1963

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЗНАЧЕНИЯ ИГРЫ

Э. ВИЛКАС

Решение ряда теоретико-игровых задач сводится к решению функционального уравнения

$$x=\mathrm{val}\,A(x), \tag{1}$$

где $\mathrm{val}\,A(x)$ – значение игры с матрицей

$$A(x)=\|a_{ij}(x)\|_{k\times l}.$$

Это уравнение рассматривалось Л. Шепли [1], Дж. Милнором [2], И. В. Романовским [3] и др. при исследовании ими некоторых динамических игр, причем для его решения применялся главным образом итеративный метод. Близким вопросам посвящены статьи Г. Эверетта [4] и Н. Н. Воробьева и И. В. Романовского [5].

В настоящей статье доказывается сходимость для всех x итераций непрерывного отображения Tx всей вещественной прямой в себя, для которого из $T^2x=x$ следует $Tx=x$, а также сходимость последовательности $\{x_n\}$,

$$x_n=T_n x_{n-1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\{T_n\}$ – сходящаяся последовательность операторов сжатия. В терминах элементов матрицы игры формулируются достаточные условия сходимости указанных итеративных процессов. Рассматриваетса ограниченность решений уравнения (1).

Всюду в дальнейшем $T^n x$ будет означать n-ю итерацию оператора T, $T^0x=x$ и $R=[-\infty,\ \infty]$.

1. Прежде чем формулировать наш главный результат, введем

Условие L_α. Будем говорить, что отображение прямой R в себя удовлетворяет условию L_α при фиксированном α, если

$$f\big(f(x)-\alpha\big)=x+\alpha, \qquad x\in R,$$

тогда и только тогда, когда

$$f(x)=x+\alpha.$$

Условие L_α означает, что кривая $y=f(x)$ не имеет точек, симметричных относительно оси $y=x+\alpha$. В частности, условие L_0 означает, что кривая $y=f(x)$ и ей симметричная относительно биссектрисы координатного угла кривая $y=g(x)$ не имеют других точек пересечения, как точки прямой $y=x$.

Теорема 1. *Пусть Tx – непрерывное отображение R в себя. Тогда для того, чтобы при каждом $x\in R$ последовательность $\{T^n x\}$ имела предел,* *конечный или бесконечный, необходимо и достаточно, чтобы Tx удовлетворяло условию L_0.*

Необходимость. Если существует такое x_0, что $Tx_0 \neq x_0$, $T^2x_0 = x_0$, то последовательность $\{T^n x_0\}$, очевидно, имеет две различные предельные точки и поэтому не сходится.

Для доказательства достаточности нам потребуются три леммы.

Лемма 1. *Условие L_α для непрерывного отображения $f(x)$ прямой R в себя эквивалентно условию:*

$$f\big(f(x)-\alpha\big) > x+\alpha, \tag{2}$$

для всех x, для которых $f(x) > x+\alpha$.

Доказательство. Докажем, что если условие L_α выполняется, то выполняется и условие (2). Допустим, что существует такое x_0, что

$$f\big(f(x_0)-\alpha\big) \leqslant x_0+\alpha, \qquad f(x_0)-\alpha > x_0, \tag{3}$$

и покажем, что тогда условие L_α не выполняется. Положим

$$S = \{ x : x = f(x) - \alpha \}.$$

В силу непрерывности $f(x)$ множество S замкнуто. Следовательно, замкнуто и множество

$$S_{x_0} = S \cap [x_0, \ \infty].$$

Кроме того, S_{x_0} — непустое. Действительно, в силу (3)

$$f(x_0) > x_0+\alpha, \quad f\big(f(x_0)-\alpha\big) \leqslant \big(f(x_0)-\alpha\big)+\alpha.$$

А поэтому кривая $y=f(x)$ пересекает прямую $y=x+\alpha$ хотя бы в одной точке интервала $[x_0, \ f(x_0)-\alpha]$. В силу сказанного $\min S_{x_0}$ существует. Пусть

$$x_2 = \min S_{x_0}.$$

Очевидно,

$$x_0 < x_2 < f(x_0) - \alpha.$$

Рассмотрим два случая.

1) Имеется какое нибудь $x \in S$, $x < x_0$. Тогда обозначим

$$x_1 = \max \{ x : x \in S, \quad x \leqslant x_0 \}.$$

Максимум существует по причинам аналогичным. Образуем область F, контур G которой состоит из части непрерывной кривой $y=f(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, с одной стороны и кривой, симметричной ей относительно оси $y=x+\alpha$ с другой стороны, т. е.

$$G = \Big\{ \big(x, \ f(x)\big) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \Big\} \cup \Big\{ \big(f(x)-\alpha, \ x+\alpha\big) : x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \Big\},$$

где $(x, \ y)$ — точка плоскости. Контур G — жорданова кривая. Рассмотрим кривую $y=f(x)$ при $x > x_2$ и докажем, что она пересекает G в какой нибудь точке $P(\bar{x}, \ \bar{y})$, $x \neq x_2$ (и, следовательно, $\bar{x} \notin S$). В силу (3) кривая $f(x)$ из точки $(x_2, \ x_{2+\alpha})$ не может попасть в точку $\Big(f(x_0)-\alpha, \ f\big(f(x_0)-\alpha\big)\Big)$ иначе, как входя в F или соприкасаясь с ней. Отсюда, применяя очевидным образом измененную известную теорему Жордана получим, что искомая точка P существует. Но P есть точка кривой $y=f(x)$, $x > x_2$, и $P=\left(\bar{x},\ f(\bar{x})\right)$, причем $\bar{x}\notin S$. Кроме того, существует симметричная ей относительно $y=x+\alpha$ точка $\left(f(\bar{x})-\alpha,\ \bar{x}+\alpha\right)$. Следовательно,

$$f\left(f(\bar{x})-\alpha\right)=\bar{x}+\alpha, \qquad f(\bar{x})\neq\bar{x}+\alpha.$$

2) Уравнение $x=f(x)-\alpha$ не имеет решений левее x_0.

Заметим, что выполнение условия L_0 для $+\infty$ и $-\infty$ влечет за собой одно из двух: либо $f(x)>-\infty$ при $x\to\infty$, либо $f(x)<\infty$ при $x\to-\infty$. Поэтому мы можем считать, что либо $f(x)\leqslant C_1$, $x<x_2$, либо $f(x)\geqslant C_2$, $x>x_2$, где C_1 и C_2 — постоянные.

Пусть $f(x)\leqslant C_1$, $x<x_2$. В силу непрерывности $f(x)$ мы можем написать

$$f(x)>C_3, \quad x\in[x_2,\ f(x_0)-\alpha],$$

C_3 — постоянная. Положим $x_1=-\infty$,

$$F'=F\cap\{(x,\ y):x\geqslant C_3,\alpha-, \quad y\geqslant C_2\},$$

а G' — контур области F'. Если же $f(x)\geqslant C_2$, $x>x_2$, то положим

$$F'=F\cap\{(x,\ y):x\geqslant C_2-\alpha, \quad y\geqslant C_2\}.$$

Тогда все рассуждения случая 1) можно провести и здесь, заменяя F на F', G на G'. Из определения C_2 и C_3 ясно, что точка пересечения P будет находиться на кривой $f(x)$.

Поэтому из L_α следует (2). Обратное утверждение очевидно.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется такое очевидное следствие из леммы 1:

Следствие 1. *Условие L_0 для непрерывного отображения $f(x)$ прямой R в себя эквивалентно условию: из*

$$f(x_0)>x_0$$

следует

$$f(x)>x_0$$

для всех $x\in[x_0,\ f(x_0)]$.

Лемма 2. *Если Tx — непрерывное отображение R в себя, удовлетворяющее условию L_0, то из $x<Tx$ следует*

$$x<\inf\{T^n x, \quad n=1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$R^+=\{x:Tx\geqslant x\}, \quad R^-=\{x:Tx<x\}.$$

Лемма очевидна для случая $T^n x\in R^+$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, так как тогда $\{T^n x,\ n=1,\ 2,\ \ldots\}$ — неубывающая последовательность и $x<Tx$. Пусть теперь $l_1=0$, а k_1 и l_2 номера итераций $T^n x$ такие, что

$$\begin{gathered} T^n x\in R^+, \quad n<k_1, \quad T^{k_1}x\in R^-, \\ T^n x\in R^-, \quad k_1\leqslant n<l_2, \quad T^{l_2}x\in R^+. \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть k_t, l_t означают номера итераций, при которых переход из R^+ в R^- и, соответственно, обратно происходит t-ый раз. Тогда по следствию 1 из (4) получаем неравенства:

$$\begin{gathered} T^{k_t-1}x\geqslant T^{k_t-2}x\geqslant\ldots\geqslant T^{l_t}x, \\ T^n x>T^{k_t-1}x, \quad k_t\leqslant n\leqslant l_{t+1}, \quad t=1,\ 2,\ \ldots, \end{gathered}$$

откуда и следует лемма.

Аналогично устанавливается следующая

Лемма 3. *Если Tx — непрерывное отображение R в себя, удовлетворяющее условию L_0, то из $x>Tx$ следует*

$$x>\sup\{T^n x,\quad n=1,\ 2,\ \ldots\}.$$

После установления этих предварительных фактов обратимся к непосредственному доказательству достаточной части теоремы.

Если $\{T^n x\}$ — монотонная последовательность, то она имеет предел. Если при этом последовательность ограничена, то ее предел конечен. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда при каком нибудь n разность $T^{n+1}x-T^n x$ меняет знак. Мы покажем, что тогда $\{T^n x\}$ сходится.

В силу этого допущения мы можем предположить, что $T^{m_1}x\in R^+$, $T^{n_1}x\in R^-$. А тогда по леммам 2 и 3

$$T^n x\in(T^{m_1}x,\quad T^{n_1}x),\qquad n>\max(m_1,\ n_1).$$

Если последовательность $\{T^n x,\ n>\max(m_1,\ n_1)\}$ — монотонная, то доказательство закончено. Если нет, то существуют такие m_2 и n_2, что

$$T^n x\in(T^{m_2}x,\ T^{n_2}x),\qquad n>\max(m_2,\ n_2),$$

причем

$$T^{m_1}x>T^{m_2}x,\quad T^{n_1}x<T^{n_2}x.$$

Интерируя это рассуждение, мы либо докажем на каком нибудь шаге достаточность, либо придем к последовательности интервалов

$$(T^{m_1}x,\ T^{n_1}x)\supset(T^{m_2}x,\ T^{n_2}x)\supset\ldots\supset(T^{m_t}x,\ T^{n_t}x)\supset\ldots,\tag{5}$$

для которых

$$T^n x\in(T^{m_t}x,\ T^{n_t}x),\qquad n>\max(m_t,\ n_t),$$

$t=1,\ 2,\ \ldots.$ В силу монотонности последовательность (5) имеет предел. Пусть

$$\lim_{t\to\infty}(T^{m_t}x,\ T^{n_t}x)=[a,\ b].$$

Очевидно, соотношения (5) имеют место для любых последовательностей

$$(T^{m_t}x,\ T^{n_t}x),\qquad t=1,\ 2,\ \ldots,$$

для которых

$$T^{m_t}x\in R^+,\quad T^{n_t}x\in R^-\tag{6}$$

и $m_{t+1}>m_t$, $n_{t+1}>n_t$, $t=1,\ 2,\ \ldots$ Поэтому для любых монотонных последовательностей $\{m_t\}$ и $\{n_t\}$, для которых имеет место (6), получаем, что

$$T^{m_t}x\to a,\quad T^{n_t}x\to b,$$

при $t\to\infty$. Отсюда следует, что последовательность $\{T^n x\}$ имеет только две предельные точки: a и b. Поэтому либо $Ta=a$, либо $Ta=b$, так как в силу непрерывности Tx из соотношения $T^{m_t}x\to a$ при $t\to\infty$ следует, что

$$T^{m_t+1}x\to Ta,\qquad t\to\infty.\tag{7}$$

То же самое можно сказать относительно $T^2 a$. Если $Ta=a$, то $a=b$. Действительно, пусть m_t пробегает все те n для которых $T^n x\in R^+$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{m_t'\}$ последовательности $\{m_t\}$, что

$$T^{m_t'}x\in R^+,\quad T^{m_t'+1}x\in R^-,$$

и, следовательно,

$$T^{m_t'}x\to a,\quad T^{m_t'+1}x\to b$$

при $t\to\infty$. Последнее сопоставляя с (7), получаем $a=b$.

Если $Ta \neq a$, то $T^2a \neq a$ по условию L_0. Поэтому $Ta = b$, $T^2a = b$, откуда $Tb = b$. Применение рассуждения, аналогичного проведенному в случае $Ta = a$, завершает доказательство теоремы.

Замечание. Мы доказали несколько больше, чем утверждение теоремы 1, а именно: если выполнены условия теоремы 1, то последовательность $\{T^n x\}$ имеет бесконечный предел только тогда, когда она строго монотонна и неограничена.

Следствие 2. *Если для непрерывного отображения Tx прямой R в себя существуют такие x_0 и $m > 2$, что $T^m x_0 = x_0$, $Tx_0 \neq x_0$, то существует и x_1, что $T^2x_1 = x_1$, $Tx \neq x_1$.*

Доказательство. Очевидно, в теореме 1 необходимым условием существования предела для каждого x является отсутствие „циклов" любой длины m, а не только длины 2. Но достаточно отсутствие циклов длины 2. Следовательно, имеет место в следствии сформулированный закон.

Отметим наконец, что требование непрерывности Tx в теореме 1 существенно. Пусть

$$T^n x_0 \to \bar{x}, \quad n \to \infty, \quad T^n x_0 \neq T^m x_0, \quad n \neq m,$$

и $T^n x_0 - \bar{x}$ меняет знак при сколь угодно больших n. Тогда легко доказать, что Tx непрерывно в точке $\bar{x}$. Если $T^n x_0 - \bar{x}$, $n > n_0$ знака не меняет, то имеет место односторонняя непрерывность Tx.

2. Применим теперь теорему 1 к решению уравнения (1), находя достаточные условия в терминах элементов матрицы игры.

Нам потребуются следующие определения.

Условие L. Отображение $f(x)$ удовлетворяет условию L, если оно удовлетворяет любому из условий L_α.

Условие K. Отображение $f(x)$ удовлетворяет условию K, если при любом x_0

$$f(x) - f(x_0) > -(x - x_0)$$

для всех $x > x_0$.

Лемма 4. *Условие L для непрерывного отображения $f(x)$ прямой R в себя эквивалентно условию K.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию L и не удовлетворяет условию K. Тогда существуют такие x_0 и x_1, $x_1 > x_0$, что

$$f(x_1) \leqslant x_0 + f(x_0) - x_1. \tag{8}$$

По лемме 1 при $\alpha = f(x_0) - x_1$ имеем:

$$f\Big(f(x) - f(x_0) + x_1\Big) > x + f(x_0) - x_1, \tag{9}$$

если только $f(x) > x + \alpha = x + f(x_0) - x_1$. Но это неравенство при $x = x_0$ выполняется в силу $x_1 > x_0$. Поэтому из (9) следует, что

$$f(x_1) > x_0 + f(x_0) - x_1,$$

а это противоречит допущению (8).

Покажем теперь, что из выполнения условия K следует выполнение условия L. Выберем произвольно x_0. Используя условие K для $x = f(x_0) - \alpha$, напишем

$$f\Big(f(x_0) - \alpha\Big) > x_0 + f(x_0) - f(x_0) + \alpha = x_0 + \alpha$$

для всех x_0 и α, удовлетворяющих условию $f(x_0) > x_0+\alpha$. Но это и есть условие L.

Теорема 2. *Если все функции $a_{ij}(x)$ ($i=1, \ldots, k$; $j=1, \ldots, l$) непрерывны и удовлетворяют условию $L(K)$, то функция $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ также удовлетворяет условию $L(K)$.*

Доказательство. По лемме (4) и условию K для любого x_0 и всех $x>x_0$

$$\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\| > \mathrm{val}\,\|x_0+a_{ij}(x_0)-x\| = x_0+\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x_0)\|-x.$$

Это означает, что $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ удовлетворяет условию K, а, следовательно, и условию L. В частности, удовлетворяется и условие L_0.

Следствие 3. *Если все функции $a_{ij}(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию $L(K)$, то к $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ применима теорема 1.*

Следствие 4. *Если функции $a_{ij}(x)$ дифференцируемы и*

$$\frac{d}{dx}a_{ij}(x) > -1, \qquad i=1, \ldots, k; \quad j=1, \ldots, l, \tag{10}$$

то к $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ применима теорема 1.

Доказательство. Очевидно, из (10) следует, что для всех $a_{ij}(x)$ выполняется условие K. Тогда по теореме 2 и лемме 4 получаем, что $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ удовлетворяет условию K. Непрерывность $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ обеспечивается существованием производных функций $a_{ij}(x)$.

При проверке, не имеет ли $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ симметричных относительно прямой $y=x$ точек, иногда может быть полезной следующая

Теорема 3. *Если x_{ij} — какое нибудь ограниченное решение уравнения*

$$a_{ij}(x)=x$$

и

$$\begin{gathered} a_{ij}(x) < -x+2x_{ij}, \quad x<\min_{i,j} x_{ij}, \\ a_{ij}(x) > -x+2x_{ij}, \quad x>\max_{i,j} x_{ij}, \\ i=1, \ldots, k; \quad j=1, \ldots, l, \end{gathered} \tag{11}$$

то множества пар

$$\Big(x, \quad \mathrm{val}\,A(x)\Big), \qquad x>\max_{i,j} x_{ij}$$

и

$$\Big(\mathrm{val}\,A(x), \quad x\Big), \qquad x<\min_{i,j} x_{ij}$$

не пересекаются.

Доказательство. Пусть $x<\min\limits_{i,j} x_{ij}$. Тогда по (11)

$$\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\| < \mathrm{val}\,\|-x+2x_{ij}\| = -x+2\,\mathrm{val}\,\|x_{ij}\|.$$

Аналогично получаем неравенство

$$\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\| > -x+2\,\mathrm{val}\,\|x_{ij}\|, \qquad x>\max_{i,j} x_{ij}.$$

Из этих неравенств следует теорема.

В случае, когда выполнены условия (11) и

$$\begin{gathered} a_{ij}(x) \geqslant x, \qquad x<\min_{i,j} x_{ij}, \\ a_{ij}(x) \leqslant x, \qquad x>\max_{i,i} x_{ij}, \\ i=1, \ldots, k; \quad j=1, \ldots, l, \end{gathered}$$

с помощью этой теоремы исследование применимости теоремы 1 сводится к исследованию поведения $\mathrm{val}\,\|a_{ij}(x)\|$ в интервале $(\min_{i,j} x_{ij}, \max_{i,j} x_{ij})$. По теореме 3 нет таких симметричных точек $\left(x, \mathrm{val}\,A(x)\right)$, чтобы имели место неравенства

$$x < \min_{i,j} x_{ij}, \qquad \mathrm{val}\,A(x) > \max_{i,j} x_{ij}.$$

Дополнительно требуемые условия обеспечивают отсутствие симметричных точек при

$$x < \min_{i,j} x_{ij}, \qquad \mathrm{val}\,A(x) < \min_{i,j} x_{ij},$$

$$x > \max_{i,j} x_{ij}, \qquad \mathrm{val}\,A(x) > \max_{i,j} x_{ij},$$

так как

$$\mathrm{val}\,A(x) \geqslant x, \qquad x < \min_{i,j} x_{ij},$$

$$\mathrm{val}\,A(x) \leqslant x, \qquad x > \max_{i,j} x_{ij}.$$

3. Очевидным достаточным условием ограниченности решения уравнения (1) является ограниченность $\mathrm{val}\,A(x)$. Следующая теорема о бесконечности $\mathrm{val}\,A(x)$ является аналогом одной теоремы Н. Н. Воробьева и И. В. Романовского [5].

Теорема 4. *Если при $x \to x_0$ все функции $a_{ij}(x)$ ограничены снизу (сверху), то для того, чтобы $\mathrm{val}\,A(x) = \infty$ $(= -\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы каждый столбец (строка) матрицы $A(x)$ содержал элемент, безгранично возрастающий (соответственно, убывающий) при $x \to x_0$.*

Доказательство проведем только для случая столбцов, так как оно с очевидными изменениями подходит и к случаю строк.

Несоблюдение условия теоремы влечет ограниченность $\mathrm{val}\,A(x_0)$ снизу, так как второй игрок, выбирая j_0-й столбец, для которого $a_{ij_0}(x_0) < \infty$, $i = 1, \ldots, k$, не проиграет больше чем $\max_i a_{ij_0} < \infty$. (Это утверждение верно также и в том случае, когда $A(x)$ содержит неограниченные снизу при $x \to x_0$ элементы.) С другой стороны, условие теоремы в силу ограниченности всех элементов снизу, первому игроку обеспечивает выигрыш

$$\mathrm{val}\,A(x) \to \infty, \quad x \to x_0,$$

как некоторую линейную комбинацию с положительными коэффициентами безгранично возрастающих элементов.

4. Уравнение (1) может рассматриваться как предельная форма рекуррентного соотношения

$$x_n = \mathrm{val}\,A(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

которое может служить определением некоторой бесконечной или достаточно длинной позиционной игры с выигрышами в конце партий $a_{ij}(x_0)$. Но в более реалистических позиционных играх матрица A изменяется с каждым шагом рекурсии, т. е. имеет место рекуррентное соотношение

$$x_n = \mathrm{val}\,A_n(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому имеет смысл рассматривать последовательность

$$x_0, \quad T_1 x_0, \quad T_2 T_1 x_0, \quad \ldots .$$

Теорема 5. *Пусть*

а) *последовательность $T_n x$ сходится к Tx равномерно по x,*

б) *существует такое n_0, что*

$$|T_n x - T_n x'| \leqslant \rho |x - x'|, \qquad 0 < \rho < 1,$$

для всех $n > n_0$ и всех x, x'. Тогда $x_n \to x$, $n \to \infty$, для всех x_0, где

$$x_n = T_n x_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\bar{x} = T\bar{x}. \tag{13}$$

Доказательство*). По условию а) для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и всех x найдется такое $m_0(\varepsilon)$, что

$$T_{m+1} T_m x = T_m (T_m x) + \Theta\varepsilon,$$

для всех $m > m_0(\varepsilon)$, где $|\Theta| \leqslant 1$ здесь и далее считаем выбранным подходящим образом. Отсюда, применяя условие б), получаем

$$T_{m+2} T_{m+1} T_m x = T_{m+2} (T_m^2 x + \Theta\varepsilon) = T_{m+2} T_m^2 x + \rho\Theta\varepsilon = T_m^3 x + \Theta\varepsilon (1 + \rho)$$

для всех $m > \max\left(n_0, m_0(\varepsilon)\right)$ и всех x. Аналогичными рассуждениями можем доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$T_{m+n} \ldots T_m x = T_m^{n+1} x + \Theta\varepsilon (1 + \rho + \ldots + \rho^{n-1})$$

при всех $m > \max\left(n_0, m_0(\varepsilon)\right)$ и $n = 1, 2, \ldots$, или в силу того, что $\rho < 1$,

$$T_{m+n} \ldots T_m x = T_m^{n+1} x + \Theta c_1 \varepsilon, \tag{14}$$

где c_1 — константа, не зависящая от m и n. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое не зависящее от n и x число $M_0(\varepsilon)$, что (14) имеет место для всех $m > M_0$ и любого n.

Пользуясь равенством (14), напишем

$$|x_s - x_t| = |T_s \ldots T_m x_{m-1} - T_t \ldots T_m x_{m-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |T_m^{s-m+1} x_{m-1} - T_m^{t-m+1} x_{m-1}| + 2c_1\varepsilon, \qquad m > M_0,$$

откуда по б) следует сходимость $\{x_n\}$.

Предел последовательности $\{x_n\}$ для любого x_0 удовлетворяет уравнению (13). Действительно,

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} T_n x_{n-1} = \lim_{n\to\infty} \{ T x_{n-1} + \varepsilon(n, x_0) \} = Tx.$$

Кроме того, предельный оператор Tx является оператором сжатия:

$$|T(x+h) - Tx| \leqslant |T_n(x+h) - T(x+h)| + |T_n x - Tx| + \rho |h|$$

для любого $n > n_0$. Следовательно, уравнение (13) имеет единственное решение, и теорема доказана.

---

*) К настоящему времени автором доказано, что теорема 5 остается в силе, если вместо условия а) требовать только слабой сходимости операторов $T_n x$.

В связи с теоремой 5 уместно указать еще на следующий результат.

Теорема 6. *Если Tx — невозрастающая функция и*

$$|T(x+h)-Tx|\leqslant\rho|h|,\qquad 0<\rho<\infty, \tag{15}$$

то оператор

$$Ux=T\left(\frac{Tx+x}{\rho-1+\varepsilon}\right),\qquad \varepsilon>0,$$

является оператором сжатия.

Доказательство. По определению Ux и (15)

$$U(x+h)-Ux=T\left(\frac{Tx+x}{\rho-1+\varepsilon}+\frac{h-\Theta\rho h}{\rho-1+\varepsilon}\right)-T\left(\frac{Tx+x}{\rho-1+\varepsilon}\right)=\Theta\rho'|h|,$$

где $0<\Theta\leqslant 1$, $0<\rho'<1$.

Очевидно, решения уравнений $Ux=x$ и $Tx=x$ совпадают отнюдь не всегда. Но совпадение имеет место при

$$Ux=T\left(\frac{Tx+x}{2}\right)\qquad(\rho<3).$$

Легко видеть, что $\operatorname{val}A(x)$ удовлетворяет условиям теорем этого пункта, если только этим условиям удовлетворяют все функции $a_{ij}(x)$.

Выражаю искреннюю благодарность Н. Н. Воробьеву и И. В. Романовскому за ценные советы и замечания.

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
20.XI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. L. S. Shapley, Stochastic games, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 39 (1953), 1095—1100.
2. J. Milnor, L. S. Shapley, On games of survival, Contr. to the theory of games vol. III, Princeton, 1957, 15—46.
3. И. В. Романовский, Случайные блуждания игрового типа, Теор. вероятн. и ее прим., 4 (1961), 426—429.
4. H. Everett, Recursive games, Contr. to the theory of games, vol. III, Princeton, 1957, 47—78.
5. Н. Н. Воробьев, И. В. Романовский, Игры с запрещенными ситуациями, Вестн. Ленинградского у-та, сер. мат., мех. и астр., **7**, 2 (1959), 50—54.

FUNKCIONALINĖS LYGTIES SU LOŠIMO REIKŠMĖS OPERATORIUMI SPRENDIMAS

E. VILKAS

(Reziumė)

Funkcionalinės lygties su tolydiniu operatoriumi sprendimui taikomas paprastas iteracijų metodas. Randamos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad iteracijos konverguotų bet kokiai pradinei reikšmei, bei matricinių lošimų klasė, kuriai tos sąlygos patenkintos. Nagrinėjamas iteracijų konvergavimas, kai kiekviename žingsnyje naudojamas kitas suspaudimo operatorius, o tų operatorių seka konverguoja. Viena teorema skirta (1) lygties sprendinių aprėžtumo klausimui.

THE SOLVING OF THE FUNCTIONAL EQUATION WITH A GAME VALUE OPERATOR

E. VILKAS

(Summary)

There is used ordinary iterative method for solving of the functional equation with continous operator. Necessary and sufficient conditions for convergence of iterates for every initial value are given, and the class of matrix games satisfied these conoitions is given. There is studied convergence of iterates when on every step is used another pressing operator sequence of whose is converging. The one theorem is on the question of boundedness of solution of the equation (1).