III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1963

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Б. РЯУБА

Пусть имеется последовательность случайных величин

$$X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ \ldots,\ X_n^{(n)} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

и семейство σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_{kl}^{(n)},\ 1\leqslant k<l\leqslant n\}$, порожденное событиями вида $\{X_i^{(n)}<x,\ k<i\leqslant l\}$.

Введем следующие обозначения:

$$S_{kl}^{(n)}=\sum_{i=k+1}^{l} X_i^{(n)},\quad S_n=S_{0n},\quad B_n^2=\mathbf{D}S^n,$$

$$G_i^{(n)}(x)=\mathbf{P}\{X_i^{(n)}-\mathbf{M}X_i^{(n)}<x\} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$C,\ c,\ c_0,\ c_1,\ \ldots$ — абсолютные положительные константы,

$$\eta(k,\ l)=\sup_{A\in\mathfrak{F}_{ln}^{(n)}}\left|\mathbf{P}(A\,|\,\mathfrak{F}_{1k}^{(n)})-\mathbf{P}(A)\right|,$$

$$\zeta(k,\ l)=\sup_{A\in\mathfrak{F}_{ln}^{(n)}}\left|\mathbf{P}(A\,|\,\mathfrak{F}_{1l}^{(n)})-\mathbf{P}(A\,|\,\mathfrak{F}_{kl}^{(n)})\right|.$$

Мы будем предполагать, что случайные величины (1) являются „слабо зависимыми величинами марковского типа", т. е.

1) существует α_n, такое, что

$$\alpha_n B_n\to\infty\ (n\to\infty) \tag{2}$$

и с вероятностью 1

$$\sup_{l-k=\tau<0}\eta(k,\ l)\leqslant\varphi(\alpha_n\tau), \tag{3}$$

где $\varphi(u)$ — некоторая функция, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\frac{1}{2}(k)<\infty.$$

Иногда будем употреблять более сильное условие чем (3), а именно, с вероятностью 1

$$\sup_{l-k=\tau>0}\eta(k,\ l)\leqslant\exp\{-\alpha_n\tau\} \tag{3'}$$

и

2) существует β_n, такое, что

$$\beta_n B_n\to\infty\ (n\to\infty) \tag{4}$$

и с вероятностью 1

$$\sup_{l-k=\tau>0}\zeta(k,\ l)\leqslant\exp\{-\alpha_n\tau\}. \tag{5}$$

Целью настоящей статьи является обобщение интегральных и локальных предельных теорем, полученных для величин, связанных в неоднородную эргодическую цепь Маркова. Условие (3) $\left((3')\right)$ обеспечивает слабую зависимость случайных величин, расстояние между которыми больше, чем α_n^{-1}. Условие (5) показывает, что наши величины в первом приближении можно рассматривать как связанные в сложную цепь Маркова порядка β_n^{-1}.

Как известно, для величин, связанных в неоднородную эргодическую цепь Маркова, наиболее общие и оптимальные интегральные предельные теоремы получены Р. Л. Добрушиным (см. [2]). Теорема 1 настоящей статьи, а также ранее автором полученные результаты (см. [3], [4]) являются обобщением теорем Р. Л. Добрушина на более общий класс случайных величин.

Наиболее общие локальные предельные теоремы для цепей Маркова доказаны В. А. Статулявичюсом (см. [5], теоремы 1—4). Наша теорема 2 обобщает теоремы 1—4 (см. [5]) В. А. Статулявичюса на более общие слабо зависимые случайные величины. Кроме того, условия теоремы 2 более общие, чем условия соответствующих теорем в [5]. Они похожи на условия локальной предельной теоремы для независимых случайных величин, доказанной В. А. Статулявичюсом (см. [6]).

Положим

$$\gamma_n = \min(\alpha_n, \ \beta_n).$$

Сформулируем интегральную предельную теорему:

Теорема 1. *Пусть случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* (2), (3), (4), (5) *и*

$$\mathbf{D}S_{kl}^{(n)}\, n\,(l-k)^{-1} \to \infty \ (n \to \infty) \tag{6}$$

при $l-k \gg \dfrac{1}{\gamma_n}$.

Тогда для равномерной сходимости относительно x

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - \mathbf{M}S_n}{B_n} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{7}$$

при $n \to \infty$ *достаточно, чтобы было выполнено одно из следующих условий:*

а) с вероятностью 1 *при всех* i *и* n

$$|X_i^{(n)}| \leqslant C,$$

б) с вероятностью 1 *при всех* i *и* n

$$|X_i^{(n)}| \leqslant C_n,$$

где $C_n \geqslant c_0 > 0$ *и при* $n \to \infty$

$$C_n \gamma_n^{-1} B_n^{-1} \to 0,$$

в) при всех i *и* n

$$\mathbf{D}X_i^{(n)} \leqslant C$$

и при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2 \gamma_n} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x| > \varepsilon\gamma_n B_n} x^2\, dG_i^{(n)}(x) = 0,$$

г) существуют такие числа $m>2$ *и* b_m $(0<b_m<\infty)$, *что при всех* i *и* n

$$\mathbf{M}\{|X_i^{(n)}-\mathbf{M}X_i^{(n)}|^m\}\leqslant b_m$$

и

$$\gamma_n^{m-1}B_n^m n^{-1}\to\infty \qquad (n\to\infty).$$

Пусть имеется набор целых чисел

$$0=r_0<r_1<r_2<\ldots<r_{N_n-1}<r_{N_n}=n$$

такой, что

$$r_{i+1}=r_i+\left[\frac{\rho_0(n)\ln n}{\gamma_n}+1\right] \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ N_n-1),$$

$$\rho_0(n)\to\infty \qquad (n\to\infty).$$

Далее положим

$$Y_i^{(n)}=S_{r_{i-1}r_i}^{(n)},\quad \mathfrak{F}_{r_{i-1}r_i}^{(n)}=\mathfrak{F}_i^{(n)},$$

$$F(x\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})=\mathbf{P}\{Y_i^{(n)}<x\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)}\} \qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ N_n-1),$$

$$F_1(x\,|\,\mathfrak{F}_2^{(n)})=\mathbf{P}\{Y_1^{(n)}<x\,|\,\mathfrak{F}_2^{(n)}\},$$

$$F_{N_n}(x\,|\,\mathfrak{F}_{N_n-1}^{(n)})=\mathbf{P}\{Y_{N_n}^{(n)}<x\,|\,\mathfrak{F}_{N_n-1}^{(n)}\}.$$

Имеет место следующая локальная предельная теорема:

Теорема 2. *Пусть случайные величины* (1) *принимают только целочисленные значения и удовлетворяют условиям* (2), (3′), (4), (5) *и*

$$\mathbf{D}S_{kl}^{(n)}n\{(l-k)\ln(l-k)\}^{-1}\to\infty \qquad (n\to\infty), \tag{6′}$$

при $l-k\gg\gamma_n^{-1}$.

Тогда для того, чтобы равномерно для всех целых m, *при* $n\to\infty$

$$B_n\mathbf{P}\{S_n=m\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(m-\mathbf{M}S_n)^2}{2B_n^2}\right\}\to 0, \tag{8}$$

достаточно, чтобы

а) было выполнено хотя бы одно из условий а), б), в), г) теоремы 1;

б) для любой $\rho(n)\to\infty$ $(n\to\infty)$ *в интервале*

$$\rho(n)\leqslant\varepsilon_n B_n\leqslant\frac{B_n}{\rho(n)},$$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left\{\iint\limits_{|x-y|<\varepsilon_n B_n}(x-y)^2\,dF_i(x\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})\times\right.$$
$$\left.\times\, dF_i(y\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})\right\}\geqslant\varepsilon_n^2\,\psi\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right), \tag{9}$$

где

$$\int\limits_{\rho(n)<u\leqslant\frac{B_n}{\rho(n)}}\exp\{-c_1\psi(u)\}\,du\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{10}$$

для любой $c_1>0$

в) при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}(n,\ q)=\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left\{\min_r\mathbf{P}\{Y_i^{(n)}\not\equiv r\ (\mathrm{mod}\,q)\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)}\}\right\}\to\infty. \tag{11}$$

Замечание 1. *В теоремах* 1 *и* 2 *условия* (3) $\big((3')\big)$ *и* (5) *можно заменить, соответственно, следующими условиями:*

$$\sup_{l-k=\tau>0} \eta(k, l)\,\varphi^{-1}(\alpha_n\tau)\to 0 \qquad (\alpha_n\tau\to\infty),$$

$$\sup_{l-k=\tau>0} \eta(k, l)\exp(\alpha_n\tau)\to 0 \qquad (\alpha_n\tau\to\infty),$$

$$\sup_{l-k=\tau>0} \zeta(k, l)\exp(\beta_n\tau)\to 0 \qquad (\beta_n\tau\to\infty)$$

по вероятности.

Замечание 2. *В теореме* 2 *можно получить и оценку быстроты сходимости. Для этой цели самостоятельный интерес имеют леммы* 2—3, *формулируемые ниже при доказательстве теоремы* 2, *из которых прямо можно получить оценку быстроты сходимости в утверждении* (8).

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 почти аналогично доказательствам теорем 2 и 3 в работе [3], а также теорем 1, 2, 3, 4 в работе [4]. В связи с этим подробного доказательства проводить не будем, только сделаем некоторые замечания.

Доказательство лемм, аналогичных леммам 1, 2 в работе [3] и леммам 1, 2, 3 в работе [4] проводится почти так же. В дальнейшем соотношения (31) в [3] и (22) в [4] следует заменить такими:

$$r_j=l_i+j\left[\frac{g(n)}{\gamma_n}+1\right],$$

$$r_{s_i}=k_{i+1},$$

$$r_{s_i-1}<k_{i+1}\leqslant r_{s_i-1}+\left[\frac{g(n)}{\gamma_n}+1\right] \qquad \big(j=0,\ 1,\ \ldots,\ s_i-1;\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ g(n)\big).$$

Когда $\gamma_n=\alpha_n$, дальше доказательство проводится дословно, так же, как и в [3], [4]; при $\gamma_n=\beta_n$, после вышеуказанных изменений, проводится то же почти дословно.

Доказательство теоремы 2. Для удобства, доказательство разобьем на несколько пунктов.

1. Не нарушая общности, будем считать, что $\mathbf{M}X_i^{(n)}=0$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $n=1,\ 2,\ \ldots$). Пусть

$$P_n(m)=\mathbf{P}\{S_n=m\} \qquad (m=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Тогда

$$f_n(t)=\mathbf{M}\{\exp(itS_n)\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(itm)P_n(m).$$

Как известно,

$$B_nP_n(m)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{m^2}{2B_n^2}\right\}=$$

$$=\int_{-\pi B_n}^{\pi B_n}\left(f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)\exp\left\{-\frac{itm}{B_n}\right\}dt=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{12}$$

где

$$I_1=\int_{|t|\leqslant\rho(n)}\exp\left\{-\frac{itm}{B_n}\right\}\left(f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)-\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right)dt,$$

$$I_2=\int_{\rho(n)<|t|\leqslant\frac{B_n}{\rho(n)}}\exp\left\{-\frac{itm}{B_n}\right\}f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\frac{B_n}{\rho(n)} < |t| \leqslant \pi B_n} \exp\left\{-\frac{itm}{B_n}\right\} f_n\left(\frac{t}{B_n}\right) dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\rho(n) < |t| \leqslant \pi B_n} \exp\left\{-\frac{itm}{B_n} - \frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Из условия *a*) теоремы 2 следует, что равномерно для всех (см. [1] стр. 280)

$$|I_1| \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Очевидно, что равномерно для всех m

$$|I_4| \leqslant \frac{1}{\rho(n)} \exp\{-\rho^2(n)\}. \tag{14}$$

Теорема будет доказана, если покажем, что

$$|I_2| \to 0, \quad |I_3| \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{15}$$

2. В этом пункте введем вспомогательные определения и получим некоторые вспомогательные соотношения, которые будут нам нужны в дальнейшем.

Определим последовательность случайных величин

$$\tilde{Y}_1^{(n)}, \tilde{Y}_2^{(n)}, \ldots, \tilde{Y}_{N_n}^{(n)}, \tag{16}$$

образующих неоднородную цепь Маркова с условными вероятностями

$$P_2(A_2 \mid \mathfrak{F}_1^{(n)}), \quad P_3(A_3 \mid \mathfrak{F}_2^{(n)}), \quad \ldots, \quad P_{N_n}(A_{N_n} \mid \mathfrak{F}_{N_n-1}^{(n)})$$

и с начальным распределением $P_1(A_1)$, где

$$P_1(A) = P\{Y_1^{(n)} \in A\}, \quad P_k(A \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)}) = P\{Y_k^{(n)} \in A \mid \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)}\},$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \left(A \in \mathfrak{F}_k^{(n)}, \quad B \in \mathfrak{F}_{k-1}^{(n)}, \quad P(B) \neq 0\right).$$

Совместное распределение определим следующим образом

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{Y}_1^{(n)} \in A_1, \quad \tilde{Y}_2^{(n)} \in A_2, \quad \ldots, \quad \tilde{Y}_{N_n}^{(n)} \in A_{N_n}\right\} =$$

$$= \int\limits_{A_1}\int\limits_{A_2} \ldots \int\limits_{A_{N_n}} P_1(dy_1) P(dy_2 \mid y_1) \ldots P(dy_{N_n} \mid y_{N_n-1}).$$

Так как случайные величины (16) образуют неоднородную цепь Маркова, то применив леммы 1—4 гл. 1 работы В. А. Статулявичюса [5], при любом наборе целых чисел

$$0 = k_0 < l_0 < k_1 < \ldots < k_s < l_s = N_n \tag{17}$$

получим, что

$$|g_n(t)| \leqslant \exp\left\{-\sum_{i=1}^{s} R_{k_i l_i}^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{s-1} \eta_1(l_i, k_{i+1})\right\}, \tag{18}$$

где

$$g_n(t) = \mathbf{M} \exp\left(it \sum_{i=1}^{N_n} \tilde{Y}_i^{(n)}\right),$$

$$R_{kl}^{(n)}(t) = \mathbf{M}\left\{\int\int \sin^2 \frac{x-y}{2} t \cdot dF_{kl}(x \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times \mathfrak{F}_l^{(n)}) \, dF_{kl}(y \mid \mathfrak{F}_k^{(n)} \times F_l^{(n)}), \tag{19}$$

$$F_{kl}(x\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)})=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k+1}^{l-1}Y_i^{(n)}<x\,|\,\mathfrak{F}_k^{(n)}\times\mathfrak{F}_l^{(n)}\right\},$$

$$\eta_1(k,\ l)=\eta(r_k,\ r_l).$$

Тогда верна

Лемма 1. *При любом наборе целых чисел* (17)

$$|f_n(t)|\leqslant\sum_{i=1}^{N_n}\zeta_1(i-1,\ i)+\exp\left\{-\sum_{i=1}^{s}R_{k_il_i}^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{s-1}\eta(l_i,\ k_{i+1})\right\},\tag{20}$$

где $R_{kl}^{(n)}(t)$ *определено равенством* (19), *а*

$$\eta_1(k,\ l)=\eta(r_k,\ r_l),\quad \zeta_1(k,\ l)=\zeta(r_k,\ r_l).$$

Доказательство. Так как

$$|f_n(t)|\leqslant|f_n(t)-g_n(t)|+|g_n(t)|,$$

а

$$|f_n(t)-g_n(t)|\leqslant\sum_{i=1}^{N_n}\zeta_1(i-1,\ i),$$

то из последнего неравенства и (18) получаем лемму.

2. **Лемма 2.** *Если выполнены условия теоремы* 2, *то*

$$\int\limits_{\rho(n)<|t|\leqslant\frac{B_n}{\rho(n)}}\left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|dt\leqslant2\int\limits_{\rho(n)<|t|\leqslant\frac{B_n}{\rho(n)}}\exp\{-c_1\psi(t)\}\,dt.\tag{21}$$

Доказательство. В соотношении (20) положим

$$l_i=k_i+2,\quad k_{i+1}=l_i+2\qquad(i=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1).\tag{22}$$

Из условий (3′) и (5), а также (22), следует, что

$$\sum_{i=0}^{s-1}\eta_1(l_i,\ k_{i+1})\to0\qquad(n\to\infty)\tag{23}$$

и

$$\sum_{i=1}^{N_n}\zeta_1(i-1,\ i)\to0\qquad(n\to\infty).\tag{24}$$

Пусть

$$R_{k_ik_i+2}^{(n)}(t)=R_i^{(n)}(t).\tag{25}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}R_i^{(n)}\left(\frac{t}{B_n}\right)=\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left\{\iint\sin^2\frac{x-y}{2B_n}t\,dF_i(x\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})\,dF_i(y\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})\right\}\geqslant$$

$$\geqslant c_2\frac{t^2}{B_n^2}\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left\{\iint\limits_{|x-y|<\frac{B_n}{|t|}}(x-y)^2\,dF_i(x\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})\,dF_i(y\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)})\right\}.\tag{26}$$

В этой лемме

$$\rho(n)<|t|\leqslant\frac{B_n}{\rho(n)},\tag{27}$$

но, положив

$$|t|=\frac{1}{\varepsilon_n}$$

и в соотношении (26) применив условие (9), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{M} R_i^{(n)}\left(\frac{t}{B_n}\right) \geqslant \psi\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \psi(|t|), \tag{28}$$

откуда и следует лемма.

3. Основной результат этого пункта следующий:

Лемма 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то*

$$\int\limits_{\frac{B_n}{\rho(n)}<|t|\leqslant \pi B_n} \left|f_n\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| dt \leqslant \rho^2(n) \exp\left\{-\frac{P(n,q)}{2q^2}\right\} + \\ + \int\limits_{\rho(n)<|t|\leqslant \frac{B_n}{\rho(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{q^2}\psi(|t|)\right\} dt. \tag{29}$$

Доказательство. В соотношении (20) k_i и l_i подберем так же, как и в (22), и будем пользоваться обозначением (25). Так как и в этом случае будут верны соотношения (23), (24), то в (29) и (20) после соответствующей замены переменных интегрирования будем иметь

$$2\pi B_n \int\limits_{\frac{1}{2\pi\rho(n)}<|t|\leqslant \frac{1}{2}} |f_n(2\pi t)|\, dt \leqslant \rho^2(n) \exp\left\{-\frac{P(n,q)}{2q^2}\right\} + \\ + B_n \int\limits_{\frac{\rho(n)}{B_n}<|t|\leqslant \frac{1}{\rho(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{q^2}\psi(|t|B_n)\right\} dt, \tag{30}$$

$$|f_n(2\pi t)| \leqslant c_3 \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{M}\left\{\sum_{m_1}\sum_{m_2} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \sin^2\left(\pi t(m_1-m_2)\right) p(i;\, m_1)\, p(i;\, m_2)\right\}\right\}, \tag{31}$$

где

$$p(i;\, m) = \mathbf{P}\{Y_i^{(n)} = m \mid \mathfrak{F}_{i-1}^{(n)} \times \mathfrak{F}_{i+1}^{(n)}\},$$

а интегралы заменены суммами $\left(\text{так как } Y_i^{(n)} (i=1, 2, \ldots, N_n) - \text{дискретны}\right)$.

Каждое t, для которого

$$|t| \in \left(\frac{1}{2\pi\rho(n)},\ \frac{1}{2}\right) = \Delta, \tag{32}$$

можно, при любом τ $(0<\tau<\infty)$, представить в виде $|t| = \frac{a}{q} + \Theta$, где a, q натуральные числа и $(a, q)=1$, $a \leqslant 2q$, $|\Theta| < \frac{1}{q\tau}$, $q \leqslant \tau$.

Таким образом,

$$\Delta = \cup\, \Delta\left(\frac{a}{q}\right), \tag{33}$$

где

$$\Delta\left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau},\ \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right).$$

Пусть $|t|\in\Delta\left(\frac{a}{q}\right)$, где $\Delta\left(\frac{a}{q}\right)$ — некоторый полуинтервал, определенный соотношением (33). Тогда

$$R^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}R_i^{(n)}(t)=\mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{m_1}\sum_{m_2}p(i;\ m_1)p(i;\ m_2)\times\right.$$
$$\left.\times\sin^2\pi\left(\frac{a}{q}(m_1-m_2)+\left(t-\frac{a}{q}\right)(m_1-m_2)\right)\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^{N_n}\left\{\sum_{\substack{m_1\\ m_1\equiv m_2 \pmod q\\ |m_1-m_2|\leqslant\frac{1}{\pi\left|t-\frac{a}{q}\right|}}}\sum_{m_2}\left(t-\frac{a}{q}\right)^2(m_1-m_2)^2p(i;\ m_1)p(i;\ m_2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{\substack{m_1\\ m_1\not\equiv m_2 \pmod q\\ |m_1-m_2|\leqslant\frac{1}{q\left|t-\frac{a}{q}\right|}}}\sum_{m_2}\frac{1}{q^2}p(i;\ m_1)p(i;\ m_2)\right\}\right\}. \tag{34}$$

Из-за удобства введем следующие обозначения:

$$D_1(u)=\mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{\substack{m_1\\ m_1\equiv m_2 \pmod q\\ |m_1-m_2|\leqslant u}}\sum_{m_2}(m_1-m_2)^2p(i;\ m_1)p(i;\ m_2)\right\},$$

$$D_2(u)=\mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{\substack{m_1\\ m_1\not\equiv m_2 \pmod q\\ |m_1-m_2|\leqslant u}}\sum_{m_2}(m_1-m_2)^2p(i;\ m_1)p(i;\ m_2)\right\},$$

$$D(u)=D_1(u)+D_2(u),$$

$$P(u)=\mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{\substack{m_1\\ m_1\not\equiv m_2 \pmod q\\ |m_1-m_2|\leqslant u}}\sum_{m_2}p(i;\ m_1)p(i;\ m_2)\right\}.$$

Имеем

$$R^{(n)}(t)\geqslant\left(t-\frac{a}{q}\right)^2D_1\left(\frac{1}{\pi\left|t-\frac{a}{q}\right|}\right)+\frac{1}{q^2}P\left(\frac{1}{q\left|t-\frac{a}{q}\right|}\right).$$

Так как

$$P(u)\geqslant\frac{1}{2}P(u)+\frac{1}{2u^2}D_2(u),$$

то окончательно получаем, что

$$R^{(n)}(t)\geqslant\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{q}\right)^2D\left(\frac{1}{q\left|t-\frac{a}{q}\right|}\right)+\frac{1}{2q^2}P\left(\frac{1}{q\left|t-\frac{a}{q}\right|}\right). \tag{35}$$

Если $t\in\Delta\left(\frac{a}{q}\right)$, то из (31), (34) и (35) получаем, что

$$|f_n(2\pi t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{q}\right)D\left(\frac{1}{q\left|t-\frac{a}{q}\right|}\right)-\frac{1}{2q^2}P\left(\frac{1}{q\left|t-\frac{a}{q}\right|}\right)\right\}, \tag{36}$$

или, заменив $q\left(t-\frac{a}{q}\right)$ на z, имеем, что

$$I(q)=\int\limits_{\Delta\left(\frac{a}{q}\right)}|f_n(2\pi t)|\,dt\leqslant\int\limits_{|z|<\tau^{-1}}\exp\left\{-\frac{z^2}{q^2}D\left(\frac{1}{|z|}\right)-\frac{1}{2q^2}P\left(\frac{1}{|z|}\right)\right\}. \quad (37)$$

Пусть

$$(-\tau^{-1},\ \tau^{-1}]=\left(-\rho(n)B_n^{-1},\ \rho(n)B_n^{-1}\right]+\left(-\tau^{-1},\ -\rho(n)B_n^{-1}\right]+$$
$$+\left(\rho(n)B_n^{-1},\ \tau^{-1}\right]. \quad (38)$$

Применив условие *a*), получим, что

$$P_1(q)=\mathbf{M}\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{m_1}\sum_{\substack{m_2\\ m_1\not\equiv m_2(\mathrm{mod}\,q)\\ |m_1-m_2|\geqslant\frac{B_n}{\rho(n)}}}p(i;\ m_1)\,p(i;\ m_2)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\rho^2(n)}{B_n^2}\sum_{i=1}^{N_n}\int\limits_{|x|>\frac{B_n}{\rho(n)}}x^2\,dF_i(x)+1\leqslant c_4. \quad (39)$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left\{\sum_{m_1}\sum_{\substack{m_2\\ m_1\not\equiv m_2(\mathrm{mod}\,q)}}p(i;\ m_1)\,p(i;\ m_2)\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left\{\sum_{m_2}\left(\min_r\sum_{m_1\not\equiv r(\mathrm{mod}\,q)}p(i;\ m_1)\,p(i;\ m_2)\right\}=\right.$$
$$=\sum_{i=1}^{N_n}\mathbf{M}\left(\min_r\mathbf{P}\{Y_i^{(n)}\not\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)\,|\,\mathfrak{F}_{i-1}^{(n)}\times\mathfrak{F}_{i+1}^{(n)}\}\right)=P(n,\ q), \quad (40)$$

то при $z\in\left(-\rho(n)B_n^{-1},\ \rho(n)B_n^{-1}\right]$ из (39) и (40) получаем, что

$$P\left(\frac{1}{|z|}\right)\geqslant P(n,\ q)-c_4. \quad (41)$$

Следовательно, принимая во внимание соотношения (38), (41) и условие (9), получаем (см. (37)), что

$$I(q)\leqslant\int\limits_{|z|<\frac{\rho(n)}{B_n}}\exp\left\{-\frac{z^2}{q^2}D\left(\frac{1}{|z|}\right)-\frac{1}{2q^2}P(n,\ q)\right\}dz+$$
$$+2\int\limits_{\frac{\rho(n)}{B_n}<z\leqslant\frac{1}{\tau}}\exp\left\{-\frac{z^2}{q_2}D\left(\frac{1}{z}\right)\right\}dz\leqslant\frac{\rho(n)}{B_n}\exp\left\{-\frac{1}{2q^2}P(n,\ q)\right\}+$$
$$+\frac{2}{B_n}\int\limits_{\rho(n)<z\leqslant\frac{B_n}{\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{q^2}\psi(z)\right\}dz. \quad (42)$$

Окончательно из (30), (37) и (42) получаем $\left(\text{так как число полуинтервалов } \Delta\left(\frac{a}{q}\right) \text{ не превышает } \tau\right)$, что

$$2\pi B_n \int\limits_{\frac{1}{2\pi\rho(n)}<|t|<\frac{1}{2}} |f_n(2\pi t)|\,dt \leqslant \tau\rho(n)\exp\left\{-\frac{1}{q^2}P(n,\ q)\right\}+$$
$$+\tau \int\limits_{\rho(n)<|z|<\frac{B_n}{\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{q^2}\,\psi(z)\right\}dz,$$

следовательно, подобрав τ так, чтобы $\tau\leqslant\rho(n)$, получаем лемму.

Из условия (11) $\left(\text{см. } (40)\right)$ следует, что

$$P(n,\ q)\to\infty \qquad (n\to\infty),$$

то в теореме 2 функцию $\rho(n)$ подберем так, чтобы

$$\rho^3(n)\,\rho_1(n)\leqslant P(n,\ q),$$

поэтому из (9), (10), (11) и (13), (14) лемм 2 и 3 следует теорема 2.

Автор глубоко благодарен В. Статулявичюсу, при неустанном внимании которого выполнена настоящая работа.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.XI.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М.–Л., 1949.
2. Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее прим., 1, 1 и 4, 1956, 72–89, 365–425.
3. Б. А. Ряуба, О применимости центральной предельной теоремы к суммам серий слабо зависимых случайных величин, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, ГИПНЛ, Вильнюс, 1962, 97–109.
4. Б. А. Ряуба, Центральная предельная теорема для сумм серий слабо зависимых случайных величин, Литовский математический сборник, 2, 2, 1962.
5. В. А. Статулявичюс, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова, Литовский математический сборник, 1, 1–2, 1961, 231–314.
6. В. А. Статулявичюс, О локальной предельной теореме, Литовский математический сборник, 3, 1, 1963.

RIBINIŲ TEOREMŲ SILPNAI PRIKLAUSOMIEMS ATSITIKTINIAMS DYDŽIAMS KLAUSIMU

B. RIAUBA

(Reziumė)

Šiame darbe nagrinėjama seka serijų atsitiktinių dydžių $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$, kurie patenkina (2), (3), $\left((3')\right)$, (4), (5) sąlygas. Tokius atsitiktinius dydžius vadiname „Markovo tipo silpnai priklausomais“ dydžiais.

Tokiems atsitiktiniams dydžiams randamos pakankamos sąlygos, kad

1)

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n-\mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (n\to\infty),$$

2) $X_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ įgyjantiems tik sveikas reikšmes

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\,\mathbf{P}\{S_n=m\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(m-\mathbf{M}S_n)^2}{2\mathbf{D}S_n}\right\}\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

kur $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{(n)}$.

ON LIMIT THEOREMS FOR WEAKLY DEPENDENT RANDOM VARIABLES

B. RIAUBA

(Summary)

In present paper we consider a sequence of series of random variables $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ under the conditions (2), (3), $\big((3')\big)$, (4), (5). Such random variables we call „weakly dependent of markovian type".

For this class random variables we are detect sufficient conditions, such, that

1)

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n-\mathbf{M}S_n}{\sqrt{DS_n}}<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (n\to\infty),$$

2) if $X_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ take only integer values, then

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\,\mathbf{P}\{S_n=m\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(m-\mathbf{M}S_n)^2}{2\mathbf{D}S_n}\right\}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

where $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{(n)}$.