III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕ НЕРАЗЛОЖИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ Z_8

А. МАТУЛЯУСКАС

Пусть $Z_m = \{a\}$ циклическая группа порядка m, A – целочисленная матрица, удовлетворяющая условию

$$A^m = E,$$

где E – единичная матрица. Гомоморфное отображение группы Z_m на группу $\{A\}$, определяемое соответствием

$$a \to A,$$

называется целочисленным представлением группы Z_m. Два представления этой группы

$$a \to A \text{ и } a \to A_1$$

считаются эквивалентными, если матрицы A и A_1 подобны и целочисленная матрица, осуществляющая это подобие, унимодулярна. Представление, эквивалентное представлению вида

$$a \to \begin{bmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{bmatrix},$$

где A_2, A_3 – квадратные целочисленные матрицы, называется разложимым.

Основные результаты по целочисленным представлениям конечных циклических групп были получены Дидерихсеном [1]. Он нашел все неразложимые представления циклических групп простого порядка, причем оказалось, что для таких групп существует лишь конечное число неразложимых представлений. В этой же его работе приведена следующая матрица представления группы Z_4

$$\begin{bmatrix} E_n & E_n & [01] \times I_n \\ & -E_n & [01] \times E_n \\ & & \Gamma \times E_n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\times$ – символ Кронекеровского произведения, E_n – единичная матрица, а I_n – жорданова клетка ($\lambda = 0$) указанных порядков. Дидерихсен доказал, что эта матрица неразложима преобразующей матрицей вида

$$T_1 = \begin{bmatrix} B & & \\ & C & \\ & & D \end{bmatrix}$$

(B, C, D — целочисленные унимодулярные матрицы порядков n, n и $2n$ соответственно и D перестановочна с $\Gamma\times E_n$), и поэтому пришел к выводу, что для группы Z_4 существуют неразложимые представления сколь угодно высокой степени. В 1961 г. автору этих строк удалось доказать разложимость матрицы (1) и найти ошибку в доказательстве Дидерихсена. Ошибка эта заключается в том, что указанное Дидерихсеном условие неразложимости матрицы является условием лишь необходимым, но недостаточным. В самом деле, матрица (1) разлагается на клетки, порядки которых не выше 4, если преобразовать ее матрицей $T_1 S_1$ [2], где S_1 — целочисленная матрица следующего вида

$$\begin{bmatrix} E_n & F & G \\ & E_n & H \\ & & E_{2n} \end{bmatrix}.$$

В 1962 г. были описаны все неразложимые представления группы Z_6, причем оказалось, что степени неразложимых представлений также не выше порядка группы [3].

Конечность числа классов неэквивалентных представлений для групп Z_p (p — простое число), Z_4 и Z_6 наводит на мысль, что этим свойством обладают и остальные циклические группы. Однако уже пример группы Z_8 показывает несостоятельность такого предположения, так как для этой группы можно указать неразложимые представления сколь угодно высокой степени. Мы покажем, что матрица

$$A=\begin{bmatrix} E_n & E_n & [01]\times I_n & & \\ & -E_n & & [0\ 0\ 0\ 1]\times E_n & \\ & & \Gamma\times E_n & \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_n & \\ & & & & \Delta\times E_n \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$\Delta=\begin{bmatrix} 0&0&0&-1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix},$$

а остальные буквы имеют тот же смысл, что и раньше, является матрицей такого неразложимого представления.

Сначала заметим, что матрица A удовлетворяет условию

$$A^8=E_{8n}$$

и поэтому задает представление группы Z_8. Известно [1], что если матрица A может быть разложена, то это можно достичь преобразующими матрицами двух следующих видов

$$T=\begin{bmatrix} I & & & \\ & K & & \\ & & L & \\ & & & M \end{bmatrix} \text{ и } S=\begin{bmatrix} E_n & X & Y & U \\ & E_n & & V \\ & & E_{2n} & W \\ & & & E_{4n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где I, K, L, M — целочисленные унимодулярные матрицы порядков n, n, $2n$, $4n$ соответственно, X, Y, U, V, W — целочисленные матрицы соответствующих размеров и

$$\left.\begin{aligned} L(\Gamma\times E_n)&=(\Gamma\times E_n)L \\ M(\Delta\times E_n)&=(\Delta\times E_n)M \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Из равенства

$$\begin{bmatrix} I & & & \\ & K & & \\ & & L & \\ & & & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & X & Y & U \\ & E_n & & V \\ & & E_{2n} & W \\ & & & E_{4n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_n & IXK^{-1} & IYL^{-1} & IUM^{-1} \\ & E_n & & KVM^{-1} \\ & & E_{2n} & LWM^{-1} \\ & & & E_{4n} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} I & & & \\ & K & & \\ & & L & \\ & & & M \end{bmatrix} \tag{5}$$

вытекает, что произведение любого числа таких матриц можно представить в виде произведения двух матриц вида (3). Для того, чтобы выяснить структуру матриц L и M, разобьём эти матрицы на квадратные клетки 2-го и 4-го порядков соответственно. Из условий перестановочности (4) следует, что все клетки матриц L и M будут выглядеть так

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ -l_2 & l_1 \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ -m_4 & m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_3 & -m_4 & m_1 & m_2 \\ -m_2 & -m_3 & -m_4 & m_1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Наряду с матрицами T и S введем в рассмотрение матрицу $\overline{T}$, которая получается из T следующим образом. Заменим в матрицах I и K все нечетные числа единицами, все четные — нулями, и обозначим полученные матрицы через $\overline{I}$ и $\overline{K}$. Далее заменим каждую клетку матриц L и M единичной или нулевой в зависимости от того, является ли сумма всех элементов первой строки заменяемой клетки нечетной или четной. Очевидно, получим две матрицы

$$E_2\times\overline{L} \text{ и } E_4\times\overline{M},$$

где $\overline{L}$ и $\overline{M}$ — некоторые матрицы порядка n, составленные из нулей и единиц. Теперь искомую матрицу $\overline{T}$ можно представить таким образом

$$\begin{bmatrix} \overline{I} & & & \\ & \overline{K} & & \\ & & E_2\times\overline{L} & \\ & & & E_4\times\overline{M} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Соответствие

$$T\to\overline{T}$$

является гомоморфизмом, а поэтому $\overline{T}$ в поле из двух элементов Π_2 имеет обратную, которая получается из T^{-1} указанным способом.

Преобразуем A матрицей T и найдем простейший вид, к которому можно привести IK^{-1}, $I([0\ \ 1]\times I_n)\,L^{-1}$, $K([0\ 0\ 0\ 1]\times E_n)\,M^{-1}$ и $L\left(\begin{bmatrix}0\,0\,0\,1\\0\,0\,0\,1\end{bmatrix}\times E_n\right)M^{-1}$, если преобразовать

$$TAT^{-1}=\begin{bmatrix} E_n & IK^{-1} & I([0\ \ 1]\times I_n)\,L^{-1} & \\ & -E_n & & K([0\ 0\ 0\ 1]\times E_n)\,M^{-1} \\ & & \Gamma\times E_n & L\left(\begin{bmatrix}0\,0\,0\,1\\0\,0\,0\,1\end{bmatrix}\times E_n\right)M^{-1} \\ & & & \Delta\times E_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

матрицей S. Очевидно, простейшим видом IK^{-1} будет матрица $\overline{N}$, составленная из нулей и единиц. Действительно, преобразующая матрица

$$\left[\begin{array}{c|c|c}
E_{\mu-1} & & \\ \hline
1 & \frac{n_{\mu\nu}-\delta}{2} & \\ \hline
E_{n-\mu+\nu-1} & & \\
 & 1 & \\
 & & E_{7n-\nu}
\end{array}\right]$$

переводит элемент $n_{\mu\nu}\in IK^{-1}$, удовлетворяющий условию

$$n_{\mu\nu}\equiv\delta\ (\mathrm{mod}\ 2), \tag{9}$$

где $\delta\in\Pi_2$, в элемент δ.

Для отыскания простейшей формы матриц $I([0\ 1]\times I_n)\,L^{-1}$ и $K([0\ 0\ 0 1]\times$ $\times E_n)\,M^{-1}$ разобьем каждую из них на n^2 прямоугольных клеток размеров 1×2 и 1×4 соответственно. Пусть $P_{\mu\nu}$ и $Q_{\mu\nu}$ — произвольные клетки матриц $I([0\ \ 1]\times I_n)\,L^{-1}$ и $K([0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]\times E_n)\,M^{-1}$. Положим

$$P_{\mu\nu}=[p_1\,p_2],$$
$$Q_{\mu\nu}=[q_1\,q_2\,q_3\,q_4].$$

Если

$$p_1+p_2\equiv\delta\ (\mathrm{mod}\ 2) \tag{10}$$

и

$$q_1+q_2+q_3+q_4\equiv\varepsilon\ (\mathrm{mod}\ 2),\ \ (\delta,\ \varepsilon\in\Pi_2), \tag{11}$$

то преобразующей матрицей

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
E_{\mu-1} & & & & \\ \hline
1 & Y & & & \\ \hline
E_{n-1} & & & & \\ \hline
1 & & & V & \\ \hline
E_{n-\mu+2(\nu-1)} & & & & \\
 & E_2 & & & \\
 & & E_{2(n+\nu-2)} & & \\
 & & & E_4 & \\
 & & & & E_{4(n-\nu)}
\end{array}\right],$$

где

$$Y=\left[\frac{p_1+p_2-\delta}{2},\quad \frac{-p_1+p_2-\delta}{2}\right],$$

а

$$V=\left[\frac{-q_1+q_2-q_3+q_4-\varepsilon}{2},\quad \frac{-q_1-q_2+q_3-q_4+\varepsilon}{2},\quad \frac{q_1-q_2-q_3+q_4-\varepsilon}{2},\right.$$
$$\left.\frac{-q_1+q_2-q_3-q_4+\varepsilon}{2}\right],$$

клетки $P_{\mu\nu}$ и $Q_{\mu\nu}$ приводятся к видам $[0\ \delta]$ и $[0\ 0\ 0\ \varepsilon]$. Следовательно, простейшими видами для $I([0\ 1]\times I_n)L^{-1}$ и $K([0\ 0\ 0\ 1]\times E_n)M^{-1}$ будут матрицы $[0\ 1]\times\bar{P}$ и $[0\ 0\ 0\ 1]\times Q$, где $\bar{P}$ и Q — некоторые квадратные матрицы над полем Π_2.

Переходя к рассмотрению матрицы $L\left(\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_n\right)M^{-1}$, разобьем ее на клетки размеров 2×4. Нетрудно убедиться в том, что элементы клетки

$$R_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}r_1&r_2&r_3&r_4\\r_5&r_6&r_7&r_8\end{bmatrix}(1\leqslant\mu,\ \upsilon\leqslant n)$$

удовлетворяют следующему сравнению

$$r_1+r_3+r_6+r_8\equiv r_2+r_4+r_5+r_7\equiv\delta\pmod 2.\quad(\delta\in\Pi_2)\tag{12}$$

Матрица

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}E_{2(n+\mu-1)}&&&&\\\hline&E_2&&W&\\\hline&&E_{2(n-\mu+2\nu-2)}&&\\&&&E_4&\\&&&&E_{4(n-\nu)}\end{array}\right],$$

где

$$W=\begin{bmatrix}\frac{-r_2+r_4+r_5-r_7-\delta}{2}&\frac{r_1+r_3-r_6+r_8+\delta}{2}&\frac{-r_2-r_4+r_5+r_7+\delta}{2}&\frac{r_1-r_3+r_6+r_8-\delta}{2}\\\frac{-r_1+r_3-r_6+r_8-\delta}{2}&\frac{-r_2+r_4-r_5+r_7-\delta}{2}&\frac{-r_1-r_3-r_6-r_8+\delta}{2}&\frac{-r_2-r_4+r_5-r_7+\delta}{2}\end{bmatrix},$$

преобразует $R_{\mu\nu}$ к виду $\begin{bmatrix}0&0&0&\delta\\0&0&0&\delta\end{bmatrix}$. К такому виду можно привести каждую клетку матрицы $L\left(\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_n\right)M^{-1}$, а поэтому простейший вид этой матрицы будет $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\bar{R}$, где $\bar{R}$ — матрица над полем Π_2. Следовательно, преобразующей матрицей S можно TAT^{-1} придать нижеуказанный вид

$$\begin{bmatrix}E_n&\bar{N}&[0\ 1]\times\bar{P}&*\\&-E_n&[0\ 0\ 0\ 1]\times\bar{Q}&\\&&\Gamma\times E_n&\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\bar{R}\\&&&\Delta\times E_n\end{bmatrix}.\tag{13}$$

Отметим, что к этому же виду приводится A и матрицей $\bar{T}$, если рассматривать $\bar{T}A\bar{T}^{-1}$ над полем Π_2. На самом деле, T и $\bar{T}$ переводят любую клетку матрицы A (предполагаем, что A разбита на клетки тех же размеров, что и TAT^{-1}) в клетки, элементы которых удовлетворяют одному и тому же сравнению из (9) – (12). Следовательно, соответствующие элементы (13) и $\overline{T}A\overline{T}^{-1}$, за исключением *, могут разниться только на четное число.

В силу линейной независимости строк матриц $\overline{N}$, $[0\ 0\ 0\ 1]\times\overline{Q}$ и $\overline{R}$ получаем, что $STA\,(ST)^{-1}$ может иметь вид

$$\begin{bmatrix}
E_i & & * & & * & & * & \\
 & E_{n-i} & & * & & * & & * \\
 & & -E_j & & & & * & \\
 & & & -E_{n-j} & & & & * \\
 & & & & \Gamma\times E_k & & * & \\
 & & & & & \Gamma\times E^{n-k} & & * \\
 & & & & & & \Delta\times E_l & \\
 & & & & & & & \Delta\times E_{n-l}
\end{bmatrix} \tag{14}$$

лишь тогда, когда $i=j=k=l$. Из линейной независимости вытекает также, что $\det\overline{N}\equiv\det\overline{Q}\equiv\det\overline{R}\equiv 1 \pmod 2$ и, значит, в поле Π_2 для $\overline{N}$, $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ существуют обратные. Следовательно, матрица

$$\begin{bmatrix}
\overline{Q}^{-1}\overline{N}^{-1} & & & \\
 & \overline{Q}^{-1} & & \\
 & & E_2\times\overline{R}^{-1} & \\
 & & & E_{4n}
\end{bmatrix} \tag{15}$$

преобразует (13) в этом поле к виду

$$\begin{bmatrix}
E_n & E_n & [0\ 1]\times\overline{P}_1 & * \\
 & -E_n & & [0\ 0\ 0\ 1]\times E_n \\
 & & \Gamma\times E_n & \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_n \\
 & & & \Delta\times E_n
\end{bmatrix}, \tag{16}$$

где $\overline{P}_1$ – некоторая целочисленная матрица. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться преобразующими матрицами вида $\overline{T}$ (см. ф. (7)).

При этом матрицы $\overline{I}$, $\overline{K}$, $\overline{L}$ и $\overline{M}$ должны быть так выбраны, чтобы в Π_2 имели место следующие равенства:

$$\overline{I}\,\overline{K}^{-1}=E_n, \tag{17}$$

$$\overline{K}\,\overline{M}^{-1}=E_n, \tag{18}$$

$$\overline{L}\,\overline{M}^{-1}=E_n. \tag{19}$$

Теорема. *Целочисленное представление 8 n-ой степени группы* Z_8

$$a\to A$$

неразложимо при любом натуральном n.

Докажем теорему от противного. Пусть в поле Π_2 существует невырожденная матрица $\bar{T}$, такая, что

$$\bar{T}A\bar{T}^{-1}=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
E_i & & E_i & & [0\ 1]\times Q_1 & & * & \\ \hline
 & E_{n-i} & & E_{n-i} & & [0\ 1]\times Q_2 & & * \\ \hline
 & & -E_i & & & & [0\ 0\ 0\ 1]\times E_i & \\ \hline
 & & & -E_{n-i} & & & & [0\ 0\ 0\ 1]\times E_{n-i} \\ \hline
 & & & & \Gamma\times E_i & & \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_i & \\ \hline
 & & & & & \Gamma\times E_{n-i} & & \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_{n-i} \\ \hline
 & & & & & & \Delta\times E_i & \\
 & & & & & & & \Delta\times E_{n-i}
\end{array}\right]$$

(Q_1 и Q_2 — некоторые матрицы над полем Π_2). Тогда из формул (17) — (19) и из равенства

$$\bar{I} I_n \bar{L}^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1 & \\ & Q_2\end{bmatrix}$$

получаем, что

$$\bar{L} I_n \bar{L}^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1 & \\ & Q_2\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Равенство (20) приводит нас к противоречию, так как матрица I_n неразложима в поле Π_2. В самом деле, минимальный многочлен этой матрицы совпадает с характеристическим и равен степени многочлена, неприводимого в Π_2, а такие матрицы неразложимы.

Таким образом, для циклической группы восьмого порядка существуют неразложимые представления сколь угодно высокой степени и, значит, число классов неэквивалентных представлений бесконечно.

Замечание. Точно таким же методом можно показать, что следующее представление группы Z_8

$$a\to\begin{bmatrix}
E_n & E_n & [0\ 1]\times I_n & \\
 & -E_n & & [0\ 0\ 0\ 1]\times E_n \\
 & & \Gamma\times E_n & \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times E_n \\
 & & & \Delta\times E_n
\end{bmatrix} \tag{21}$$

также является неразложимым при любом натуральном n.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
1.XII.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Diederichsen F. E. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz. „Abhand. Math. Sem. Univ. Hamburg", 1938, 13, 357—412.
2. Матуляускас А. О целочисленных представлениях циклических групп 4-го порядка. „Литовский матем. сборник", 1962, 11—1.
3. Матуляускас А. Целочисленные представления циклической группы 6-го порядка. „Литовский матем. сборник", 1962, 11—2.

GRUPĖS Z_8 NEIŠSKAIDOMŲ ATVAIZDAVIMŲ SKAIČIAUS KLAUSIMU

A. MATULIAUSKAS

(Reziumė)

1938 m. Diderichsenas [1] parodė, kad pirminės eilės ciklinės grupės sveikaskaičių neišskaidomų atvaizdavimų laipsniai nedidesni už grupės eilę. Apie kitokių eilių ciklinių grupių atvaizdavimus daugiau sužinota, tik pasirodžius darbui [2], kuriame įrodoma, kad Diderichseno nurodytas norimai aukšto laipsnio neišskaidomas grupės Z_4 atvaizdavimas (1) išsidėsto neaukštesnio kaip 4-jo laipsnio atvaizdavimais. Panašus rezultatas gautas, nagrinėjant Z_6 atvaizdavimus [3]. Čia neišskaidomų atvaizdavimų laipsniai neviršija 6. Visų paminėtų ciklinių grupių atvaizdavimų laipsniai, kaip matome, yra baigtiniai. Šiame darbe įrodoma, kad grupės Z_8 atvaizdavimo matrica (2) yra neišskaidoma kiekvienam natūriniam skaičiui n. Tokiu būdu, grupė Z_8 turi norimai aukšto laipsnio neišskaidomus atvaizdavimus.

ZUR FRAGE ÜBER DIE ANZAHL DER UNZERFÄLLBAREN DARSTELLUNGEN DER Z_8

A. MATULIAUSKAS

(Zusammenfassung)

Die Anzahl der ganzzahligen unzerfällbaren Darstellungen der zyklischen Gruppen Z_p (p-Primzahl), Z_4 und Z_6 ist endlich [1], [2], [3]. Dabei ist zu beachten, dass die von Diederichsen gegebene unzerfällbare Matrix (1), wie es aus dem [2] folgt, durch die Transformation mit einer unimodularen Matrix in unzerfällbare Diagonalkästchen zerfällt, deren Ordnungen höchstens gleich 4 sind. Ob es für andere zyklische Gruppen eine endliche oder unendliche Zahl der unzerfällbaren Darstellungen gibt, ist bisher unbekannt gewesen. In dieser Arbeit ist eine unzerfällbare Darstellung vom Grade 8 n (n-eine beliebige natürliche Zahl) konstruiert; daraus folgt, wie dieses Beispiel zeigt, dass für Z_8 unendlich viele unzerfällbaren Klassen vorhanden sind.