III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. МИТАЛАУСКАС

В случае нормального предельного закона известно асимптотическое разложение Г. Крамера [1] для характеристической функции нормированной суммы независимых случайных величин. После появления статьи В. М. Золотарева [2] стали известными идеи, приводящие к аналогичному разложению в случае любого устойчивого предельного закона; в [2] получено такое разложение для одинаково распределенных случайных величин.

Как это указано В. А. Статулявичюсом [3], в случае неодинаково распределенных случайных величин разложение Крамера по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$, вообще говоря, не оптимально, поэтому в [3] предлагается асимптотическое разложение по дробям Ляпунова. В настоящей заметке автором сделана попытка перенести этот результат для случая устойчивого предельного закона с $\alpha\neq 1$.

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

с функциями распределения $F_n(x)$ и характеристическими функциями $\varphi_n(t)$. Пусть $g_\alpha(t, \lambda)$ является характеристической функцией устойчивого закона $G_\alpha(x, \lambda)$ $(\alpha\neq 1)$:

$$g_\alpha(t, \lambda)=\exp\left\{-\lambda|t|^\alpha \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|)\operatorname{sgn} t\right]\right\}. \tag{2}$$

Обозначим

$$S_n=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j-A_n,$$

а характеристическую функцию нормированной суммы S_n через $f_n(t)$. Введем еще следующие обозначения:

$$\Omega_j(x)=F_j(x)-G_\alpha(x, \lambda_j),$$
$$\omega_j(t)=\varphi_j(t)-g_\alpha(t, \lambda_j),$$
$$\mu_j(m)=\int_{-\infty}^{\infty} x^m\, d\Omega_j(x),$$
$$\nu_j(p)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\,|d\Omega_j(x)|,$$

где

$$\lambda_j=\lambda\nu_j(\alpha),\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ p\geqslant 0,\ B_n=\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Теорема. *Пусть случайные величины* (1) *удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Существуют адсолютные „моменты“* $\nu_j(p)$ *до* r *порядка* ($\varkappa=1+[\alpha]\leqslant\leqslant k\leqslant r<k+1$), $j=1,\ 2,\ \ldots$;

2. $\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j(\alpha)=O\left(\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\right)$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}c_j^{\gamma}=0\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_j^{\gamma}(\alpha)\right)$, $1<\gamma\leqslant\frac{r}{\alpha}$

3. *„Дробь Ляпунова“* $L_{rn}=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j(r)}{B_n^r}\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Тогда в интервале

$$|t|\leqslant L_{rn}^{-\frac{1}{\varkappa}\frac{\varkappa-\alpha}{r-\alpha}}$$

имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$f_n(t)=g_\alpha(t,\ \lambda)\Big[1+\sum_{\substack{u\geqslant 0,\ s\geqslant 0,\ m\geqslant 1\\ u+(\varkappa-\alpha)m+s\alpha<r-\alpha}}\lambda^s q_n(u,\ s,\ m)\times$$

$$\times(it)^{u+\varkappa m}|t|^{\alpha s}L_{u+(\varkappa-\alpha)m+s\alpha+\alpha,\,n}+\theta_r\left(|t|^r+|t|^{\varkappa\frac{r-\alpha}{\varkappa-\alpha}}\right)L_{rn},\Big],\tag{3}$$

где коэффициенты $q_n(u,s,m)$ *равномерно ограничены относительно* n, *а* θ_r *равномерно ограничено относительно* n *и* t.

Доказательство. Неравенство Гельдера (см., напр. [4], теорема 210)

$$\int uv d\varphi<\left(\int u^{k'}d\varphi\right)^{\frac{1}{k'}}\left(\int v^{k''}d\varphi\right)^{\frac{1}{k''}},$$

где $\frac{1}{k'}+\frac{1}{k''}=1$, $k'>1$, при

$$u=|x|^{l\frac{k-\alpha}{l-\alpha}}\ (k<l),\quad v=|x|^{\alpha\frac{l-k}{l-\alpha}},$$

$$k'=\frac{l-\alpha}{k-\alpha},\ k''=\frac{l-\alpha}{l-k}\ \text{и}\ \varphi=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Omega_j(x)$$

дает

$$\sum_{j=1}^{n}\nu_j(k)<\left(\sum_{j=1}^{n}\nu_j(l)\right)^{\frac{k-\alpha}{l-\alpha}}\left(\sum_{j=1}^{n}\nu_j(\alpha)\right)^{\frac{l-k}{l-\alpha}}$$

или, после деления обеих частей на $B_n^k=B_n^{l\frac{k-\alpha}{l-\alpha}}\cdot B_n^{\alpha\frac{l-k}{l-\alpha}}$,

$$L_{kn}=O\left(L_{ln}^{\frac{k-\alpha}{l-\alpha}}\right),\ k<l).\tag{4}$$

Далее имеем

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}[\nu_j(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[\sum\limits_{j=1}^{n}c_j]^{\frac{1}{\alpha}}}\leqslant\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}[\nu_j(\varkappa)]^{\frac{1}{\varkappa}}}{B_n}\leqslant\frac{[\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j(\varkappa)]^{\frac{1}{\varkappa}}}{B_n}=L_{\varkappa n}^{\frac{1}{\varkappa}}\leqslant L_{rn}^{\frac{1}{\varkappa}\,\frac{\varkappa-\alpha}{r-\alpha}}\to 0$$

$$\text{при } n\to\infty. \tag{5}$$

Поэтому выполняются все условия работы В. М. Золотарева [5], и последовательность (1) удовлетворяет интегральной предельной теореме.

Преобразуем характеристическую функцию нормированной суммы таким образом:

$$f_n(t)=\prod_{j=1}^{n}\left[g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_j\right)+\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)\right]=g_\alpha(t,\ \lambda)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_j\right)}\right)\right\}.$$

Для $\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)$ находим

$$\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\frac{t}{B_n}}\,d\Omega_j(x)=\sum_{u=0}^{k-\varkappa}\frac{(it)^{\varkappa+u}}{(\varkappa+u)!}\,\frac{\mu_j(\varkappa+u)}{B_n^{\varkappa+u}}+R_j,$$

где

$$R_j=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\frac{itx}{B_n}}-\sum_{u=0}^{k-\varkappa}\frac{(itx)^{\varkappa+u}}{(\varkappa+u)!\,B_n^{\varkappa+u}}\right)d\Omega_j(x)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\min\left(\frac{|tx|^k}{k!\,B_n^k},\ \frac{|tx|^{k+1}}{(k+1)!\,B_n^{k+1}}\right)d\Omega_j(x)=$$

$$=\frac{|t|^r}{B_n^r}\int_{-\infty}^{\infty}\min\left(\frac{B_n^{r-k}}{k!\,|tx|^{r-k}},\ \frac{|tx|^{k+1-r}}{(k+1)!\,B_n^{k+1-r}}\right)|x|^r\,d\Omega_j(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|t|^r}{B_n^r}\left(\frac{1}{k!}\,\nu_j(r)+\frac{1}{(k+1)!}\,\nu_j(r)\right)=\theta_r\nu_j(r)\,\frac{|t|^r}{B_n^r}.$$

Далее имеем

$$g_\alpha^{-1}\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_j\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s\lambda_j^s}{s!}\,\frac{|t|^{\alpha s}}{B_n^{\alpha s}},$$

где

$$c=\exp\left[-i\,\frac{\pi}{2}\,\beta(1-|1-\alpha|)\operatorname{sgn}t\right],$$

поэтому

$$\frac{\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_j\right)}\quad\sum_{\substack{u\geqslant 0,\ s\geqslant 0\\ \varkappa+u+s\alpha<r}}\frac{c^s\lambda_j^s}{(\varkappa+u)!\,s!}\,\frac{\mu_j(\varkappa+u)}{B_n^{\varkappa+u+s\alpha}}\,(it)^{\varkappa+u}|t|^{\alpha s}+\theta_r\nu_j(r)\,\frac{|t|^r}{B_n^r}.$$

В интервале

$$|t|\leqslant\frac{[\sum\limits_{j=1}^{n}c_j]^{\frac{1}{\alpha}}}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}[\nu_j(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}}$$

и, как видно из неравенств (5), тем более в интервале $|t| \leqslant L_{rn}^{-\frac{1}{\varkappa}\frac{\varkappa-\alpha}{r-\alpha}}$ отношение $\dfrac{\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_j\right)}$ стремится к нулю, поэтому разложение логарифма законно; оно, а также дальнейшее суммирование по j от 1 до n дает

$$\sum_{j=1}^{n} \ln\left(1+\frac{\omega_j\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_j\right)}\right) \sum_{\substack{u\geqslant 0,\ s\geqslant 0\\ u+\varkappa+s\alpha<r}} \lambda^s C_n(u,\ s)\,(it)^{\varkappa+u}\,|t|^{\alpha s} L_{\varkappa+u+s\alpha,\,n}+\theta_r\,|t|^r L_{rn},$$

где

$$C_n(u,\ s)=\sum_{\substack{u_j\geqslant 0,\ s_j\geqslant 0,\ l\geqslant 1\\ u_1+\ldots+u_l=u+\varkappa\ (1-l)\\ s_1+\ldots+s_l=s}} \frac{(-1)^{l+1}}{l!}\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{l}\frac{c^{s_i}c_j^{s_i}\,\mu_j(\varkappa+u_i)}{(\varkappa+u_i)!\,s_i!\,\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j(\varkappa+u+s\alpha)},$$

который, очевидно, равномерно ограничен относительно n.

Рассмотрим функцию

$$V(z)=\ln\left[f^{\frac{1}{z^\alpha}}(tz)\,g_\alpha^{-1}(t,\ \lambda)\right]=$$

$$=\sum_{\substack{u\geqslant 0,\ s\geqslant 0\\ u+\varkappa+s\alpha<r}} \lambda^s C_n(u,\ s)\,(it)^{\varkappa+u}\,|t|^{\alpha s} L_{u+\varkappa+s\alpha,\,n}\, z^{u+\varkappa+s\alpha-\alpha}+\theta_r\,|t|^r z^{r-\alpha} L_{rn}, \qquad (6)$$

где действительное z изменяется в интервале $|z|\leqslant 1$. Подставляя в выражение

$$e^{V(z)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[V(z)]^m}{m!}$$

$V(z)$ из (6) и, собирая члены при одинаковых степенях z, получаем

$$e^{V(z)}=1+\sum_{\substack{u\geqslant 0,\ s\geqslant 0,\ m\geqslant 1\\ u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha<r-\alpha}} \lambda^s q_n(u,\ s,\ m)\,(it)^{u+\varkappa m}\,|t|^{\alpha s}\times$$

$$\times L_{u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha+\alpha,\,n}\,z^{u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha}+\theta_r\left(|t|^r+|t|^{\varkappa\frac{r-\alpha}{\varkappa-\alpha}}\right)|z|^{r-\alpha}L_{rn}, \qquad (7)$$

где

$$q_n(u,\ s,\ m)=\frac{1}{m!}\sum_{\substack{u_i\geqslant 0,\ s_i\geqslant 0\\ i=1,\ \ldots,\ m\\ u_1+\ldots+u_m=u\\ s_1+\ldots+s_m=s}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{m} C_n(u_i,\ s_i)\,L_{u_i+\varkappa+s_i\alpha,\,n}}{L_{u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha+\alpha,\,n}}$$

равномерно ограничено относительно n. Действительно, соотношенне (4) дает

$$L_{u_i+\varkappa+s_i\,\alpha,\,n}=O\left(L_{u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha+\alpha,\,n}^{\frac{u_i+\varkappa+s_i\alpha-\alpha}{u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha}}\right),$$

т. е.

$$\prod_{i=1}^{n} L_{u_i+\varkappa+s_i\,\alpha,\,n}=O\left(L_{u+(\varkappa-\alpha)\,m+s\alpha+\alpha,\,n}\right),$$

так как $u_1+\ldots+u_m=u$, $s_1+\ldots+s_m=s$. Отсюда уже следует равномерная относительно n ограниченность $q_n(u, s, m)$.

Положив в (7) $z=1$, получаем утверждение теоремы.

Заметим, что для получения при некоторых дополнительных условиях асимптотического разложения для функций распределения следует в (3) разность $f_n(t)-g_\alpha(t, \lambda)$ заменить разностью функций распределения $\overline{F}_n(x)-$ $-G_\alpha(x, \lambda)$, а величину $g_\alpha(t, \lambda)(it)^{u+\varkappa m}|t|^{\alpha s}$ — смешанной производной

$$\frac{\partial^{u+\varkappa m+s} G_\alpha(x, \lambda)}{\partial x^{u+\varkappa m} \partial\lambda^s}.$$

В заключение приношу сердечную благодарность В. А. Статулявичюсу и В. М. Золотареву, оказавшим большую помощь при выполнении данной работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
1.XII.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИИЛ, Москва, 1947.
2. В. М. Золотарев, Аналог асимптотического разложения Эджворта Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения, Труды VI Всесоюзн. Совещ. по теор. вероят. и мат. стат., Вильнюс, 1962, 49—50.
3. В. А. Статулявичюс, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Лит. матем. сборник 2, 2 (1962),
4. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИИЛ, Москва, 1948.
5. В. М. Золотарев, О выборе нормирующих констант в нарастающих суммах независимых случайных величин, Труды Московского физико-техн. ин-та, 7 (1961), 158—161.

ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS NEPRIKLAUSOMIEMS ATSITIKTINIAMS DYDŽIAMS STABILAUS RIBINIO PASISKIRSTYMO ATVEJU

A. MITALAUSKAS

(Reziumė)

Darbe gaunamas nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotų sumų charakteringosios funkcijos asimptotinis išdėstymas, kai dydžiai nevienodai pasiskirstę ir kai normuotos sumos charakteringoji funkcija konverguoja į stabilaus dėsnio su $\alpha\neq 1$ charakteringąją funkciją. Dėstoma pagal Liapunovo trupmenų analogus. Koeficientai prie jų yra tolygiai aprėžti n atžvilgiu.

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG FÜR UNABHÄNGIGE ZUFALLSGRÖSSEN IM FALLE DER STABILEN GRENZVERTEILUNG

A. MITALAUSKAS

(Zusammenfassung)

In dieser Note ist die asymptotische Entwicklung für die charakteristische Funktion (ch. F.) von normierten Summen der unabhängigen Zufallsgrößen erhalten, wenn die Zufallsgrößen unidentisch verteilt sind, und die ch. F. der normierten Summe gegen die ch. F. des stabilen Gesetzes mit $\alpha\neq 1$ strebt. Die Entwicklung ist nach die Analogen der Liapunovschen Brüchen durchführt. Man beweist, daß die Koeffizienten bei diesen Analogen in Bezug auf n gleichmäßig beschränkt sind.