III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

В. В. ПЕТРОВ

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины с конечными дисперсиями. Введем следующие обозначения:

$$a_j = \mathbf{E}X_j, \quad \sigma_j^2 = E(X_j - a_j)^2, \quad \beta_{3j} = \mathbf{E}\,|X_j - a_j|^3.$$

Через $Q_n(x)$ обозначим функцию концентрации суммы $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, т. е.

$$Q_n(x) = \sup_{-\infty<y<\infty} \mathbf{P}\left\{y \leqslant \sum_{i=1}^{n} X_j \leqslant y + x\right\}.$$

Положим еще

$$\frac{1}{k} = 8 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\beta_{3j}}{\sigma_j^3}.$$

Оффорд [1] показал, что при всех $n>1$ и всех $x>0$ справедливо неравенство

$$Q_n(x) \leqslant \frac{6\ln n}{\sqrt{n}\,k^3}\left(\ln n + \frac{kx}{2\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j}\right).$$

В настоящей заметке приводится одно неравенство для $Q_n(x)$, которое в ряде случаев (например, в случае одинаково распределенных величин) оказывается более сильным, чем неравенство Оффорда. Полученный результат представляет собой непосредственное следствие известной оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин.

2. Будем предполагать, что хотя бы одна из дисперсий σ_j^2 $(j=1, 2, \ldots, n)$ отлична от нуля. В дополнение к ранее введенным обозначениям положим

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \quad \beta_{2+\delta,j} = \mathbf{E}\,|X_j - a_j|^{2+\delta}, \quad L_n = \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2+\delta,j},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Теорема 1. *При любом положительном $\delta \leqslant 1$, всех $n \geqslant 1$ и всех $x>0$ имеем*

$$Q_n(x) \leqslant CL_n + 2\Phi\left(\frac{x}{2B_n}\right) - 1, \tag{1}$$

где C — некоторая положительная постоянная, зависящая только от δ. В частности, если $\delta=1$, то неравенство (1) справедливо при $C=9{,}6$.

3. Доказательство. Положим

$$F_n(x)=P\{S_n<x\},\quad A_n=\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

При $0<\delta\leqslant 1$ и всех $n\geqslant 1$ имеет место оценка

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(xB_n+A_n)-\Phi(x)|\leqslant C_0L_n,\tag{2}$$

где C_0 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от δ. Этот результат для специальных случаев был получен рядом авторов, начиная с Ляпунова, которому принадлежит оценка (2) для случая $\delta<1$. Сформулированный здесь общий результат был получен Эссееном [2]. Имеем

$$Q_n(x)=\sup_{-\infty<y<\infty}\left\{F_n(y+x+0)-\Phi\left(\frac{y+x-A_n}{B_n}\right)+\right.$$
$$\left.+\Phi\left(\frac{y+x-A_n}{B_n}\right)-\Phi\left(\frac{y-A_n}{B_n}\right)+\Phi\left(\frac{y-A_n}{B_n}\right)-F_n(y)\right\}.\tag{3}$$

Ясно, что

$$\sup_{-\infty<u<\infty}\left\{\Phi\left(\frac{x+u}{B_n}\right)-\Phi\left(\frac{u}{B_n}\right)\right\}=\Phi\left(\frac{x}{2B_n}\right)-\Phi\left(-\frac{x}{2B_n}\right)=2\Phi\left(\frac{x}{2B_n}\right)-1.$$

Отсюда и из (2) и (3) получаем

$$Q_n(x)\leqslant 2C_0L_n+2\Phi\left(\frac{x}{2B_n}\right)-1,$$

что совпадает с оценкой (1) при $C=2C_0$. Как показано в [3], в случае $\delta=1$ неравенство (2) справедливо при $C_0=4{,}8$. Этим доказательство теоремы 1 завершается.

Мы не делали предположения о том, что $\mathbf{E}|X_j-a_j|^{2+\delta}<\infty$ для всех j, так как в противном случае неравенства (2) и (1) очевидно верны.

4. Из неравенств (1) и

$$2\Phi\left(\frac{x}{2B_n}\right)-1=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x}{2B_n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqslant\frac{x}{B_n\sqrt{2\pi}}\tag{4}$$

$(x>0)$ следует, что

$$Q_n(x)\leqslant CL_n+\frac{x}{B_n\sqrt{2\pi}}.\tag{5}$$

5. **Теорема 2.** *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с конечной дисперсией, не равной нулю. Положим*

$$\mathbf{E}X_1=a,\quad \mathbf{E}(X_1-a)^2=\sigma^2,\quad \mathbf{E}|X_1-a|^3=\beta_3.$$

Тогда при всех $n\geqslant 1$ и всех $x>0$

$$Q_n(x)\leqslant\frac{4{,}062\,\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}+2\Phi\left(\frac{x}{2\sigma\sqrt{n}}\right)-1.\tag{6}$$

Эта теорема вытекает из теоремы 1 и того факта [4], что в случае одинаковых распределений и $\delta=1$ оценка (2) имеет место при $C_0=2{,}031$. В [5] показано, что если отношение β_3/σ^3 велико, то оценка (2) имеет место с постоянной, меньшей 2,031, так что в этом случае постоянную в первом члене правой части (6) можно снизить.

Неравенство Оффорда в случае одинаковых распределений принимает вид

$$Q_n(x) \leqslant \frac{3072 \ln^2 n}{\sqrt{n}} \left(\frac{\beta_3}{\sigma^3}\right)^3 + \frac{192\, x \beta_3^2 \ln n}{\sigma^7 \sqrt{n}} . \tag{7}$$

В силу (4) и $\beta_3 \geqslant \sigma^3$ неравенство (7) слабее, чем (6).

Неравенство (6) для некоторых специальных распределений и достаточно малых x нетривиально при $n > 16$. Неравенство (7) тривиально при всех $n \leqslant 10^{12}$ $(n > 1)$ и всех $x > 0$ для любых распределений рассматриваемых случайных величин.

Поступила в редакцию
2. XII. 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Offord, An inequality for sums of independent random variables, Proc. London Math. Soc., 48 (1945), 467–477.
2. C. G. Essen, Fourier analysis of distribution funktions, A mathematical study of the Laplace–Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1–125.
3. H. Bergstrom, On the central limit theorem in the case of not equalit distributed random variables, Skand. Aktuarietidskrift, H. I (1949), 37–62.
4. K. Takano,, A remark to a result of A. C. Berry, Res. Mem. Inst. Statist. Math., 6, 9 (1951).
5. S. Ikeda, A note on the normal approximation to the sum of independent radom variables, Ann. Inst. Statist. Math., 11, 2 (1959), 121–130.

VIENA NELYGYBĖ KONCENTRACIJOS FUNKCIJOMS

V. PETROVAS

(Reziumė)

Darbe gaunama nelygybė nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų koncentracijos funkcijoms kaip betarpiška išvada iš gerai žinomo liekamojo nario įvertinimo centrinėje ribinėje teoremoje. Ši nelygybė yre Offordo [1] nelygybės patikslinimas.

ON AN INEQUALITY FOR CONCENTRATION FUNCTIONS

V. V. PETROV (Leningrad)

(Summary)

An inequality for concentration function of the sum of independent random variables is obtained as the immediate consequence of known estimate of the remaider term in the central limit theorem. This inequality is a refinement of the inequality by Offord [1].