1963

# ОБ ИНВОЛЮТИВНОЙ ПАРЕ КОМПЛЕКСОВ

К. ГРИНЦЯВИЧЮС

В этой заметке рассматривается пара комплексов прямых в трехмерном проективном пространстве, характеризуемая тем, что один относительный инвариант первого порядка этой пары комплексов равен нулю. Соответствие между прямыми комплексов этой пары является не однозначным – каждому лучу одного комплекса соответствует конгруэнция лучей второго комплекса. Только при дополнительных условиях каждому лучу одного комплекса может соответствовать линейчатая поверхность второго комплекса или соответствие может быть взаимно однозначным.

1. Пусть лучи $l_1 \equiv A_1 A_2$ и $l_2 \equiv A_4 A_3$, где $A_i (i, j, k=1, 2, 3, 4)$ вершины проективного репера $\{A_i\}$, описывают пару комплексов $(l_1)$, $(l_2)$.

Если обозначить

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad \text{где} \quad D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k],$$

то пара комплексов $(l_1)$, $(l_2)$ будет определена уравнениями

$$\lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha = 0, \quad [\Delta\lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha] = 0; \tag{1}$$

$$\lambda_p^\alpha \omega_\alpha^p = 0, \quad [\Delta\lambda_p^\alpha \omega_\alpha^p] = 0, \tag{2}$$

где $p, q = 1, 2$; $\alpha, \beta = 3, 4$;

$$\Delta\lambda_\alpha^p = d\lambda_\alpha^p + \lambda_\alpha^q \omega_q^p - \lambda_\beta^p \omega_\alpha^\beta,$$

$$\Delta\lambda_p^\alpha = d\lambda_p^\alpha + \lambda_p^\beta \omega_\beta^\alpha - \lambda_q^\alpha \omega_p^q.$$

Из рассмотрения исключаются комплексы касательных к поверхностям, т. е. предполагается, что

$$A = \lambda_4^2 \lambda_3^1 - \lambda_4^1 \lambda_3^2 \neq 0, \qquad B = \lambda_1^3 \lambda_2^4 - \lambda_1^4 \lambda_2^3 \neq 0. \tag{3}$$

Выражение $\lambda_\alpha^p \lambda_p^\alpha$ является относительным инвариантом и равенство

$$\lambda_\alpha^p \lambda_p^\alpha = 0 \tag{4}$$

имеет инвариантный смысл относительно изменения восьми вторичных параметров.

2. Касательный линейный комплекс

$$\lambda_\alpha^1 p^{2\alpha} - \lambda_\alpha^2 p^{1\alpha} = 0 \tag{5}$$

комплекса $(l_1)$ для луча $l_1$, проходящий через луч $l_2$, где $p^{ij}$ – однородные координаты прямой, и касательный линейный комплекс

$$\lambda_q^4 p^{3q} - \lambda_q^3 p^{4q} = 0 \tag{6}$$

комплекса $(l_2)$ для луча $l_2$, проходящий через $l_1$, находятся в инволюции [2] тогда и только тогда, когда выполнено условие (4).

3. Гармоническая нормаль

$$\lambda^1_\alpha x^2 x^\alpha - \lambda^2_\alpha x^1 x^\alpha = 0$$

комплекса $(l_1)$ для луча $l_1$, проходящая через луч $l_2$, где $x^i$ – координаты точки относительно репера $\{A_i\}$, пересекается со всеми линейчатыми поверхностями комплекса $(l_2)$, проходящими через $l_2$, гармонически [2] тогда и только тогда, когда выполнено условие (4).

Когда выполнено условие (4), тогда гармоническая нормаль

$$\lambda^4_p x^3 x^p - \lambda^3_p x^4 x^p = 0 \tag{8}$$

комплекса $(l_2)$ для луча $l_2$, проходящая через $l_1$, также пересекается со всеми линейчатыми поверхностями комплекса $(l_1)$, проходящими через $l_1$, гармонически.

4. Каждой точке $M = t^p A_p$ луча $l_1$ ставим в соответствии точку $M' = \tau^p A_p$ того же луча $l_1$ следующим образом. Плоскостью, ассоциированной с точкой $M$ луча $l_1$ комплекса $(l_1)$, является плоскость

$$t^1 \lambda^2_\alpha x^\alpha - t^2 \lambda^1_\alpha x^\alpha = 0, \tag{9}$$

которая пересекает луч $l_2$ в точке

$$N = t^\alpha A_\alpha, \quad \text{где} \quad t^3 = t^1 \lambda^2_4 - t^2 \lambda^1_4, \quad t^4 = t^2 \lambda^1_3 - t^1 \lambda^2_3.$$

Плоскость

$$t^4 \lambda^3_p x^p - t^3 \lambda^4_p x^p = 0, \tag{10}$$

ассоциированная с точкой $N$ луча $l_2$ комплекса $(l_2)$, пересекает луч $l_1$ в точке $M' = \tau^p A_p$, где

$$\lambda^2_\alpha \lambda^\alpha_p t^1 \tau^p - \lambda^1_\alpha \lambda^\alpha_p t^2 \tau^p = 0. \tag{11}$$

Соответствие (11) между точками $M$ и $M'$ луча $l_1$ является проективным соответствием. Это проективное соответствие будет инволюцией тогда и только тогда, когда будет выполнено условие (4).

Двойными точками инволюции (11) являются точки

$$T^p A_p, \quad \text{где} \quad \lambda^\alpha_p \lambda^{[2}_\alpha T^{1]} T^p = 0. \tag{12}$$

Аналогично проективное соответствие

$$\lambda^3_p \lambda^p_\alpha t^4 \tau^\alpha - \lambda^4_p \lambda^p_\alpha t^3 \tau^\alpha = 0$$

между точками $t^\alpha A_\alpha$ и $\tau^\alpha A_\alpha$ луча $l_2$, в силу (4), будет инволюцией, двойными точками которой являются

$$T^\alpha A_\alpha, \quad \text{где} \quad \lambda^p_\alpha \lambda^{[3}_p T^{4]} T^\alpha = 0. \tag{13}$$

Так как

$$(\lambda^p_3 \lambda^3_p - \lambda^p_4 \lambda^4_p)^2 + 4 \lambda^p_3 \lambda^4_p \lambda^q_4 \lambda^3_q = -4AB,$$

где $A$ и $B$ заданы в (3), то при $AB < 0$ обе инволюции являются гиперболическими, а при $AB > 0$ – эллиптическими. Эти инволюции будут параболическими только тогда, когда по крайней мере один комплекс будет образован из касательных к поверхности, но эта возможность, в силу (3), исключена из рассмотрения.

Пару комплексов, удовлетворяющую условию (4), назовем инволютивной парой.

5. В дальнейшем для простоты рассматриваем инволютивную пару комплексов с гиперболическими инволюциями. Если вершины $A_i$ будут лежать

соответственно в двойных точках (12) и (13) инволюций, а точка $A_1+A_2+$ $+A_3+A_4$ будет принадлежать квадрике (7), то уравнения (1), (2) примут вид

$$\begin{gathered}\omega_1^4+\omega_2^3=0,\\ [\omega_3^4-\omega_2^1,\ \omega_1^3]+[\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4,\ \omega_1^4]+[\omega_4^3-\omega_1^2,\ \omega_2^4]=0;\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}\omega_4^1-\omega_3^2=0,\\ [\omega_3^4+\omega_2^1,\ \omega_4^2]-[\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4,\ \omega_4^1]-[\omega_4^3+\omega_1^2,\ \omega_3^1]=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Касательные линейные комплексы (5), (6), гармонические нормали (7), (8) и плоскости (9), (10), ассоциированные соответственно с точками $t^p A_p$, $t^\alpha A_\alpha$, в так подобранном репере запишутся соответственно уравнениями:

$$p^{13}+p^{42}=0,\tag{16}$$

$$p^{13}-p^{42}=0,\tag{17}$$

$$x^1x^3-x^4x^2=0,\tag{18}$$

$$x^1x^3+x^4x^2=0,\tag{19}$$

$$t^1x^3-t^2x^4=0,\tag{20}$$

$$t^3x^1+t^4x^2=0.\tag{21}$$

6. Квадрики (18) и (19) пересекаются по четырем прямым $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$ и $A_4A_1$, причем пересечение по каждой прямой является гармоническим. Плоскость (20) при $t^2=0$ (соответственно $t^1=0$) пересекается с лучом $l_2$ в точке $A_4$ (соответственно $A_3$). Аналогично плоскость (21) при $t^3=0$ (соответственно $t^4=0$) пересекается с лучом $l_1$ в точке $A_1$ (соответственно $A_2$).

Те пары прямых, которые являются сопряженными относительно обоих линейных комплексов (16) и (17), образуют линейную конгруэнцию с директрисами $A_1A_3$ и $A_2A_4$, причем для прямой $A_1A_4$ общая сопряженная прямая будет $A_2A_3$.

7. Если предполагать, что линейные дифференциальные формы

$$\omega_3^4-\omega_2^1,\quad \omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4,\quad \omega_4^3-\omega_1^2,\quad \omega_3^4+\omega_2^1,\quad \omega_4^3+\omega_1^2$$

независимы, то система уравнений (14) и (15) будет в инволюции с характерами $s_1=s_2=s_3=2$, $s_4=s_5=0$, ибо $Q=N=12$. Следовательно, уравнения (14) и (15) определяют пятимерное многообразие пар лучей $l_1$, $l_2$, причем комплексы $(l_1)$ и $(l_2)$ являются произвольными комплексами. Если один из этих комплексов, например $(l_1)$, задан, то второй комплекс $(l_2)$ и соответствие между лучами $l_1$ и $l_2$ уравнениями (15) определяется с произволом одной функции от трех аргументов.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
15.XI.1962

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.–Л., 1948.
2. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций, Москва, 1956.

## APIE INVOLIUCINĮ KOMPLEKSŲ DVEJETĄ

K. GRINCEVIČIUS

*(Reziumė)*

Šiame straipsnelyje tiriamas toks tiesių kompleksų dvejetas trimatėje projektyvinėje erdvėje, kuris definuojamas išorinėmis diferencialinėmis lygtimis (1) ir (2) ir kuriam pirmos eilės sąlyginis invariantas $\lambda_p^\alpha \lambda_\alpha^p$ lygus nuliui.

## ÜBER EIN INVOLUTORISCHES STRAHLENKOMPLEXEPAAR

K. GRINCEVIČIUS

*(Zusammenfassung)*

In diesem Artikel wird ein solches Strahlenkomplexepaar im dreidimensionalen projektiven Raum untersucht, das mit Hilfe äusserer Differentialgleichungen (1) und (2) definiert wird und dessen relative Invariante erster Ordnung $\lambda_p^\alpha \lambda_\alpha^p$ gleich Null ist.