III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

АНАЛИТИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ КЛАССА L

В. М. ЗОЛОТАРЕВ (МОСКВА)

1. Определения, обозначения

Безгранично делимые законы (б. д. з.) описываются, как известно, в терминах, соответствующих им характеристических функций (х. ф.) $f(t)$ (формула Леви-Хинчина):

$$\log f(t) = it\gamma - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int' (e^{itu} - 1 - it \sin u)\, dH(u), \tag{1}$$

где γ, σ — вещественные параметры и $H(u)$ — так называемая спектральная функция (с. ф.) б. д. з. удовлетворяет следующим условиям:

а) $H(u)$ определена и не убывает на полуосях $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$,

б) $H(-\infty) = H(\infty) = 0$,

в) $\int'_{|u| \leq 1} u^2\, dH(u) < \infty$.

Здесь, как и в (1), штрих при интеграле означает, что из области интегрирования исключена точка $u=0$.

Для функции распределения (ф. р.) и плотности б. д. з. мы примем соответственно обозначения $G(x, \cdot)$, $g(x, \cdot)$, подставляя вместо $(\cdot)$ все или некоторые определяющие элементы б. д. з. $\left(\text{т. е. } \gamma, \sigma^2, H(u)\right)$.

Отметим, что при компонировании двух или нескольких б. д. з. их определяющие элементы складываются. И наоборот, каждому представлению определяющих элементов в виде суммы идентичных слагаемых соответствует разложение б. д. з. в композицию, т. е.

$$G(x, \gamma_1+\gamma_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2, H_1+H_2) = G(x, \gamma_1, \sigma_1^2, H_1) * G(x, \gamma_2, \tau_2^2, H_2). \tag{2}$$

Нам понадобится далее выражение $\log|f(t)|$, получаемое непосредственно из (1) $\left(\text{полагаем } J(x) = H(|x|) - H(-|x|)\right)$:

$$u(t) = -\log|f(t)| = \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_0^\infty (1 - \cos tx)\, dJ(x). \tag{3}$$

Класс L из множества $\mathfrak{G}$ всех б. д. з. выделяется посредством дополнительных условий на с. ф. H:

г) с. ф. $H(x)$ имеет односторонние производные во всех точках $x \neq 0$,

д) функция $xH'(x)$ не возрастает на полуосях $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; при этом под H' понимается любая из односторонних производных. Основной целью настоящей заметки является выяснение свойств гладкости (абсолютная непрерывность, кратная дифференцируемость, аналитичность) функций распределения $G(x, H)$ в зависимости от тех или иных свойств определяющих элементов законов класса L.

Поскольку при решении этих вопросов смещение γ, очевидно, не играет никакой роли, то мы можем придавать ему любое нужное нам значение. Кроме указанного круга задач, в работе будет рассмотрен частично вопрос об одновершинности L-б. д. з.

Свойство д) б. д. з. класса L (сокращенно L-б. д. з.) показывает, что всегда существуют конечные или бесконечные неотрицательные пределы

$$\mu^- = -\lim_{x\to 0-0} xH'(x), \quad \mu^+ = \lim_{x\to 0+0} xH'(x). \tag{4}$$

Весьма важной характеристикой L-б. д. з. является используемая ниже величина

$$\mu = \mu^- + \mu^+ = \lim_{x\to 0+0} xJ'(x) = \mathrm{Var}\left(xH'(x)\right). \tag{5}$$

Мы будем иметь дело в наших дальнейших исследованиях также с величинами

$$b(\alpha) = \underline{\lim}_{x\to 0+0} x^{2+\alpha} J'(x), \quad B(\alpha) = \overline{\lim}_{x\to 0+0} x^{2+\alpha} J'(x). \tag{6}$$

Сделаем несколько замечаний относительно введенных нами величин.

1) Очевидно, $\mu \geqslant 0$. Причем $\mu = 0$, тогда и только тогда, когда $H(u) \equiv 0$.

2) Если $b(\alpha) > 0$, то $b(\alpha') = \infty$ для $\alpha' < \alpha$.

3) Если $B(\alpha) < \infty$, то для любого $\alpha'' > \alpha$ $B(\alpha'') = 0$.

4) Если для некоторого $\alpha > -1$ получаем $B(\alpha) > 0$, то обязательно $\mu = \infty$. Обратное заключение, вообще говоря, не имеет места.

5. Из общего для всех б. д. з. свойства в) видно, что $b(\alpha) = 0$ для $\alpha \geqslant 1$.

Определение. Невырожденный L-б. д. з. $G(x, H)$ мы относим к подклассу $\mathfrak{L}_s$, если он не содержит нормальной компоненты (т. е. $\sigma^2 = 0$), а определяемая для него согласно (5) величина $\mu = s$ конечна и к подклассу $\mathfrak{L}_\omega$ во всех остальных случаях.

В свою очередь подкласс $\mathfrak{L}_\omega$ мы разбиваем на следующие подклассы: $L(\omega)$ содержит те из б. д. з. $\mathfrak{L}_\omega$, для которых $\sigma^2 > 0$, подкласс $L(q)$ образуют L-б. д. з., не имеющие нормальной компоненты (т. е. $\sigma^2 = 0$) и для которых $b(0) = q$ (q может быть бесконечным).

2. Б. д. з. подкласса L (ω)

Эти L-б. д. з., ввиду наличия нормальной составляющей, представляют в плане нашей задачи наиболее простой случай.

Теорема 1. *Все б. д. з. подкласса $L(\omega)$ являются целыми функциями.*

Доказательство. Поскольку в этом случае для модуля х. ф., очевидно, справедлива оценка

$$|f(t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} t^2\right), \tag{7}$$

то ф. р. абсолютно непрерывна, а плотность g может быть представлена с помощью формулы обращения

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} f(t)\, dt. \tag{8}$$

Из той же оценки видно, что интеграл (8) будет абсолютно сходящимся при любых комплексных значениях x и потому $g(x)$ допускает тривиальным образом аналитическое продолжение во всей комплексной плоскости.

Замечание. Хотя формулировка теоремы 1 приводилась только для б. д. з. подкласса $L(\omega)$, её утверждение, как видно из самого доказательства, справедливо для любых б. д. з., содержащих нормальную компоненту.

3. Абсолютная непрерывность L – б. д. з.

Теорема 2. *Все б. д. з. класса L абсолютно непрерывны.*

Доказательство этой теоремы мы получим как следствие двулемм.

Лемма 1. *Если с. ф. $H(u)$ произвольного, б. д. з. $G(x, H)$ абсолютно непрерывна в интервалах определения $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ и неограничена, по крайней мере, на одном из них, то ф. р. $G(x, H)$ – абсолютно непрерывна на всей оси.*

Доказательство. Принимая во внимание замечание к теореме 1, мы вправе полагать $\sigma^2=0$. Пусть с. ф. $H(u)$ неограничена на полуоси $(-\infty, 0)$.

Введем функции

$$M(u)=\begin{cases} H(u), & u<0 \\ 0, & u>0; \end{cases} \qquad N(u)=\begin{cases} 0, & u<0 \\ H(u), & u>0. \end{cases}$$

После этого мы можем с. ф. записать в виде

$$H(u)=M(u)+N(u).$$

Следовательно, согласно (2),

$$G(x, \gamma, 0, H)=G(x, \gamma', 0, M) * G(x, \gamma-\gamma', 0, N), \tag{9}$$

где в качестве γ' мы можем брать любое вещественное число. Для доказательства утверждения леммы нам достаточно доказать абсолютную непрерывность б. д. з. $G(x, \gamma', 0, M)$. Положим теперь для каждого $r>0$

$$M^{<r>}(u)=\begin{cases} M(u), & \text{если } M(u)\leqslant r \\ r, & \text{если } M(u)>r \end{cases}; \quad M_1^{<r>}=M-M^{<r>}.$$

Легко убедиться, что функции $M^{<r>}$ и $M_1^{<r>}$ являются с. ф. некоторых б. д. з. Поэтому, привлекая вновь свойство (2), мы получаем

$$G(x, \gamma', 0, M)=G(x, \gamma', 0, M^{<r>}) * G(x, \gamma', 0, M_1^{<r>}). \tag{10}$$

Х. ф. $f_r(t)$, соответствующая первой компоненте, имеет вид

$$f_r(t)=\exp\left\{it\gamma'+\int_{-\infty}^{0}(e^{itu}-1-it\sin u)\,dM^{<r>}(u)\right\}.$$

Параметр γ' оставался до сих пор в нашем распоряжении, поэтому мы вправе выбрать

$$\gamma'=\int_{-\infty}^{0}\sin u\,dM^{<r>}(u),$$

после чего вид х. ф. $f_r(t)$ упростится:

$$f_r(t)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{0}(e^{itu}-1)\,dM^{<r>}(u)\right\}=\exp\left\{r\int(e^{itu}-1)\,dQ_r(u)\right\}.$$

Стоящая в правой части последнего равенства функция $Q_r(u)$ определяется условиями

$$Q_r(u)=\begin{cases}\frac{1}{r}M^{<r>}(u), & \text{если } u<0\\ 1, & \text{если } u\geqslant 0\end{cases}$$

и представляет собой, в силу условий леммы, абсолютно непрерывную функцию распределения.

Нетрудно заметить, что х. ф. соответствует некоторому обобщенному пуассоновскому распределению А. Я. Хинчина и потому ф. р. $G(x, \gamma', 0, M^{<r>})$ представима в виде ряда

$$\begin{aligned}G(x, \gamma', 0, M^{<r>})&=e^{-r}E(x)+e^{-r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}Q_r^{n*}(x)=\\&=e^{-r}E(x)+(1-e^{-r})F_r(x),\end{aligned} \tag{11}$$

где E — несобственное распределение и F_r — некоторая абсолютно непрерывная ф. р. (последнее следует из отмеченного выше свойства абсолютной непрерывности функции Q_r).

Обозначим для краткости

$$\Psi_r(x)=G(x, \gamma', 0, M_1^{<r>})*G(x, \gamma-\gamma', 0, N).$$

Тогда имеем на основании (9), (10) и (11)

$$G(x, \gamma, 0, H)=e^{-r}\Psi_r+(1-e^{-r})F_r*\Psi_r. \tag{12}$$

Напомним, что свертка $F_r*\Psi_r$ представляет собой вновь абсолютно непрерывную ф. р., а число r может быть выбрано сколь угодно большим.

Хорошо известно, что каждая ф. р., а, следовательно, и ф. р. (12) может быть разложена в суперпозицию абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной ф. р. с неотрицательными весами:

$$G(x, \gamma, 0, H)=a_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}(x)+a_{\mathrm{II}}G_{\mathrm{II}}(x)+a_{\mathrm{III}}G_{\mathrm{III}}(x).$$

Формула (12) показывает, что дискретная и сингулярная составляющие функции G входят в состав Ψ_r и потому сумму $a_{\mathrm{II}}+a_{\mathrm{III}}$ можно оценить сверху: $a_{\mathrm{II}}+a_{\mathrm{III}}\leqslant e^{-r}$. Неотрицательность весов и произвольность r приводит нас к заключению $a_{\mathrm{II}}=a_{\mathrm{III}}=0$, т. е., что G — абсолютно непрерывна.

Лемма 2. *В классе L неравные тождественно нулю с. ф. неограниченны, выпуклы на* $(-\infty, 0)$ *и вогнуты на* $(0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $H(u)\not\equiv 0$ на полуоси $u<0$. Тогда на основании свойств а) и д) функция $uH'(u)$ в некоторой точке u_0 принимает отрицательное значение $\beta=u_0H'(u_0)$ и в интервале $(u_0, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$uH'(u)\leqslant\beta,$$

из которого интегрированием получаем неравенство

$$H(u)=H(u_0)+\int_{u_0}^{u}H'(x)\,dx\geqslant H(u_0)+\left|\beta\log\frac{u_0}{u}\right|,$$

доказывающее неограниченность с. ф. Кроме того, невозрастание функции $S(u)=uH'(u)$ приводит к убыванию функции $H'(u)=\frac{S(u)}{u}$ на полуоси $u>0$, и возрастанию той же функции на полуоси $u<0$ при возрастании u, что равносильно вогнутости (соответственно, выпуклости) с. ф. $H(u)$.

Очевидным следствием леммы 2 является отсутствие у с. ф. любого L-б. д. з. конечных интервалов постоянства и ее абсолютная непрерывность.

Утверждение теоремы 2 является, очевидно, частным случаем более общего утверждения леммы 1, если принять во внимание лемму 2.

3. Достаточные условия различных свойств гладкости ф. р. законов класса L

Как мы видели по лемме 1, абсолютная непрерывность с. ф. (вместе с неограниченностью) обеспечивает абсолютную непрерывность ф. р. Обратное заключение, вообще говоря, неверно. Это объясняется тем, что на гладкость ф. р., кроме гладкости с. ф., влияет также наибольший порядок роста с. ф. в нуле (при одностороннем приближении к нулю).

Далее проводится частичное исследование эффекта такого влияния. При этом мы, как и в пункте 2, можем ограничиться случаем $\sigma^2=0$ (для наших рассуждений будет удобным, кроме того, считать $\gamma=0$).

Лемма 3. *Пусть $f(t)$ — х. ф. произвольного L-б. д. з. Тогда при $|t|\to\infty$ функция $|f(t)|=|f(|t|)|$ монотонно стремится к нулю.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $|f(t)|\to 0$ при $|t|\to\infty$. Поэтому нам остается доказать монотонность изменения этой функции.

По формуле (3) в случае L-б. д. з. $(\sigma^2=0)$

$$u(t)=-\log|f(t)|=\int_0^\infty (1-\cos tx)\, J'(x)\,dx.$$

Дифференцируя по t функцию $u(t)$, получаем

$$u'(t)=\int_0^\infty \sin tx\cdot xJ'(x)\,dx.$$

Но интеграл, стоящий справа, неотрицателен, т. к. функция $xJ'(x)$ согласно свойству д), не возрастает с ростом x.

Введем следующее обозначение

$$I(v)=\frac{1}{v^2}\int_0^{|v|} u^2\,dJ(u).$$

Лемма 4. *Для общего случая б. д. з. имеют место следующие оценки функции $u(t)$ (считаем $\sigma^2=0$):*

$$2\sin^2\frac{\lambda}{2}\cdot I\left(\frac{\lambda}{t}\right)\leqslant u(t)\leqslant\frac{\lambda^2}{2}\, I\left(\frac{\lambda}{t}\right)+2\left|J\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right|, \tag{13}$$

где $0<\lambda\leqslant\pi$ — произвольное число.

Доказательство. Разобьем интеграл, выражающий в (3) функцию $u(t)$ на две части (считаем $t>0$):

$$u(t)=\int_0^{\lambda/t}(1-\cos tx)\,dJ(x)+\int_{\lambda/t}^\infty (1-\cos tx)\,dJ(x)=u_1+u_2.$$

Воспользуемся элементарным неравенством, действующим в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $\frac{\sin\lambda'}{\lambda'} \geqslant \frac{\sin\lambda''}{\lambda''}$ для $\lambda' \leqslant \lambda''$:

$$2\sin^2\frac{\lambda}{2}\, I\left(\frac{\lambda}{t}\right) \leqslant u_1(t) = 2\int_0^{\lambda/t} \sin^2\frac{xt}{2}\, dJ(x) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}\, I\left(\frac{\lambda}{t}\right).$$

Вместе с очевидной оценкой u_2:

$$0 \leqslant u_2(t) = \int_{\lambda/t}^{\infty} (1-\cos tx)\, dJ(x) \leqslant 2\left|J\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right|$$

это неравенство доставляет нам оценку (13).

Замечание 1. Функция $|J(v)|$, очевидно, всегда не возрастает. В случае L-б. д. з. то же самое можно утверждать в отношении $I(v)$. Действительно,

$$I'(v) = \frac{1}{v}\int_0^1 u^2 d\,[uv\, J'(uv)] < 0,$$

поскольку функция $uv\,J'(uv)$, согласно свойству д) является невозрастающей функцией переменного u.

Замечание 2. Верхняя оценка (13) позволяет, привлекая свойство в) с. ф., получить интересное заключение о характере роста функции $u(t)$ в общем случае б. д. з.

Именно, что при $|t| \to \infty$

$$u(t) = \frac{\sigma^2}{2}\, t^2 + o(t^2). \tag{14}$$

Из двух оценок (13) при исследовании свойств гладкости ф. р. б. д. з. наиболее важной является нижняя оценка, с помощью которой мы получаем оценку сверху для модуля х. ф. Это обстоятельство оправдывает построение более точных нижних оценок в случае L-б. д. з.

Лемма 5. *Справедлива следующая оценка функции $u(t)$ для любого L-б. д. з. (считаем $\sigma^2 = 0$):*

$$u(t) \geqslant \begin{cases} K(\lambda)\cdot \Lambda J'(\Lambda)\,(\Lambda t)^2, & \text{если } \Lambda|t| \leqslant \lambda \leqslant \pi \\ \Lambda J'(\Lambda)\log\Lambda|t|, & \text{если } \Lambda|t| \geqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{15}$$

где $K(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\lambda} \frac{1-\cos x}{x}\,dx$ *и Λ — произвольное положительное число.*

Доказательство. Достаточно ограничиться разбором случая положительных t

$$u(t) = \int_0^{\infty} (1-\cos tx)\, J'(x)\, dx \geqslant \int_0^{\Lambda} \frac{1-\cos tx}{x}\, xJ'(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \Lambda J'(\Lambda)\int_0^{\Lambda t} \frac{1-\cos x}{x}\, dx = K(\Lambda t)\,\Lambda J'(\Lambda)\,(\Lambda t)^2,$$

поскольку функция $xJ'(x)$ — невозрастающая. Нетрудно проверить, что $K(v)$ монотонно убывает в интервале $(0, \pi)$, поэтому для $\Lambda t \leqslant \lambda \leqslant \pi$

$$K(\Lambda t) \geqslant K(\lambda).$$

С другой стороны, при $\Lambda t \geqslant \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_0^{\Lambda t} \frac{1-\cos x}{x}\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\Lambda t} \geqslant \frac{\pi^2}{4} K\left(\frac{\pi}{2}\right) - \log\frac{\pi}{2} + \log \Lambda t.$$

Непосредственные подсчеты показывают, что

$$\frac{\pi^2}{4} K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}55 \ldots > \log\frac{\pi}{2} = 0{,}45 \ldots,$$

откуда и получается второй случай оценки (15).

Замечание. Обратим внимание на два частных случая неравенства (15).

1) Положим $\Lambda = \frac{\lambda}{t}$, тогда $(\lambda \leqslant \pi)$:

$$u(t) \geqslant \lambda^2 K(\lambda)\, \frac{\lambda}{t}\, J'\left(\frac{\lambda}{t}\right). \tag{15а}$$

2) Выберем $\Lambda = \frac{1}{\log t}$.

Тогда для значений $t > e$ имеем

$$u(t) \geqslant \frac{1}{\log t}\, J'\left(\frac{1}{\log t}\right) \cdot \log\frac{t}{e}. \tag{15б}$$

Нижняя оценка (15) с учетом свойств L — б. д. з. дает

$$u(t) \geqslant 2\sin^2\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{t}\, J'\left(\frac{\lambda}{t}\right) \geqslant \sin^2\frac{\lambda}{t}\, \frac{\tilde{\lambda}}{2}\, I'\left(\frac{\lambda}{t}\right),$$

что ненамного отличается от (15а), т. к. $\lambda^2 K(\lambda) > \sin^2\frac{\lambda}{2}$.

Лемма 6.

1. *Пусть L — б. д. з. принадлежит некоторому подклассу $\mathfrak{L}_\mu$, тогда*

$$u(t) \sim \mu \log t \text{ при } t \to \infty, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &H(x) \sim \mu^+ \log x \text{ при } x \to 0+0, \\ &H(x) \sim -\mu^- \log|x| \text{ при } x \to 0-0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

2. *Если же L — б. д. з. принадлежит подклассу $\mathfrak{L}_\omega$, то*

$$\frac{u(t)}{\log t} \to \infty \text{ при } t \to \infty,$$

$$\frac{J(x)}{\log|x|} \to \infty \text{ при } x \to 0.$$

Доказательство. Легко проверить справедливость оценки

$$u(t) \leqslant \int\limits_0^1 \frac{1-\cos tx}{x}\, xJ'(x)\, dx + 2\,|J(1)| \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_0^t \frac{1-\cos x}{x}\, dx + 2\,|J(1)| = \mu \log t + O(1).$$

Если привлечь теперь (15б), то оценка снизу для $u(t)$ примет вид $u(t) \geqslant \mu \log t - o(\log t)$.

Оба неравенства дают (16). Асимптотическая формула для с. ф. при $x \to 0+0$ получается из очевидных неравенств

$$qH'(q)\log\frac{q}{x} \leqslant \int_x^q dH(u) = \int_x^q uH'(u)\,\frac{du}{u} \leqslant \mu^+ \log\frac{q}{x},$$

в которых $q=q(x)$ следует выбирать настолько медленно убывающей к нулю при $x \to 0+0$, что

$$\int_x^q dH(u) = -H(x)+H(q) = -H(x)\big(1+o(1)\big)$$

и, кроме того, $\log q = o(\log x)$.

Второе из асимптотических выражений (17) доказывается аналогично.

Утверждения леммы, касающиеся подкласса $\mathfrak{L}_\omega$, являются следствием ее первой части, так как с. ф. H в этом случае допускает представление в виде суммы с. ф. $H=H_\mu+\tilde{H}_\mu$, в которой H_μ — с. ф. некоторого L—б. д. з. из подкласса $\mathfrak{L}_\mu$ и $\tilde{H}_\mu$ — какая-то с. ф. б. д. з. Такое разложение получается, например, если положить

$$xH'_\mu(x) = \begin{cases} \mu, & \text{для } xH'(x) \geqslant \mu \\ xH'(x), & \text{для } |xH'(x)| < \mu \\ -\mu, & \text{для } xH'(x) \leqslant -\mu \end{cases}$$

и

$$x\tilde{H}'_\mu(x) = xH'(x) - xH'_\mu(x).$$

Лемма, тем самым, доказана.

Сделаем несколько замечаний о проведенном нами разбиении L—б. д. з. на подклассы. В работе автора [3] приводится классификация всех б. д. з. по другим признакам. Именно

Группу A составляют б. д. з., для которых $\sigma^2=0$ и

$$\mathfrak{J}_1 = \int'_{|u|\leqslant 1} |u|\,dH(u) < \infty.$$

Группу B образуют б. д. з., для которых $\sigma^2>0$ или же

$$\mathfrak{J}_1=\infty, \text{ но } \mathfrak{J}_2 = \int_{|u|>1} |u|\,dH(u) < \infty.$$

Группу C составляют все оставшиеся б. д. з. (для них, непременно, $\sigma^2=0, \mathfrak{J}_1=\mathfrak{J}_2=\infty$).

Нам важно отметить для дальнейшего следующие два обстоятельства.

1) Все L—б. д. з. подклассов L_μ входят в группу A, т. к. для них

$$\mathfrak{J}_1 = \int_0^1 uJ'(u)\,du \leqslant \mu < \infty. \tag{18}$$

2) Х. ф. б. д. з. группы A может быть записана в следующем виде (это объясняется в [3]):

$$\log f(t) = it\gamma + \int' (e^{itu}-1)\,dH(u). \tag{19}$$

Б. д. з. со значением $\gamma=0$ мы называем *несмещенными*. Именно такие несмещенные законы будут рассматриваться в теоремах 3 и 4 в тех случаях, когда они будут принадлежать группе A.

Теорема 3

1. *Пусть $\mu>1$ и $g(x)$ — плотность L—б. д. з. из подкласса $\mathfrak{L}_\mu$. Тогда во всех точках, за исключением, быть может, одной, плотность $g(x)$ имеет не менее $n(\mu)$ производных, принимающих конечные значения, где*

$$n(\mu)=\begin{cases} \mu-1, & \text{если } \mu \text{ — целое число,} \\ [\mu], & \text{если } \mu \text{ — дробное число.}\end{cases}$$

2. *Плотности $g(x)$ из подкласса $\mathfrak{L}_\omega$ во всех точках вещественной оси имеют производные любых порядков, принимающие конечные значения.*

Доказательство. Существование плотности $g(x)$ установлено для всех L—б. д. з. теоремой 2. Монотонность модуля х. ф. (см. лемму 1) позволяет записать эту плотность с помощью формулы обращения

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-itx-u-iv}\,dt, \tag{20}$$

где

$$u=-\operatorname{Re}\log f(t),\quad v=-\operatorname{Im}\log f(t).$$

Преобразуем (20), используя интегрирование по частям,

$$xg(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int e^{-itx-u-iv}(u'+iv')\,dt. \tag{21}$$

Откуда

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big(xg(x)\Big)=\frac{(-i)^{k-1}}{2\pi}\int e^{-itx-u-iv}\,t^{k-1}(tu'+itv')\,dt. \tag{22}$$

Это формальное дифференцирование будет оправдано, если, например, будет сходиться интеграл

$$D_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-u}t^{k-1}(\,|tu'|+|tv'|\,)\,dt.$$

Из той же формулы мы получим, что

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\Big(xg(x)\Big)\right|\leqslant D_k,$$

и, следовательно, k-ая производная плотности будет конечна во всех точках, за исключением, быть может, $x=0$, если, конечно, $(k-1)$-ая производная плотности конечна во всех точках.

1. Начнем с разбора случая б. д. з. подкласса $\mathfrak{L}_\mu$. Как мы видели (18), в этом случае L—б. д. з. принадлежит группе A и потому функция v может быть записана в виде

$$v(t)=-t\gamma-\int{}' \sin tx\,dH(x),$$

а функция $u(t)$, согласно (3), всегда имеет вид

$$u(t)=\int{}'(1-\cos tx)\,dH(x).$$

В записи функции v мы можем не уменьшая общности считать $\gamma=0$ (такое предположение равносильно сдвигу распределения). Следовательно, произведения $tu'(t)$ и $tv'(t)$ можно будет представить в форме

$$tu'(t)=\int' (1-\cos xt)\, d[xH'(x)],$$

$$tv'(t)=-\int' \sin tx\, d[xH'(x)].$$

Поскольку для б. д. з. подкласса $\mathfrak{L}_\mu$ $\mathrm{Var}(xH')=\mu$, то отсюда немедленно получаем оценки

$$|tu'(t)|\leqslant 2\mu, \quad |tv'(t)|\leqslant \mu.$$

Таким образом,

$$D_k\leqslant \frac{3\mu}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-u(t)}t^{k-1}\,dt=\frac{3\mu}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-(\mu-k+1)\log t+o(\log t)\right\}dt.$$

Но последний интеграл сходится, если $\mu-k+1>1$, т. е. $k<\mu$. Величина $n(\mu)$ является как раз наибольшим целым числом, меньшим чем μ.

Так как для $1\leqslant k<\mu$:

$$g^{(k-1)}(x)\leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-u(t)}t^{k-1}\,dt<\infty, \tag{23}$$

и, кроме того,

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(xg(x)\right)=xg^{(k)}+kg^{(k-1)},$$

то для функции $xg^{(k)}(x)$ мы можем указать следующую оценку

$$|xg^{(k)}(x)|\leqslant \frac{4\mu}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-u(t)}t^{k-1}\,dt<\infty.$$

Неограниченность функции $g^{(k)}(x)$, как видно из этой оценки, допускается только в точке $x=0$.

3. Случай принадлежности L-б. д. з. подклассу $\mathfrak{L}_\omega$ более прост, поскольку для кратных производных плотности мы можем сразу же выписать оценку (23), опираясь на свойство (16а) леммы 6.

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием неограниченности плотности $g(x, H)$ L-б. д. з. является $\mu=\mathrm{Var}(xH')<1$ или же $\mu=\mathrm{Var}\left(xH'(x)\right)=1$ и $\Theta=\mathrm{Var}(|xH'|)<1$.*

При этом плотность $g(x)$ неограниченна только в одной точке (для несмещенных L-б. д. з. такой точкой будет $x=0$).

Доказательство. Достаточно рассматривать L-б. д. з. из подклассов $\mathfrak{L}_\mu$. Если $\mu>1$, то из оценки (23) при $k=1$ получаем ограниченность плотности g во всех точках вещественной оси. Если же $\mu\leqslant 1$, то запись плотности (21) приводит нас, как и в теореме 3, к следующей оценке

$$|xg(x)|\leqslant \frac{1}{\pi}e^{-u(1)}+\frac{|x|}{\pi}\int\limits_0^1 e^{-u}\,dt+\frac{3\mu}{\pi}\int\limits_1^\infty e^{-u}\frac{dt}{t}.$$

Это доказывает ограниченность плотности во всех точках, за исключением $x=0$.

Вместе с тем, при $\mu \leqslant 1$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-u-iv-itx}\, dt. \tag{24}$$

Так как в случае принадлежности $g(x)$ к $\mathfrak{L}_\mu$

$$-\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \int \frac{\sin x}{x} \left[\frac{x}{t} H'\left(\frac{x}{t}\right)\right] dx = \frac{\pi}{2}(\mu^+ - \mu^-) = \frac{\pi}{2}\Theta,$$

то интеграл (24) будет сходиться или расходиться одновременно с интегралом

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-u(t)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\Theta - tx\right) dt,$$

а последний неограничен при $x \to 0$, когда $\mu < 1$ или же $\mu = 1$ и $\Theta < 1$, как это легко заметить по свойству (16). Строение неограниченных L-б. д. з. можно обрисовать еще полнее, как показывает следующая теорема.

Теорема 5. *Если $\mu \leqslant 1$, то L-б. д. з. подклассов $\mathfrak{L}_\mu$ — одновершинны, причем у несмещенных L-б. д. з. максимум находится в точке $x = 0$.*

Доказательство. Используем критерий одновершинности А. Я. Хинчина. Именно, если $f(t)$ — х. ф., то соответствующее ей распределение будет одновершинно (с вершиной в точке $x = 0$) тогда и только тогда, когда функция $\psi(t) = tf'(t) + f(t)$ будет х. ф. некоторого закона распределения.

Мы рассматриваем несмещенные L-б. д. з. подкласса $\mathfrak{L}_\mu$ с $\mu \leqslant 1$. Поэтому х. ф. $f(t)$ можно брать в форме

$$f(t) = \exp\left\{\int' (e^{itu} - 1)\, dH(u)\right\}.$$

Тогда функция $\psi(t)$ будет иметь вид

$$\psi(t) = \left[it \int e^{itu}\left(uH'(u)\right) du + 1\right] f(t) = \left[1 - \mu + \mu \int e^{itu}\, dF(u)\right] f(t),$$

где $F(u) = E(u) - \frac{1}{\mu} uH'(u)$ — некоторая функция распределения. Поскольку мы получили в квадратных скобках некоторую х. ф., то $\psi(t)$ — также будет х. ф. и, следовательно, $G(x, H)$ — одновершинна с вершиной в точке $x = 0$.

Перейдем теперь к более детальному изучению L-б. д. з. подкласса $\mathfrak{L}_\omega$. Напомним, что нами проводилось внутри этого подкласса дополнительное разбиение на подклассы $L(\omega)$ и $L(q)$. С подклассом $L(\omega)$ мы уже имели дело в теореме 1, а подклассом $L(q)$ с $q > 0$ мы займемся в следующей теореме.

Теорема 6. *Все L-б. д. з. из подкласса $L(q)$ являются аналитическими функциями в полосе $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} q$, причем константа $\frac{\pi}{2}$ в этом неравенстве является оптимальной.*

Утверждение теоремы, конечно, становится содержательным только для подкласса $L(q)$ со значением $q > 0$. При доказательстве теоремы мы будем использовать одну лемму.

Лемма 7. *Для L-б. д. з. из подкласса $L(q)$ имеет место следующее предельное соотношение*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{u(t)}{|t|} \geqslant \frac{\pi}{2} q. \tag{25}$$

Действительно, пусть $\underline{\lim}\, x^2 J'(x) = q$ $\Big($условие принадлежности к подклассу $L(q)\Big)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $x^2 J'(x) \geqslant q\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ в интервале $(0, \delta)$. Откуда для тех же ε и δ имеем

$$u(t) = \int_0^\infty (1 - \cos tx)\, dJ(x) \geqslant \int_0^{\delta|t|} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{x^2}{t^2} J'\left(\frac{x}{t}\right) dx \cdot |t| \geqslant$$

$$\geqslant q\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^{\delta|t|} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$$

При $|t| \to \infty$ интеграл в правой части неравенства стремится к нулю $\frac{\pi}{2}$ и, значит, найдется такое $T > 0$, что для $|t| > T$ этот интеграл будет не меньше, чем $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Следовательно, для $|t| > T$ можно утверждать, что

$$u(t) > \frac{\pi}{2}\, q(1 - \varepsilon)\, |t|.$$

Что и требуется для доказательства утверждения леммы.

Предельная оценка (25) лучше той, которую мы могли бы получить при тех же условиях из (15а). Такое улучшение объясняется тем, что (15а) было получено для всех, без исключения, L — б. д. з. Обратимся теперь к доказательству самой теоремы.

Проведем аналитическое продолжение плотности, представленной формулой обращения (20) с оси x в комплексную плоскость $z = x + iy$. Такое продолжение выполнимо, по крайней мере, в той полосе $|y| < c$, для которой сходится интеграл

$$\int e^{ct - u(t)}\, dt.$$

Это соображение вместе с оценкой (25) очевидным образом доставляет нам доказательство первой части теоремы. Оптимальность константы $\frac{\pi}{2}$ легче всего установить путем построения примера. Рассмотрим устойчивое распределение с плотностью (закон Коши)

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}, \quad \lambda > 0.$$

Соответствующие ему с. ф. и х. ф. имеют вид

$$H(x) = -\frac{\lambda}{\pi x}, \quad f(t) = e^{-\lambda|t|}, \quad q = b(0) = \frac{2\lambda}{\pi}.$$

Явное выражение плотности позволяет заметить, что она имеет особенности (полюсы) в точках $i\lambda$ и $-i\lambda$. Следовательно, наибольшей полосой аналитичности для нее будет $|\operatorname{Im} z| < \lambda = \frac{\pi}{2}\, q$.

Замечание. Прием, использованный при доказательстве леммы 7, позволяет установить более общее чем (25) предельное соотношение для значений $\alpha > -1$:

$$\underline{\lim}_{|t| \to \infty} \frac{u(t)}{|t|^{1+\alpha}} \geqslant \frac{\pi}{2\Gamma(2+\alpha) \cos \frac{\pi}{2}\alpha}\, b(\alpha). \tag{25a}$$

Очевидным следствием (25а) является утверждение, что *каждый L—б. д. з., для которого $b(\alpha)>0$ при некотором $\alpha>-1$, имеет бесконечное число производных на всей оси.*

Особо отметим, что *все законы подкласса $L(\infty)$ представляют собой целые функции.* Это следствие теоремы 6 и вместе с теоремой 1 позволяет ставить вопрос о порядке и типе L—б. д. з., являющихся целыми функциями (при этом понятие типа, напомним, вводится только для целых функций конечного порядка).

4. Порядок и тип целых ф. р. законов класса L

Все теоремы данного раздела будут относиться к *симметричным* L—б. д. з., хотя это ограничение связано исключительно с применяемым методом и к существу вопроса, по-видимому, никакого отношения не имеет.

Теорема 7. *Пусть $G(x, H)-L$—б. д. з.*

1° *Если $\sigma^2>0$, то G является целой функцией порядка $\rho=2$ и типа $\tau=\frac{1}{\sigma^2}$.*

2° *Если $\sigma^2=0$ и для некоторого значения $0<\alpha<1$*

$$0<b(\alpha)\leqslant B(\alpha)<\infty, \tag{26}$$

то G является целой функцией порядка $\rho=1+\frac{1}{\alpha}$ и конечного типа τ, причем

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\left\{\frac{2\,\Gamma(2+\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\,\alpha}{\pi B(\alpha)}\right\}^{1/\alpha}\leqslant\tau\leqslant\frac{\alpha}{1+\alpha}\left\{\frac{2\,\Gamma(2+\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\,\alpha}{\pi b(\alpha)}\right\}^{1/\alpha}.$$

3° *Если G представляет собой такую целую функцию, что $B(\alpha)=0$ при любом значении $\alpha>0$, то ее порядок бесконечен.*

Доказательство. Так как из $b(\alpha)>0$ следует $b(0)=\infty$ и тем самым принадлежность L—б. д. з. к подклассу $L(\infty)$, то во всех трех частях теоремы нам не надо устанавливать целость распределения, а только произвести подсчет порядков и типов, с использованием хорошо известных формул. Именно,

$$\rho=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\log\frac{1}{|c_n|}},$$

$$\tau=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\,|c_n|^{\rho/n}}{\rho e}.$$

Здесь ρ и τ—соответственно порядок и тип целой функции $g(z)$, а c_n—коэффициенты ее разложения в ряд Маклорена $g(z)=\Sigma c_n z^n$.

Коэффициенты c_n получают явное выражение, если произвести разложение интеграла в формуле обращения для плотности $g(x)$ по степеням x:

$$c_n=\frac{(-i)^n}{2\pi n!}\int e^{-u(t)}\,t^n\,dt. \tag{27}$$

Для подсчета величин ρ и τ, очевидно, достаточно хорошо и просто оценить функцию $u(t)$, а затем и $|c_n|$.

1° Согласно (14), при $|t|\to\infty$ мы вправе функцию $u(t)$ записать в виде $\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2)$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $C>0$, что при всех t

$$\frac{\sigma^2}{2}(1-\varepsilon)t^2-C\leqslant u(t)\leqslant\frac{\sigma^2}{2}(1+\varepsilon)t^2+C.$$

Аналогичные оценки потребуются нам в двух других случаях теоремы.

2° Выберем произвольное $\delta>0$ и обозначим $\Delta=(0,\ \delta)$,

$$v=\inf_{x\in\Delta}\left(x^{2+\alpha}J'(x)\right),\quad V=\sup_{x\in\Delta}\left(x^{2+\alpha}J'(x)\right).$$

Условие (26) теоремы гарантирует в этом случае конечность и положительность величин v, V для достаточно малых δ. Вместе с тем, при уменьшении δ, очевидно, получаем, что

$$v\to b(\alpha),\quad V\to B(\alpha).$$

Проведем теперь оценку функции $u(t)$, привлекая выбранное нами δ и связанные с ним величины v, V:

$$u(t)=\int_0^\infty(1-\cos tx)\,J'(x)\,dx=\int_0^\delta+\int_\delta^\infty\leqslant V\int_0^{\delta|t|}\frac{1-\cos x}{x^{2+\alpha}}\,dx\,|t|^{1+\alpha}+$$
$$+2|J(\delta)|=V\cdot T(t)\,|t|^{1+\alpha}+R.$$

Совершенно аналогично,

$$u(t)\geqslant vT(t)\ |t|^{1+\alpha}.$$

Величина $T(t)$ зависит от $|t|$ и при $t\to\infty$ приближается к $a=\frac{\pi}{2}\left[\Gamma(2+\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right]^{-1}$. Следовательно, можно указать для любого $\varepsilon>0$ такое C, что при всех t

$$b(\alpha)\,a(1-\varepsilon)\,|t|^{1+\alpha}-C\leqslant u(t)\leqslant B(\alpha)\,a(1+\varepsilon)\,|t|^{1+\alpha}+C.$$

3° Условие $B(\alpha)=0$ обеспечивает конечность V при любых α и фиксированном δ (например, $\delta=1$), поэтому, как и в предыдущем случае, найдется такое C, что при всех t

$$u(t)\leqslant 2\,V\cdot a\,|t|^{1+\alpha}+\mathrm{C}.$$

Из двусторонних оценок функции $u(t)$ с помощью (27) мы можем теперь получить оценки величин $|c_n|$: для случая 1°,

$$\frac{e^{-c}}{2\pi}\left[\frac{\sigma^2}{2}(1+\varepsilon)\right]^{-\frac{n+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\leqslant|c_n|\leqslant\frac{e^{c}}{2\pi}\left[\frac{\sigma^2}{2}(1-\varepsilon)\right]^{-\frac{n+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

для случая 2°,

$$\frac{e^{-c}}{(1+\alpha)\pi}\left[aB(1+\varepsilon)\right]^{-\frac{n+1}{1+\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{1+\alpha}\right)}{\Gamma(n+1)}\leqslant|c_n|\leqslant\frac{e^{c}}{(1+\alpha)\pi}\left[ab(1-\varepsilon)\right]^{-\frac{n+1}{1+\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{1+\alpha}\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

В третьем случае нашей теоремы используется только нижняя оценка того же типа:

$$\frac{e^{-c}}{(1+\alpha)\pi}(2\,Va)^{-\frac{n+1}{\alpha+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{1+\alpha}\right)}{\Gamma(n+1}\leqslant|c_n|.$$

В свою очередь эти оценки позволяют оценить порядок и тип плотности (сверху и снизу в случае 1°, 2° и снизу в случае 3°). Соответствующие несложные подсчеты показывают, что в случае 1°

$$\rho=2,\ \left[\sigma^2(1+\varepsilon)\right]^{-1}\leqslant\tau\leqslant\left[\sigma^2(1-\varepsilon)\right]^{-1},$$

в случае 2°,

$$\rho=1+\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\alpha+1}\left[aB(1+\varepsilon)\right]^{-1/\alpha}\leqslant\tau\leqslant\frac{\alpha}{\alpha+1}\left[ab(1-\varepsilon)\right]^{-1/\alpha},$$

в случае 3°,

$$\rho\geqslant 1+\frac{1}{\alpha}.$$

Устремив теперь к нулю ε в первых двух случаях и α в последнем, мы приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Теорема охватывает далеко не все случаи даже среди симметричных L–б. д. з., так остается в стороне случай, когда полностью нарушается условие (26), т. е. $b(\alpha)=0$ и $B(\alpha)=\infty$ при всех положительных значениях α. Мы выделяем этот случай среди других, так как он представляет собой, по-видимому, один из наиболее трудных и темных вариантов, и его детальный анализ, несомненно, привел бы к созданию таких методов, которые позволили бы дать ответ на многие вопросы о строении L–б. д. з. Вместе с тем, хотя исследование строения б. д. з. представляет собой в целом сложную задачу, некоторые вопросы строения допускают иногда общее решение с привлечением крайне простых соображений. Примером такой ситуации может служить следующее утверждение.

Теорема 8. *Если ф. р. б. д. з. является целой функцией, то ее порядок не меньше 2.*

Эта теорема является, по сути дела, развитием тех соображений, которые привлекались в случае 1° предыдущей теоремы. Нетрудно заметить, что этот случай не использовал специфики законов класса L и потому фактически относился, как и теорема 1, к общему случаю б. д. з.

Итак, согласно (14), при $|t|\to\infty$ имеем

$$u(t)=\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ всегда найдется такое C, что при всех t будет иметь место следующая нижняя оценка х. ф.:

$$f(t)=|f(t)|\geqslant\exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^2+\varepsilon)t^2-C\right\}.$$

Как и в предыдущей теореме, такая оценка приводит нас к оценке снизу величин $|c_n|$, а, тем самым, и к нижней оценке порядка ρ, которая оказывается равной 2.

5. Заключение

Систематическое исследование строения б. д. з. как в отечественной, так и зарубежной литературе почти отсутствует.

Можно указать на работу J. Blum, M. Rosenblatt [1], в которой находятся необходимые и достаточные условия непрерывности (не абсолютной) б. д. з., на работу M. Fisz [4], где устанавливается непрерывность (не абсолютная) L—б. д. з. (это свойство является почти тривиальным следствием теоремы J. Blum, M. Rosenblatt [1]) и несколько более детальных исследований свойств устойчивых законов [7], [9], [10]*.

После того, как K. Chung [8] установил неодновершинность некоторых L—б. д. з., задача выделения условий одновершинности была решена только в отдельных случаях. Так A. Wintner [2] доказал, что симметричные L—б. д. з.—одновершинны, И. Ибрагимов и К. Чернин [5] доказали одновершинность устойчивых законов распределения. Однако никаких достаточных условий неодновершинности L—б. д. з. до настоящего времени нет. На существование конкретного примера неодновершинного L—б. д. з. указано И. А. Ибрагимовым [6]. Этим, собственно, и исчерпывается круг работ, посвященных строению законов класса L.

Класс устойчивых законов, можно считать, детально изучен в настоящее время. Следующим шагом в изучении строения б. д. з., естественно, должно быть изучение строения L—б. д. з. Настоящая работа показывает, что в рамках этого класса распределений следует ожидать весьма общих результатов при очень простых и прозрачных условиях. Мы сформулируем ниже несколько гипотез и задач, относящихся к вопросу строения L—б. д. з. В качестве гипотез будут сформулированы следующие предложения.

I. Рассмотрим некоторый L—б. д. з. из подкласса $\mathfrak{L}_\mu$ со с. ф. $H(u)$. Если H имеет во всех точках области определения $S \geqslant \mu$ конечных производных, то ф. р. $G(x, H)$ будет иметь во всех точках, за исключением быть может одной, не менее S конечных производных.

Это утверждение естественно относится только к законам подклассов $\mathfrak{L}_\mu$, поскольку все законы из $\mathfrak{L}_\omega$, как было нами доказано, имеют бесконечное число производных во всех точках. При доказательстве данной гипотезы, по-видимому, следует привлекать тот же метод, который был использован в теореме 2.

II. L— б. д. з., принадлежащие подклассу $\mathfrak{L}_\mu$, $\mu > 1$ и имеющие с. ф. $H(u)$ равную нулю вне некоторого конечного интервала $(0, l)$—неодновершинны.

Все односторонние L—б. д. з. подклассов L_μ с $\mu > 1$—неодновершинны.

III. Все результаты 4 пункта этой работы, посвященные подсчету порядков и типов целых функций, могут быть распространены на несимметричный случай без каких-либо дополнительных условий.

Укажем на один из возможных подходов в решении данной задачи. Пусть симметричный L—б. д. з. G является целой функцией и разлагается в композицию несимметричных законов вида

$$G(x) = G_1(x) * [1 - G_1(-x)]. \tag{28}$$

Нужно показать, что в этом случае: а) функция G_1 является целой и ее порядок ρ совпадает с порядком функции G, б) если порядок ρ конечен,

*В 1958 году автором была защищена кандидатская диссертация, посвященная аналитическим свойствам б. д. з. Один из разделов этой работы содержал исследование строения б. д. з. Полученные там результаты (автор не публиковал их, считая незавершенными) содержат в качестве частного случая теорему Blum, Rosenblatt [1] и теорему 2 данной работы.

то тип τ_1 функции G_1 связан с типом τ функции G следующим соотношением:

$$\tau_1 = \tau 2^{\rho-1}.$$

Если бы такая теорема была доказана, то проводя симметризацию исходного несимметричного L—б. д. з. G_1 по формуле (28) и привлекая уже доказанные теоремы пункта 4, мы получили бы решение поставленной задачи.

IV. Все L—б. д. з. групп B и C являются аналитическими во всех точках вещественной оси. Эта задача, в частности, предполагает изучение законов подкласса $L(0)$.

V. L—б. д. з. группы A не могут быть аналитическими на всей вещественной оси (при этом встречающаяся особенность, по-видимому, будет иметь характер ветвления).

В качестве частного случая здесь было бы интересно выяснить строение L—б. д. з., для которых при некотором $-1 < \alpha < 0$

$$0 < b(\alpha) \leqslant B(\alpha) < \infty.$$

В качестве самостоятельной задачи стоит выдвинуть вопрос о строении L—б. д. з. с особо нерегулярным поведением с. ф. Именно, для которых при любых $\alpha > 0$ имеем $b(\alpha) = 0$ и $B(\alpha) = \infty$.

Поступила в редакцию
29.XI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Blum, M. Rosenblatt, On the structure of infinitely divisible distributions, Pacific J. Math., v. 9, (1959) 1—7.
2. A. Wintner,
3. В. М. Золотарев, Закон двойственности в классе безгранично делимых законов, Труды Матем. Инст. АН СССР, т. 64, 1961, 52—60.
4. M. Fisz, On the Continuity of the L—Distribution Functions Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, v. 1 1962, 25—27.
5. И. А. Ибрагимов, К. Е. Чернин, Об одновершинности устойчивых законов, Теория вер. и ее прим., т. 4, вып. 4, 1959, 453—455.
6. И. А. Ибрагимов, Замечание о вероятностных распределениях класса L, Теория вер. и ее прим., т. 2, вып. 1, 1957, 121—124.
7. А. В. Скороход, Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, т. 98, № 5, 1954, 731—734.
8. K. L. Chung, Sur les lois des probabilités unimodales, Compt. Rend. Acad. Sci., v. 236, N 6, 1953, 583—584.
9. Ю. В. Линник, Об устойчивых вероятностных законах с показателем меньшим единицы, ДАН СССР, т. 94, № 4, 1954, 619—621.
10. В. М. Золотарев. Преобразования Меллина—Стильтьеса в теории вероятностей, Теория вер. и ее прим., т. 2, вып. 4, 1957, 444—469.

NEAPRĖŽTAI DALIŲ L—KLASĖS DĖSNIŲ ANALIZINĖ STRUKTŪRA

V. M. ZOLOTARIOVAS

(Reziumė)

Šiame straipsnyje nagrinėjamos įvairios neaprėžtai dalių dėsnių iš klasės L savybės, būtent, absoliutus tolydumas, diferencijuojamumas, analiziškumas, sąlygos, kada tankis aprėžtas, kada dėsnis vienviršūnis.

Įrodomos sekančios teoremos:

1. Kiekvienas L—klasės dėsnis yra absoliučiai tolydinis.

2. Būtina ir pakankama sąlyga, kad tankis būtų aprėžtas, yra, kad $\mathrm{Var}(xH'>1)$ arba $\mathrm{Var}(|xH'|)=\mathrm{Var}(xH')=1$.

3. Kiekvienas dėsnis, kuriam $\mathrm{Var}(xH')\leqslant 1$, yra vienviršūnis.

4. Esant gana plačioms sąlygoms, klasės L dėsniai turi išvestines ir net yra analiziniai. Iškaičiuojamos sveikų neaprėžtai dalių klasės L dėsnių pasiskirstymo funkcijų eilės ir tipai.

STRUCTURE OF THE INFINITELY DIVISIBLE LAWS OF L—CLASS

V. M. ZOLOTOREV (MOSCOW)

(Summary)

Different properties of the structure of the infinitely divisible laws of L—class. (L—i. d. d.) such as absolute continuity, multiple differentiability, analiticity, boundedness of density and unimodality are studied in this paper.

Following theorems are proved:

1. Every law of L—class is absolute continuous.

2. Necessary and sufficient conditions for the density to be bound are $\mathrm{Var}(xH')>1$ or $\mathrm{Var}(xH')=\mathrm{Var}(|xH'|)=1$.

3. Every law for which $\mathrm{Var}(xH')\leqslant 1$ is unimodal.

4. Under broad conditions L—i. d. d. are multiple differentiable and analitic.

Values of orders and types of integer L—i. d. d. are calculated.

At the end of the paper some hypotheses and problems concerning the subject of the whole work are formulated.