальную в том смысле, что не входит форма ∇t); если уравнение (3) $\Big($или (2)$\Big)$ вполне интегрируемо, то эта специальная гиперповерхность распадается на однопараметрическое семейство трёхмерных поверхностей пятимерного пространства линейных элементов.

Требуем, чтобы уравнение (3) было вполне интегрируемым при сохранении трёх независимых форм комплекса и инвариантным относительно изменения вторичных параметров. Требование полной интегрируемости уравнения (3) приводит к уравнению второй степени относительно t, а требование, чтобы полная интегрируемость имела место при любом t, приводит к трём внешним квадратичным уравнениям; разложение последних по лемме Картана показывает, что девятикомпонентный (ввиду того, что из 4-рёх главных форм ω_p^α только три являются линейно независимыми) геометрический об'ект, составленный из комбинаций величин $a_{pq\alpha}^r$ и компонент фундаментального об'екта первого порядка λ_α^p комплекса прямых $(A_1 A_2)$, можно разбить на два подоб'екта соответственно четырёхкомпонентный и пятикомпонентный. При этом оказывается целесообразным записать уравнение (3) в виде:

$$t^{[1}\nabla t^{2]} - \frac{1}{\sqrt{|A|}}\, \lambda_\alpha^r \mu_{pqr\,[1}\omega_{2]}^\alpha t^p t^q + \mu_\alpha^{[1} t^{2]} t^r \omega_r^\alpha = 0, \tag{3'}$$

где

$$A \equiv \lambda_3^1 \lambda_4^2 - \lambda_3^2 \lambda_4^1 \neq 0.$$

Дифференцируя уравнение (3′) внешним образом и требуя, чтобы полученное уравнение было верно для любого t, получим три внешние квадратичные уравнения; разлагая их по лемме Картана, получим, что величины μ_α^p и μ_{pqrs} (μ_{pqrs} — симметричны относительно всех индексов) удовлетворяют, при изменении одних только вторичных параметров, дифференциальным уравнениям:

$$\delta\mu_\alpha^p + \mu_\alpha^q \pi_q^p - \mu_\beta^p \pi_\alpha^\beta + \pi_\alpha^p = 0, \tag{4}$$

$$\delta\mu_{pqrs} - 4\mu_{t(qrs}\pi_{p)}^t + \frac{1}{2}\mu_{pqrs}(5\pi_t^t - \pi_\alpha^\alpha) = 0, \tag{5}$$

где δ — символ дифференцирования относительно вторичных параметров и $\pi_i^j = \omega_i^j(\delta)$.

Из уравнений (5) видно, что об'ект из величин μ_{pqrs} является однородным. Об'ект μ_α^p будет однородным, если ребро $A_4 A_3$ при изменении вторичных параметров стоит на месте. При изменении главных параметров ребро $A_4 A_3$ может описывать комплекс прямых, конгруэнцию прямых, линейчатую поверхность или даже быть неподвижной. В дальнейшем будем предполагать, что ребро $A_4 A_3$ тоже описывает комплекс прямых $(A_4 A_3)$.

При μ_α^p и μ_{pqrs}, удовлетворяющих уравнениям (4) и (5), уравнение (3′) является инвариантным относительно изменения вторичных параметров.

4. Компоненты геометрического об'екта μ_{pqrs} определяют на луче l четыре инвариантные точки $t^p A_p$, координатами которых являются решения уравнения

$$\mu_{pqrs} t^p t^q t^r t^s = 0. \tag{6}$$

Компоненты геометрического об'екта μ^p_α определяют инвариантную прямую

$$x^p = \mu^p_\alpha x^\alpha, \tag{7}$$

которая в случае $\mu^p_\alpha = 0$ совпадает с ребром $A_4 A_3$ (x^i — координаты точки в репере $\{A_i\}$).

5. Когда луч l описывает комплекс прямых $(A_1 A_2)$, прямая, определяемая уравнениями (7), в общем случае описывает комплекс прямых, который будем называть присоединённым к комплексу $(A_1 A_2)$. Будем рассматривать такие пары комплексов: $(A_1 A_2)$ и к нему присоединённый. В этом случае вершины A_4 и A_3 можно выбрать так, чтобы они лежали на прямой, определяемой уравнениями (7). После такого выбора вершин A_4 и A_3, будем иметь $\mu^p_\alpha = 0$.

Для упрощения вычислений обозначаем

$$\Theta^q_p \equiv \frac{1}{\sqrt{|A|}} \lambda^q_\alpha \omega^\alpha_p.$$

Дифференциальные формы Θ^q_p удовлетворяют следующим уравнениям структуры:

$$D\Theta^q_p = [\omega^s_p, \Theta^q_s] - [\omega^q_s, \Theta^s_p] + 2[\vartheta^{q[1}, \Theta^{2]}_p] + \frac{1}{2}[\omega^s_s - \omega^\alpha_\alpha, \Theta^q_p],$$

где

$$\vartheta^{pq} \equiv \frac{2\lambda^{(p}_{[3} \nabla \lambda^{q)}_{4]}}{A}.$$

Линейное дифференциальное уравнение (1) записывается теперь в виде:

$$\Theta^p_p = 0, \tag{1'}$$

так, что независимыми главными формами можно считать Θ^1_1, Θ^2_1, Θ^1_2. Дифференцируя уравнение (1′) внешним образом, получим:

$$[\vartheta^{p[1}, \Theta^{2]}_p] = 0. \tag{1''}$$

После приведения μ^p_α к нулю, уравнение (3′) принимает вид:

$$t^{[1} \nabla t^{2]} - \mu_{pqr\,[1}\Theta^r_{2]}\, t^p t^q = 0. \tag{3''}$$

Дифференцируя уравнение (3″) внешним образом и требуя, чтобы полученное уравнение было верно для любого t, получим:

$$2[\nabla\mu_{pqr\,[1}, \Theta^r_{2]}] - [\mu_{pqrs}\vartheta^{ts}, \Theta^r_t] + (-1)^{p+q}[\Theta^{r(3-p}, \Theta^{3-q)}_r] + 2[\Theta_{1(p}, \Theta_{q)2}] = 0, \tag{8}$$

где

$$\nabla\mu_{pqrs} \equiv d\mu_{pqrs} - 4\mu_{t(qrs}\omega^t_{p)} + \frac{1}{2}\mu_{pqrs}(5\omega^t_t - \omega^\alpha_\alpha),$$

$$\Theta^{pq} \equiv \frac{2\sqrt{|A|}}{A} \lambda^p_{[3}\omega^q_{4]},$$

$$\Theta_{pq} \equiv \mu_{pqr\,[1}\Theta^r_{2]}.$$

Внешнее дифференцирование уравнений (8) с использованием уравнений (1′), (1″), (8) к новым условиям не приводит.

6. На любой линейчатой поверхности комплекса $(A_1 A_2)$ уравнение (3″) определяет вдоль луча l однопараметрическое семейство кривых. Из комплекса $(A_1 A_2)$ выделяем развёртывающуюся поверхность

$$\rho^p \omega^\alpha_p = 0, \tag{9}$$

ребро возврата которой, как нетрудно проверить, описывает точка $N=\rho^p A_p$. Тогда, согласно сказанному выше, в любой точке $M=t^p A_p$ луча l имеем прямую (M, dM), касающуюся некоторой кривой на развёртывающейся поверхности. Фиксируем произвольно точку M (т. е. фиксируем t), а развёртывающуюся поверхность будем менять (т. е. менять $\rho=\rho^2:\rho^1$). К точке M в этом случае будет присоединено однопараметрическое (параметр ρ) семейство прямых (M, dM). Для получения уравнения этого семейства замечаем, что для любой точки прямой

$$\frac{x^1}{(t^1)^2(\rho^1)^2}=\frac{x^2}{t^1 t^2(\rho^1)^2+\frac{\lambda A}{\sqrt{|A|}}\mu_{pqrs} t^p t^q \rho^r \rho^s}=\frac{x^3}{4\lambda t^1 t^{[1}\rho^{2]}\lambda^{[1}_{4}\rho^{2]}}=-\frac{x^4}{4\lambda t^1 t^{[1}\rho^{2]}\lambda^{[1}_{3}\rho^{2]}}. \tag{10}$$

Исключая из (10) параметры λ и ρ, получаем уравнение

$$4\lambda^{[2}_{\alpha} t^{1]} t^{[1} x^{2]} x^{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{|A|}}\lambda^p_\alpha \lambda^q_\beta \mu_{pqrs} t^r t^s x^\alpha x^\beta=0, \tag{11}$$

которое показывает, что к точке M присоединён конус второго порядка Нетрудно получить, что конус (11), присоединённый к некоторой точке M луча l, вырождается в пару плоскостей тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют уравнению (6).

На луче l вводим соответствие между точками при помощи уравнения

$$\mu_{pqrs} t^p t^q \rho^r \rho^s=0 \tag{12}$$

(геометрическая характеристика такого соответствия рассмотрена в [4]) При соответствии (12) каждой точке $N=\rho^p A_p$ на луче l соответствуют две точки $M=t^p A_p$ на том же луче. Фиксируем развёртывающуюся поверхность (9). Точке N будут соответствовать две точки M, а, следует, и две прямые (M, dM), для точек которых, как показывает уравнение (10), имеем:

$$\frac{x^1}{t^1(\rho^1)^2}=\frac{x^2}{t^2(\rho^1)^2}=\frac{x^3}{4\lambda t^{[1}\rho^{2]}\lambda^{[1}_{4}\rho^{2]}}=-\frac{x^4}{4\lambda t^{[1}\rho^{2]}\lambda^{[1}_{3}\rho^{2]}},$$

или

$$\begin{cases} \lambda^{[1}_{\alpha}\rho^{2]} x^\alpha=0, \\ t^{[1} x^{2]}=0. \end{cases} \tag{13}$$

Из уравнений (13) видно, что точка пересечения упомянутых двух прямых (M, dM) при изменении ρ описывает прямую $A_4 A_3$. Исключение составляет тот случай, когда для любого ρ эти две прямые совпадают между собой: Как следует из непосредственных вычислений, в таком случае 4 точки, определяемые уравнением (6), совпадают между собой.

7. Мы предположили, что ребро $A_4 A_3$ описывает комплекс прямых $(A_4 A_3)$. Пусть уравнения комплекса $(A_4 A_3)$

$$\lambda^\alpha_p \omega^p_\alpha=0,$$

$$[\nabla\lambda^\alpha_p,\ \omega^p_\alpha]=0,$$

где

$$\nabla\lambda^\alpha_p \equiv d\lambda^\alpha_p+\lambda^\beta_p \omega^\alpha_\beta-\lambda^\alpha_q \omega^q_p.$$

При помощи величин $\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ и μ_p^α ($\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ — симметричны относительно всех индексов), способом, аналогичным вышеизложенному, вводим вполне интегрируемое уравнение

$$\tau^{[4}\nabla\tau^{3]}-\frac{1}{\sqrt{|B|}}\lambda_p^\gamma\mu_{\alpha\beta\gamma[4}\,\omega_{3]}^p\,\tau^\alpha\tau^\beta+\mu_p^{[4}\tau^{3]}\tau^\alpha\,\omega_\alpha^p=0, \tag{14}$$

где

$$B\equiv\lambda_1^3\lambda_2^4-\lambda_1^4\lambda_2^3\neq 0,$$
$$\nabla\tau^\alpha\equiv d\tau^\alpha+\tau^\beta\,\omega_\beta^\alpha,$$

а τ^α — однородные координаты точки $\tau^\alpha A_\alpha$ на луче $l'\equiv A_4A_3$. Таким же образом получим, что

$$\delta\mu_p^\alpha+\mu_p^\beta\,\pi_\beta^\alpha-\mu_q^\alpha\,\pi_p^q+\pi_p^\alpha=0,$$

$$\delta\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}-4\mu_{\delta(\beta\gamma\varepsilon}\,\pi_{\alpha)}^\delta+\frac{1}{2}\,(5\pi_\delta^\delta-\pi_p^p)=0.$$

Геометрический об'ект $\mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ определяет на луче l' четыре инвариантные точки $\tau^\alpha A_\alpha$, координатами которых являются решения уравнения

$$\mu'_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\,\tau^\alpha\,\tau^\beta\,\tau^\gamma\,\tau^\varepsilon=0, \tag{15}$$

а геометрический об'ект μ_p^α определяет инвариантную прямую

$$x^\alpha=\mu_p^\alpha\,x^p. \tag{16}$$

8. Пример. Чтобы убедиться в существовании комплексов, расслояемых в выше изложенном смысле, рассмотрим один частный случай, накладывая на комплексы пары некоторые дополнительные требования. Пусть прямая, определяемая уравнениями (16), совпадает с прямой A_1A_2, т. е. комплекс (A_1A_2) является присоединённым к комплексу $(A_4A_3.)$ В этом случае $\mu_p^\alpha=0$. Допустим, что пара комплексов (A_1A_2), (A_4A_3) является парой T. Рассмотрим эту пару. Уравнения пары T комплексов запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1^4+\omega_2^3=0,\\
&[\omega_2^1-\omega_3^4,\ \omega_1^3]+[\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_1^4]+[\omega_1^2-\omega_4^3,\ \omega_2^4]=0,\\
&\omega_4^1+\omega_3^2=0,\\
&[\omega_2^1-\omega_3^4,\ \omega_4^2]+[\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_4^1]+[\omega_1^2-\omega_4^3,\ \omega_3^1]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Берём тот частный случай, когда 4 точки, определяемые уравнением (6), совпадают между собой и эту четырёхкратную точку принимаем за вершину A_1. В таком случае $t=0$ будет четырёхкратным корнем уравнения (6), так что

$$\mu_{2221}=\mu_{2211}=\mu_{2111}=\mu_{1111}=0,\quad \mu_{2222}\neq 0.$$

Из уравнений (5) теперь имеем:

$$\delta\mu_{2222}+\frac{1}{2}\,\mu_{2222}\,(5\pi_1^1-3\pi_2^2-\pi_3^3-\pi_4^4)=0,$$

откуда следует, что соответствующей нормировкой вершин тетраэдра μ_{2222} можно привести к единице. Полагая

$$\mu_{2221}=\mu_{2211}=\mu_{2111}=\mu_{1111}=0,\quad \mu_{2222}=1,$$

уравнение (3″) запишем в виде:

$$dt+t\,(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\,\omega_2^1+\omega_1^2+t^2\,\omega_1^3=0. \tag{18}$$

Плоскость, соответствующая точке A_1 в нулевой системе комплекса $(A_1 A_2)$, пересекает луч l' в точке A_4. Пусть точка A_4 является четырёхкратной точкой, определяемой уравнением (15). Тогда

$$\mu_{3334} = \mu_{3344} = \mu_{3444} = \mu_{4444} = 0,$$

а μ_{3333} нормировкой вершин тетраэдра может быт приведён к единице.

Полагая $\mu_{3333} = 1$, уравнение (14) запишем в виде:

$$d\tau + \tau(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \tau^2 \omega_3^4 + \omega_4^3 + \tau^2 \omega_4^2 = 0 \tag{19}$$

$$(\tau = \tau^3 : \tau^4).$$

Дифференцируя уравнения (18) и (19) внешним образом и коэффициенты при различных степенях t (соответственно τ) приравнивая нулю, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&[-2\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3,\ \omega_1^3] + [\omega_1^2 + \omega_4^3 + \omega_3^1,\ \omega_1^4] - [\omega_4^1,\ \omega_2^4] = 0,\\
&[2\omega_1^2 - \omega_3^1,\ \omega_1^3] + [\omega_4^2,\ \omega_2^4] = 0,\\
&-[\omega_4^1,\ \omega_1^3] + [\omega_4^2,\ \omega_1^4] = 0,\\
&[\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4,\ \omega_4^2] + [\omega_1^2 + \omega_4^3 + \omega_2^4,\ \omega_4^1] - [\omega_1^4,\ \omega_3^1] = 0,\\
&[2\omega_4^3 - \omega_2^4,\ \omega_4^2] + [\omega_1^3, \omega_3^1] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Вершины тетраэдра нормируем так, чтобы иметь

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{17''}$$

Рассмотрим систему (17), 17′), (17″). Она замкнута относительно операции внешнего дифференцирования и содержит все уравнения рассматриваемого вопроса. Характеристическая система кроме форм

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^4, \tag{A}$$

независимых на интегральном многообразии, содержит формы:

$$\omega_2^3,\ \omega_4^2,\ \omega_4^1,\ \omega_3^2,\ \omega_3^1,\ \omega_1^2,\ \omega_4^3,\ \omega_2^1 - \omega_3^4,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4,\ \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4,$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1,\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4. \tag{B}$$

Система ковариантов неправильная. Выражая формы (B) через главные (A) и требуя, чтобы они удовлетворяли системе (17), (17′), (17″), получаем следующие общие решения системы (17), (17′), (17″):

$$\left.\begin{aligned}
&a)\ \ \omega_2^3 = -\omega_1^4,\\
&b)\ \ \omega_4^2 = -\omega_1^3,\\
&c)\ \ \omega_4^1 = a_1 \omega_1^3 + \omega_1^4,\\
&d)\ \ \omega_3^2 = -(a_1 \omega_1^3 + \omega_1^4),\\
&e)\ \ \omega_3^1 = a_2 \omega_1^3 + a_3 \omega_1^4 - \omega_2^4,\\
&f)\ \ \omega_1^2 = a_6 \omega_1^3 + \frac{1}{2} a_3 \omega_1^4 - \omega_2^4,\\
&g)\ \ \omega_4^3 = a_7 \omega_1^3 - \frac{1}{2} a_3 \omega_1^4 + \omega_2^4,\\
&h)\ \ \omega_2^1 - \omega_3^4 = a_4 \omega_1^3 + a_5 \omega_1^4 + (a_6 - a_7)\, \omega_2^4,\\
&i)\ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\\
&j)\ \ \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 = a_5 \omega_1^3 + a_8 \omega_1^4 + a_3 \omega_2^4,\\
&k)\ \ \omega_2^2 + \omega_1^3 - 2\omega_1^1 = a_9 \omega_1^3 + a_{10} \omega_1^4 - a_1 \omega_2^4,\\
&l)\ \ \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4 = a_{11} \omega_1^3 - a_{10} \omega_1^4 + a_1 \omega_2^4,
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &2a_5-a_1 a_8+(a_6-a_7-a_2)\,a_3=0,\\ &a_6+a_7+a_2-a_{10}=0,\\ &a_1 a_3-2a_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2^3=-\omega_1^4,\\ &\omega_4^2=0,\\ &\omega_4^1=0,\\ &\omega_3^2=0,\\ &\omega_3^1=0,\\ &\omega_1^2=a_6\,\omega_1^3,\\ &\omega_4^3=a_7\,\omega_1^3-a_3\,\omega_1^4,\\ &\omega_2^1-\omega_3^4=a_4\,\omega_1^3+a_5\,\omega_1^4+(a_6-a_7)\,\omega_2^4,\\ &\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0,\\ &\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=a_5\,\omega_1^3+a_8\,\omega_1^4+a_3\,\omega_2^4,\\ &\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_1^1=a_9\,\omega_1^3+(a_6+a_7)\,\omega_1^4,\\ &\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_4^4=a_{11}\,\omega_1^3+a_{12}\,\omega_1^4+a_{13}\,\omega_2^4. \end{aligned}\right\} \tag{20A}$$

В случае (20 A) прямая A_4A_3 стоит на месте. Оставляя этот случай в стороне, продолжим рассмотрение (20). Общее решение системы (17), (17′), (17″) зависит от $N=7$ параметров. Характеры системы $s_1=7$, $s_2=2$, $s_3=0$, значит, число Картана $Q=7+2\cdot 2=11$. Так как $Q\neq N$, система (17), (17′), (17″) не в инволюции, её надо продолжать [1].

Дифференцируя внешним образом (20 b) и пользуясь (20), получаем:

$$\begin{aligned} &a_8+2a_{10}-2\,(a_6+a_7)=0,\\ &a_3-2a_1=0. \end{aligned} \tag{22}$$

Из уравнений (21) и (22) имеем:

$$a_2=a_1^2,\quad a_3=2a_1,\quad a_5=-a_1(a_6-a_7),\quad a_8=-2a_1^2,\quad a_{10}=a_6+a_7+a_1^2. \tag{23}$$

Дифференцируя внешним образом (20c), (20e) с учётом (23) и пользуясь (20), получаем соответственно:

$$[\nabla a_1,\ \omega_1^3]=0, \tag{24a}$$

$$2a_1[\nabla a_1\,\omega_1^3]+2[\nabla a_1,\ \omega_1^4]-(2a_1 a_6-a_9+a_{11})\,[\omega_1^3,\ \omega_2^4]=0, \tag{24b}$$

где

$$\nabla a_1\equiv da_1-(\omega_2^1+\omega_3^4)+\left\{\frac{1}{2}\,a_1^2(a_6+a_7)-\frac{1}{4}\,a_1(a_9+a_{11})\right\}\omega_1^3+$$
$$+\left\{(a_9-a_{11})-a_1(a_6-a_7)\right\}\omega_1^4-(a_6+a_7)\,\omega_2^4.$$

Разлагая первое из этих уравнений по лемме Картана и подставляя во второе, получаем:

$$a_9=a_{11}+2a_1 a_6. \tag{25}$$

Из уравнений (24a), (24b) следует теперь:

$$[\nabla a_1,\ \omega_1^3]=0, \tag{26a}$$

$$[\nabla a_1,\ \omega_1^4]=0. \tag{26b}$$

Дифференцируя внешним образом (20f) и учитывая полученные уже уравнения, получаем:

$$[\Delta a_6,\ \omega_1^3]+(a_6+a_7)\,[\omega_2^4,\ \omega_1^4]=0, \tag{26c}$$

где

$$\Delta a_6 \equiv da_6 - a_1\,\omega_3^4 + (a_1\,a_6 + a_1\,a_7 - a_{11})\,(a_1\,\omega_1^4 - \omega_2^4),$$

а это возможно только тогда, когда

$$a_6 + a_7 = 0.$$

Систему (20) переписываем в виде:

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & \omega_2^3 = -\,\omega_1^4,\\
b) & \omega_4^2 = -\,\omega_1^3,\\
c) & \omega_4^1 = a_1\,\omega_1^3 + \omega_1^4,\\
d) & \omega_3^2 = -(a_1\,\omega_1^3 + \omega_1^4),\\
e) & \omega_3^1 = a_1^2\,\omega_1^3 + a_1\,\omega_1^4 + \omega,\\
f) & \omega_1^2 = a_6\,\omega_1^3 + \omega,\\
g) & \omega_4^3 = -(a_6\,\omega_1^3 + \omega),\\
h) & \omega_2^1 - \omega_3^4 = a_4\,\omega_1^3 - 2a_6\,\omega,\\
i) & \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\\
j) & \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 = -\,2a_1\,a_6\,\omega_1^3 - 2a_1\,\omega,\\
k) & \omega_2^2 - \omega_2^3 - 2\omega_1^1 = (a_{11} + 2a_1\,a_6)\,\omega_1^3 + a_1\,\omega,\\
l) & \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4 = a_{11}\,\omega_1^3 - a_1\,\omega,
\end{array}\right\} \qquad (20')$$

где

$$\omega = a_1\,\omega_1^4 - \omega_2^4.$$

Нетрудно убедиться, что внешнее дифференцирование уравнений ($20'g$), ($20'j$) к новым условиям не приводит. Внешнее дифференцирование уравнений ($20'k$), ($20'l$) приводит к уравнению

$$[\nabla a_{11},\ \omega_1^3] = 0, \qquad (26d)$$

где.

$$\nabla a_{11} \equiv da_{11} + (a_1^2 + 2a_6)\,\omega_3^4 + (a_1\,a_{11} + 2a_6^2 + 2a_4 - 4)\,\omega,$$

а внешнее дифференцирование уравнения ($20'h$) к уравнению

$$[\nabla a_4,\ \omega_1^3] - 2\,[\nabla a_6,\ \omega] = 0, \qquad (26e)$$

где

$$\nabla a_4 \equiv da_4 + 2a_1\,a_6\,(\omega_2^1 + \omega_3^4) - a_1\,a_4\,\omega.$$

Рассматриваем систему ($20'$), ($26a$)–($26e$). Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования и является продолжением системы (17), ($17'$), $17''$). Характеристическая система кроме форм (A), (B) содержит ещё формы

$$\nabla a_1,\ \nabla a_4,\ \nabla a_6,\ \nabla a_{11}. \qquad (C)$$

Система ковариантов правильная. Характеры системы $s_1 = 4$, $s_2 = s_3 = 0$, откуда следует, что число Картана $Q = 4$. Но так как общее решение системы ($20'$), ($26a$)–($26e$) зависит от $N = 3$ параметров, система не в инволюции, её надо продолжать.

Разлагая ($26a$)–($26e$) по лемме Картана, имеем:

$$\left.\begin{array}{l}
da_1 - (\omega_2^1 + \omega_3^4) - \dfrac{1}{2}\,a_1\,(a_{11} + a_1\,a_6)\,\omega_1^3 = 0,\\
da_6 - a_1\,\omega_3^4 - a_{11}\,\omega = b_1\,\omega_1^3,\\
da_{11} + (a_1^2 + 2a_6)\,\omega_3^4 + (a_1\,a_{11} + 2a_6^2 + 2a_4 - 4)\,\omega = b_2\,\omega_1^3,\\
da_4 + 2a_1\,a_6\,(\omega_2^1 + \omega_3^4) - a_1\,a_4\,\omega = b_3\,\omega_1^3 - 2b_1\,\omega.
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &[\nabla b_1,\ \omega_1^3]=0,\\ &[\nabla b_2,\ \omega_1^3]=0,\\ &[\nabla b_3,\ \omega_1^3]-2[\nabla b_1,\ \omega]=0, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

где ∇b_1, ∇b_2, ∇b_3 — линейные формы, содержащие соответственно дифференциалы db_1, db_2, db_3.

Рассмотрим систему (20′), (27), (28) — второе продолжение исходной системы. Характеристическая система состоит из форм

$$(A),\ (B),\ (C),\ \nabla b_1,\ \nabla b_2,\ \nabla b_3.$$

Характеры системы $s_1=3$, $s_2=s_3=0$, $Q=N=3$, значит, система в инволюции, решение существует. Произвол решения — 3 функции одного аргумента.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить К. Гринцевичюса за руководство и помощь в работе.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
20.IX.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948.
2. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций, М., 1956.
3. В. Близникас. К дифференциальной геометрии билинейно-метрических пространств линейных элементов, Уч. зап. Вильнюсского гос. у-та, сер. матем. и физ., 1960, IX, 97—106.
4. К. И. Гринцевичюс. Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса, Успехи математических наук, 1958 т. 13, в. 2(80), 175—180.

APIE TIESIŲ KOMPLEKSŲ IŠSLUOKSNIAVIMĄ

P. VAŠKAS

(Reziumė)

Darbe išdėstomas bandymas apibendrinti tiesių kompleksų išsluoksniavimą tiesinių elementų pagalba. Tam tikslui vietoj (2) lygties, naudojamos dvejetų teorijoje ir gautos geometriniu būdu [2], analiziniu būdu įvedama bendresnė (3) lygtis.

SUR LA STRATIFICATION DES COMPLEXES DE DROITES

P. VAŠKAS

(Résumé)

Dans cet article on expose un essai à généraliser la stratification des complexes de droites à l'aide des éléments linéaires. Au lieu de l'équation (2), employée dans la théorie des couples et reçue géometriquement [2], on emploie l'équation plus générale (3), reçue par méthode analytique.