III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ЛЕММЫ ХУА ЛО-КЕНА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ*

В. КАЛИНКА

При решении проблемы Варинга-Гольдбаха в поле рациональных чисел важную роль играет одна лемма Хуа Ло-Кена [1], утверждающая, что число решений в целых рациональных числах x, y, $0<x$, $y<P$ уравнения

$$f(x_1)+\ldots+f(x_s)=f(y_1)+\ldots+f(y_s),$$

где $f(x)$ целозначный многочлен k – той степени, при $s>r(k)$ имеет порядок $\ll P^{2s-k}$, $r(k)$ – некоторая определенная функция от k.

В данной работе эта лемма распространяется на любые алгебраические поля. В дальнейшем намечается полученный результат применять при решении аддитивных задач в алгебраических полях.

1. Обозначения и постановка задачи

K – поле алгебраических чисел n-той степени, $K^{(i)}(i=1, 2, \ldots n)$ сопряженные алгебраические поля; r_1 из них $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ действительные и r_2 пар $K^{(r_1+l)}$, $K^{r_1+r_2+l}$ $(l=1, 2, \ldots, r_2)$ комплексно-сопряженные; ϑ-дифферента поля K, $N(\vartheta)=D$ (норма идеала), $(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)$ – базис ϑ^{-1}. Пусть γ-число алгебраического поля K, $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ – сопряженные алгебраические числа. Всегда $\vartheta\gamma=\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}_\gamma}$, где $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}_\gamma$ – целые идеалы. Идеал $\mathfrak{a}_\gamma$ будем называть знаменателем γ. Очевидно, $\mathfrak{a}_\gamma=(1, \gamma\vartheta)^{-1}$.

Вводится n – мерное эвклидово пространство X, состоящее из точек x с действительными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и элементом объема $dx=$ $=dx_1\cdot dx_2 \ldots dx_n$. Обозначаем

$$\xi^{(l)}=\rho_1^{(l)}x_1+\ldots+\rho_n^{(l)}x_n \qquad (l=1, 2, \ldots, n).$$

Если $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ – базис целых чисел в поле K, то выполняется матричное соотношение $(\omega_k^{(l)})^{-1}=\rho_l^k$. Для вектора n – мерного комплексного пространства $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$ вводим функции

$$S(\eta)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i, \quad N(\eta)=\prod_{j=1}^{n}\eta_j.$$

Обозначим k целое рациональное положительное число. Далее пусть $a=(2^{k-1}+n)^{-1}$, T – положительное число, удовлетворяющее условию $T^{2a}>$

---

* Настоящая статья уже печаталась, когда появилась работа О. Кёрнера в Math. Annalen 147, дающая при $k\geqslant 11$ лучшие результаты.

$>2D^{\frac{1}{n}}$, $\mathfrak{T}$ — множество чисел α в K, сопряженные которых удовлетворяют соотношениям $0<\alpha^{(i)}\leqq T$ $(i=1, 2, \ldots, r_1)$, $|\alpha^{(i)}|\leqq T$, $(i=r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$.

В дальнейшем будем считать $\varepsilon>0$, $\varepsilon_i>0$ $(i=1, 2, 3, 4)$ сколь угодно малыми фиксированными числами.

Теорема. *Число решений уравнения*

$$\alpha_1^k+\alpha_2^k+\ldots+\alpha_s^k=\beta_1^k+\beta_2^k+\ldots+\beta_s^k$$

в целых α_i β_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, *принадлежащих области* $\mathfrak{T}$, *при* $2s\geqq(2^{k-1}+n)nk$ *представляется формулой*

$$I_{2s}=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\Big|\sum_{\alpha\in\mathfrak{T}}\exp\left(2\pi i\,S\left(\alpha^k\xi\right)\right)\Big|^{2s}\ll T^{n(2s-k)},$$

где константа, входящая в символ $\ll$, *зависит только от* k, s *и параметров поля* K. *Решения берутся неассоциированные.*

Такой же результат может быть получен для уравнения

$$\sum_{i=1}^{s}f(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}f(\beta_i),$$

где $f(\alpha)$ — целозначный многочлен k-той степени.

Очевидно, что для $k=1$ теорема верна. Для доказательства теоремы при $k>1$ нам понадобится обобщенное разбиение Фарея, введенное К. Л. Зигелем [3].

2. Обобщенное разбиение Фарея

Обозначим $t=T^{1-a}$, $h=T^{k+a-1}$. Определим B_γ для каждого $\gamma\in K$ следующим образом:

$$B_\gamma=\left\{x;\ x\in X,\ N\left(\max(h|\xi-\gamma|,\ t^{-1})\right)\leqq N(\mathfrak{a}_\gamma^{-1})\right\}.$$

Очевидно, B_γ пусто при $N(\mathfrak{a}_\gamma)>t^n$. Зигель в [3] доказал две леммы, относящиеся к разбиению Фарея. Одна из них: если $\gamma\neq\delta$, то B_γ и B_δ не пересекаются. Другая относится к точкам, которые не принадлежат ни одному B_γ.

Пусть E единичный куб $0\leqq x_k\leqq 1$ $(k=1, 2, \ldots n)$ в пространстве X и E_0 — множество точек E, не принадлежащих ни одному B_γ. Выбираем полную систему несравнимых по модулю ϑ^{-1} чисел γ, для которых $N(\mathfrak{a}_\gamma)\leqq t^n$. Это множество обозначим Γ. Пусть G — группа преобразований некоторого множества в себя. Будем считать x и y эквивалентными относительно G, если существует преобразование в G, переводящая x в y. Множество M будем называть фундаментальным, если никакие две точки его неэквивалентны, и каждая точка пространства эквивалентна точке из M. Подмножества будут эквивалентны, если каждая точка одного подмножества будет эквивалентна точке другого подмножества и обратно. Множество переносов $\xi\to\xi+\rho$, где ρ число, принадлежащее к ϑ^{-1}, составляет группу H. Очевидно, E есть фундаментальное множество относительно H. Известно, что сумма всех B_γ, где γ пробегает множество Γ, эквивалентна $E-E_0$ относительно H.

Обозначая

$$f(x)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{T}}\exp\left(2\pi i\,S(\alpha^k\xi)\right),$$

получаем

$$I_{2s}=\sum_{\gamma}\int_{B_\gamma}|f(x)|^{2s}\,dx+\int_{E_0}|f(x)|^{2s}\,dx.$$

3. Оценка I_{2s} в E_0

Лемма 1.

$$\int_E|f(x)|^{2^\nu}\,d\alpha\ll T^{n(2^\nu-\nu)+\varepsilon_1},\quad 0<\nu\leqq k.$$

Доказательство. Соответствующая лемма в поле рациональных чисел доказана Хуа Ло-Кеном [1]. Для любых алгебраических полей лемма доказывается аналогично методом индукции. При $\nu=0$ результат тривиальный. Пусть лемма верна для ν, докажем для $\nu+1$ ($\leqq k$). Известно [3], что

$$|f(x)|^{2^\nu}\ll T^{n(2^\nu-\nu-1)}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\alpha}\exp\left(2\pi i\,S(\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_\nu\xi\mathop{\Delta}_{y_\nu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}\alpha^k)\right),$$

где $\mathop{\Delta}_{y}Q(x)=\frac{1}{y}\left(Q(x+y)-Q(x)\right)$ и суммирование распространяется по 2_ν условиям

$$\alpha+\lambda_{p_1}+\ldots+\lambda_{p_g}\in\mathfrak{T},$$

$$(1\leqq p_1<p_2<\ldots<p_g\leqq\nu,\ g=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu).$$

Оказывается, можно ограничиться $|\lambda_i|<2T$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$). Из

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\nu\xi\mathop{\Delta}_{y_\nu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}\alpha^k=0$$

следует либо $\lambda_\nu=0$ для определенного ν, либо

$$\mathop{\Delta}_{y_\nu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}\alpha^k=0.$$

Отсюда

$$|f(x)|^{2^\nu}\ll T^{n(2^\nu-1)}+T^{n(2^\nu-\nu-1)}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu,\alpha}^{*}\exp\left(2\pi i\,S(\lambda_1\ldots\lambda_\nu\xi\mathop{\Delta}_{y_\nu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}\alpha^k)\right),$$

где * означает условие

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\ldots\lambda_\nu\xi\mathop{\Delta}_{y_\nu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}\alpha^k\neq0.$$

Умножая полученное выражение на $|f(x)|^{2^\nu}$ и интегрируя в E, получаем

$$\int_E|f(x)|^{2^{\nu+1}}\,dx\ll T^{n(2^\nu-1)}\int_E|f(x)|^{2^\nu}\,dx+$$

$$+T^{n(2^\nu-\nu-1)}\int_E\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu,\alpha}^{*}\exp\left(2\pi i\,S(\lambda_1\ldots\lambda_\nu\xi\mathop{\Delta}_{y_\nu}\ldots\mathop{\Delta}_{y_1}\alpha^k)\right)|f(x)|^{2^\nu}\,dx.$$

По предположению индукции, первый член правой части равен

$$O(T^{n(2^\nu-1)}\cdot T^{n(2^\nu-\nu)+\varepsilon_1})=O(T^{n(2^{\nu+1}-(\nu+1))+\varepsilon_1}).$$

Второй член правой части рассматриваемого выражения равен

$$T^{n(2^{\nu}-\nu-1)}\int\limits_E \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_\nu,\alpha}^{*} \sum_{\mu_1,\ldots\mu_{2^k}} \exp\Bigl(2\pi i S\Bigl((\lambda_1 \ldots \lambda_\nu \underset{y_\nu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta}\alpha^k - \mu_1^k -$$

$$-\mu_2^k - \ldots - \mu_{2^{\nu-1}}^k + \mu_{2^{\nu}-1}^k + \ldots \mu_{2^\nu}^k)\xi\Bigr)\Bigr)dx = T^{n(2^\nu-\nu-1)}R,$$

где R число решений системы

$$\begin{cases} \lambda_1 \ldots \lambda_\nu \cdot \underset{y_\nu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta}\alpha^k = \mu_1^k + \ldots + \mu_{2^{\nu-1}}^k - \ldots - \mu_{2^\nu}^k \\ \lambda_1 \ldots \lambda_\nu \cdot \underset{y_\nu}{\Delta} \ldots \underset{y_1}{\Delta}\alpha^k \neq 0;\ \alpha,\ \lambda_i,\ \mu_j, \ll T. \end{cases}$$

При данных $\mu_1, \ldots, \mu_{2^k}$ число решений этой системы будет

$$d^\nu(\mu_1^k + \ldots + \mu_{2^\nu-1}^k - \ldots - \mu_{2^\nu}^k),$$

где символ d означает число делителей. Следовательно,

$$R \ll \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_{2^\nu}}^{**} d^\nu(\mu_1^k + \ldots + \mu_{2^\nu-1}^k - \ldots - \mu_{2^\nu}^k),$$

где ** означает условие $\mu_1^k + \ldots + \mu_{2^\nu-1}^k - \ldots - \mu_{2^\nu}^k \neq 0$. Как известно,

$$d(\alpha) \ll N(\alpha)^\varepsilon.$$

Значит,

$$R \ll \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_{2^\nu}} T^\varepsilon \ll T^{2^\nu+\varepsilon}.$$

Получаем, что

$$\int\limits_E |f(x)|^{2^\nu+1}\,dx \ll T^{n(2^{\nu+1}-(\nu+1))+\varepsilon},$$

и тем самым лемма доказана.

Лемма 2. (*См.* [3].) *При* $x \in E_0$

$$f(x) \ll T^{\varepsilon_2 + n\left(1-\frac{a}{n}\right)}.$$

Лемма 3. *При* $s > 2^{k-1}$

$$\int\limits_{E_0} |f(x)|^{2s}\,dx \ll T^{n(2s-k)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{E_0} |f(x)|^{2s}\,dx \leqq \sup_{x\in E_0} |f(x)|^{2s-2^k} \cdot \int\limits_{E} |f(x)|^{2^k}\,dx.$$

В силу лемм 1 и 2 следует

$$\int\limits_{E_0} |f(x)|^{2s}\,dx \ll T^{(2s-2^k)\left(\varepsilon_2+n\left(1-\frac{a}{n}\right)\right)}\,T^{n(2^k-k)+\varepsilon_1} \ll T^{n(2s-k)},$$

где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqq a$

4. Оценка I_{2s} в множествах B_γ

Лемма 4. (*См.* [3].) *Пусть* $x \in B_\gamma$ *и* $\zeta = \xi - \gamma$,

$$G(\gamma) = \frac{1}{N(\mathfrak{a}_\gamma)} \sum_{\mu \bmod \mathfrak{a}_\gamma} \exp\left(2\pi i\, S(\mu^k \gamma)\right),$$

$\eta = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots + \omega_n y_n$, $Y(T)$ *множество* $\eta^{(i)}$, *принадлежащих множеству* $\mathfrak{T}$ *в пространстве* X. *Тогда*

$$f(x) = G(\gamma) \int_{Y(T)} \exp\left(2\pi i\, S(\eta^k \zeta)\right) dy + O(T^{n-a}).$$

Лемма 5.

$$G(\gamma) \ll N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-\frac{1}{k}+\varepsilon_3}.$$

Лемма непосредственно получается из [2].

Лемма 6.

$$f^*(x) = G(\gamma) \int_{Y(T)} \exp\left(2\pi i\, S(\eta^k \zeta)\right) dy \ll N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-\frac{1}{k}+\varepsilon_3} N\left(\min\left(T,\ |\zeta|^{-\frac{1}{k}}\right)\right).$$

Доказательство. Оценку $G(\gamma)$ получаем из леммы 5. Далее, следуя Зигелю [3], положим:

$$T^{-1}\eta^{(i)} = u_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_1),$$
$$T^{-1}|\eta^{(i)}| = u_i,\ \arg \eta^{(i)} = \varphi_{i-r_1} \quad (i = r_1 + 1,\ \ldots,\ r_1 + r_2),$$
$$T^k \zeta = \tau.$$

Тогда функциональный определитель относительно

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{r_1+r_2},\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{r_2}$$

равен

$$D^{-\frac{1}{2}} T^n \prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} (2u_i).$$

Следовательно,

$$\int_{Y(T)} \exp\left(2\pi i\, S(\eta^k \zeta)\right) dy = D^{-\frac{1}{2}} T^n \prod_{i=1}^{r_1} \left(\int_0^1 \exp\left(2\pi i\, \tau^{(i)} u^k\right)\right) du \times$$
$$\times \prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} \left(2 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \exp(2\pi i \cdot 2\, |\tau^{(i)}|\, u^k \sin \varphi)\right) u\, du\, d\varphi.$$

Хорошо известно, что при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_1$

$$\int_0^1 \exp(2\pi i\, \tau^{(i)} u^k)\, du \ll \min\left(1,\ |\tau^{(i)}|^{-\frac{1}{k}}\right).$$

Далее, при $k > 2$, $i = r_1 + 1,\ r_1 + 2,\ \ldots,\ r_1 + r_2$ имеем

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \exp(2\pi i \cdot 2\, |\tau^{(i)}|\, u^k \sin \varphi)\, u\, du\, d\varphi =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} O\left(\min\left(1,\ |\tau^{(i)} \sin \varphi|^{-\frac{2}{k}}\right)\right) d\varphi \ll \min\left(1,\ |\tau^{(i)}|^{-\frac{2}{k}}\right),$$

а также при $k=2$

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \exp(2\pi i\, 2\,|\tau^{(i)}|\, u^2 \sin\varphi)\, u\, du\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(4\pi\,|\tau^{(i)}|\sin\varphi)}{4\pi\,|\tau^{(i)}|\sin\varphi}\, d\varphi \ll \min(1,\ |\tau^{(i)}|^{-1}).$$

Следовательно,

$$\int_{Y(T)} \exp\left(2\pi i\, S(\eta^k\zeta)\right) dy \ll N\left(\min(\tau,\ |\zeta|^{-\frac{1}{k}})\right),$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 7.

$$\sum_{\gamma} \int_{B_\gamma} |f(x)|^{2s}\, dx \ll T^{n(2s-k)}.$$

Доказательство. По леммам 5 и 6

$$f(x) \ll N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-\frac{1}{k}+\varepsilon_4} N\left(\min(T,\ |\zeta|^{-\frac{1}{k}})\right) + T^{n-a}.$$

Тогда

$$f(x)^{2s} \ll N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-\frac{2s}{k}+\varepsilon_4} N\left(\min(T^{2s}, \zeta^{-\frac{2s}{k}})\right) = T^{(n-a)\cdot 2s};$$

интегрируя полученное выражение в множествах B_γ и суммируя по всем $\delta \in \Gamma$, получаем

$$\sum_{\gamma} \int_{B_\gamma} |f(x)|^{2s}\, dx \ll \sum_{\gamma} N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-\frac{2s}{k}+\varepsilon_4} \int_{B_\gamma} N\left(\min(T^{2s},\ |\zeta|^{-\frac{2s}{k}})\right) dx + T^{n(2s-k)},$$

если только $2s \geqq \frac{nk}{a}$.

Оценим интеграл в B_γ:

$$\int_{B_\gamma} N\left(\min(T^{2s},\ |\zeta|^{-\frac{2s}{k}})\right) dx = T^{2sn} \int_{B_\gamma} N\left(\min(1,\ |\zeta T^k|^{-\frac{2s}{k}})\right) dx <$$

$$< T^{(2s-k)n} \int_X N\left(\min(1,\ |\zeta|^{-\frac{2s}{k}})\right) dx \ll T^{n(2s-k)}.$$

Так как ряд $\sum_{\gamma} N(\mathfrak{a}_\gamma)^{-\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon_4}$ сходится, то из предыдущих неравенств следует доказательство.

Леммы 3 и 7 доказывают теорему.

Автор выражает глубокую благодарность И. Кубилюсу за ценные советы при выполнении данной работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.V.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория чисел. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 1947, 22.
2. L. K Hua. Exponential Sums over an algebraic fields. Can. J. Math., 1951, 3, 44—51.
3. C. L. Siegel. Sums of m^{th} powers of algebraic integers. Ann. Math., 1945, 46, 313—339.

VIENOS HUA LOO-KENO LEMOS APIBENDRINIMAS ALGEBRINIŲ SKAIČIŲ KŪNE

V. KALINKA

(Reziumė)

Nagrinėjame n-tojo laipsnio algebrinių skaičių kūną K. $K^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sujungtiniai algebriniai kūnai; r_1 jų $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(r_1)}$—realūs ir r_2 poros $K^{(r_1+l)}$, $K^{(r_1+r_2+l)}$ $(l=1, 2, \ldots, r_2)$ kompleksiniai sujungtinių; aišku, $r_1+2r_2=n$. Pažymime raide $\mathfrak{T}$ aibę sveikųjų skaičių α, priklausančių kūnui K, kurių sujungtiniams galioja nelygybės $\alpha^{(i)}<T$ $(i=1, 2, 3, \ldots, r_1)$, a $|\alpha^{(i)}|<T$ $(i=r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$; $\alpha^{(i)}\in K^{(i)}$ ir $T^{2a}>2\left(N(\vartheta)\right)^{\frac{1}{n}}$ (ϑ kūno K diferenta).

Tegu I_{2s} pažymi lygties

$$\alpha_1^k+\alpha_2^k+\ldots+\alpha_s^k=\beta_1^k+\beta_2^k+\ldots+\beta_s^k$$

sprendinių $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ skaičių sveikais α_i, β_i, priklausančiais aibei $\mathfrak{T}$. Teoremoje įrodome, kad $I_{2s}\ll T^{n(2s-k)}$, jei $2s\geqq(2^{k-1}+n)\,nk$.

GENERALIZATION OF LOO KENG HUA'S LEMMA FOR AN ALGEBRAIC NUMBER FIELDS

V. KALINKA

(Summary)

Let K be an algebraic number field of degree n with r_1 real conjugates $K^{(1)}, \ldots K^{(r_1)}$ and r_2 pairs of conjugate complex conjugates $K^{(r_1+l)}$, $K^{(r_1+r_2+l)}$ $(l=1, 2, \ldots r_2)$, so that $r_1+2r_2=n$. We denote by $\mathfrak{T}$ the set of integers α in K with $\alpha^{(i)}<T$ $(i=1, 2, \ldots, r_1)$ and $|\alpha^{(i)}|<T$ $(i=r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$, where $\alpha^{(i)}$ is the conjugate of α in $K^{(i)}$, and $T^{2a}>2N(\vartheta)^{\frac{1}{n}}$ (ϑ—the differente of K).

Let I_{2s} be the number of $2s$—tuples $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s)$, which satisfy the following condition

$$\alpha_1^k+\alpha_2^k+\ldots+\alpha_s^k=\beta_1^k=\beta_2^k+\ldots+\beta_s^k,$$

where α_i, β_i are integers in $\mathfrak{T}$.

In the theorem we prove, that $I_{2s}\ll T^{n(2s-k)}$, if $2s\geqq(2^{k-1}+n)\,nk$.