III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

П. СУРВИЛА

В настоящей работе доказывается теорема о сходимости плотности нормированной суммы независимых случайных величин к плотности нормального распределения. Условия, налагаемые на случайные величины последовательности, весьма просты.

1. Пусть

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n, \ \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет плотность распределения $p_k(x) \leqslant C_k$, дисперсию $D\xi_k = \sigma_k^2$ и $M\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем такую последовательность будем называть последовательностью (1).

Обозначим

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad \bar{S}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

$\varphi_k(t)$, $\bar{f}_n(t)$ — характеристические функции ξ_k и $\bar{S}_n$ соответственно. Плотность нормированной суммы $\bar{S}_n$ будет обозначаться через $\bar{p}_n(x)$, $\varphi(x)$ обозначает $(0, 1)$ — нормальную плотность.

Для каждой плотности $p_k(x)$ подбираем константу $\bar{C}_k \leqslant C_k$ и функции $\bar{p}_k(x)$, $\bar{\bar{p}}_k(x)$ определяем следующим образом:

$$\bar{p}_k(x) = \begin{cases} p_k(x), & \text{если} \quad p_k(x) \leqslant \bar{C}_k, \\ \bar{C}_k, & \text{если} \quad p_k(x) > \bar{C}_k, \end{cases}$$

$$\bar{\bar{p}}_k(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{если} \quad p_k(x) \leqslant \bar{C}_k, \\ p_k(x) - \bar{C}_k, & \text{если} \quad p_k(x) > \bar{C}_k. \end{cases}$$

Очевидно, что тогда $p_k(x) = \bar{p}_k(x) + \bar{\bar{p}}_k(x)$.

Пусть

$$\bar{\sigma}_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \bar{p}_k(x)\, dx, \quad \bar{\bar{\sigma}}_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \bar{\bar{p}}_k(x)\, dx,$$

$$\bar{B}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \bar{\sigma}_k^2, \quad \bar{\bar{B}}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \bar{\sigma}_k^2$$

и

$$Q_k(\overline{C}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{p}}_k(x)\,dx.$$

Тогда будем иметь, что $B_n^2 = \overline{B}_n^2 + \overline{\overline{B}}_n^2$.

Через $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}{}^{(i)} \sigma_k$ обозначим i-ый максимум совокупности

$$\sigma_1, \ \ldots, \ \sigma_n, \ (\max_{1\leqslant k\leqslant n}{}^{(1)} \sigma_k \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}{}^{(2)} \sigma_k \geqslant \ldots).$$

2. **Теорема 1.** *Если последовательность* (1) *удовлетворяет условиям:*

1. *имеет место центральная предельная теорема,*
2. *существуют такие конечные числа M и N, что*

$$\bar{\sigma}_k^2 \overline{C}_k^2 \leqslant M \quad \text{и} \quad C_k Q_k(\overline{C}) \leqslant N \overline{C}_k, \qquad k = 1, \ 2, \ \ldots,$$

3. $$\overline{\overline{B}}_n^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(\overline{C})}{\overline{C}_k^2} = o(B_n^2),$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} Q_k(\overline{C}) = o(n),$$

то равномерно относительно x

$$p_n(x) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие. Если последовательность (1) удовлетворяет условиям:

1. имеет место центральная предельная теорема,
2. $\sigma_k^2 C_k^2 \leqslant M$, $k = 1, \ 2, \ \ldots$, где M константа,

то равномерно относительно x

$$\bar{p}_n(x) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Действительно, если $\sigma_k^2 C_k^2 \leqslant M$, то можем брать $\overline{C}_k = C_k$, тогда $Q_k(\overline{C}) = 0$, $k = 1, \ 2, \ \ldots$, и все условия теоремы удовлетворяются.

Теорема 2. *Если последовательность* (1) *удовлетворяет условиям:*

1. *имеет место центральная предельная теорема,*
2. *существует конечное число M такое, что*

$$\sigma_k^2 C_k^2 \leqslant M, \qquad k = 1, \ 2, \ \ldots,$$

3. $$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k \leqslant B_n^{\rho}, \quad \min_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k \geqslant B_n^{-R},$$

где ρ и R положительные числа, причем $\rho < 1$, а R — конечное, то для всех x и $0 \leqslant m \leqslant 2$

$$|x|^m |\bar{p}_n(x) - \varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность одинаково распределённых случайных величин с $D\xi_k = \sigma^2 < \infty$ и $M\xi_k = 0$. Если существует число m такое, что распределение суммы $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$ имеет ограниченную плотность, то для всех x и $0 \leqslant m \leqslant 2$

$$|x|^m |\bar{p}_n(x) - \varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Действительно, обозначив

$$\zeta_{k+1} = \xi_{km+1} + \xi_{km+2} + \ldots + \xi_{(k+1)m},$$

получаем новую последовательность $\{\zeta_k\}$, для которой все условия теоремы 2 удовлетворяются.

3. Для доказательства указанных теорем нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ имеет плотность $p(x)$, не превосходящую C и дисперсию σ^2, тогда при $|t|\geqslant\pi\sigma^{-1}$,*

$$|f(t)|\leqslant\exp\left(-\frac{\alpha}{C^2\sigma^2}\right),$$

где α — абсолютная константа.

Эта лемма является обобщением одной леммы Ю. В. Прохорова.

Доказательство. Случайная величина ξ имеет плотность $p(x)\leqslant C$ и $D\xi=\sigma^2$. Тогда разность $\xi-\eta$, где ξ и η независимы и распределены одинаково с плотностью $p(x)$, тоже имеет плотность $q(x)\leqslant C$ и $D(\xi-\eta)=2\sigma^2$. Имеем

$$|f(t)|^2=g(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos tx\, q(x)\,dx=1-4\int\limits_{0}^{\infty}\sin^2\frac{tx}{2}\,q(x)\,dx.$$

Так как $g(t)=g(-t)$, то нам достаточно брать положительные t.

Пусть

$$\max_{|t|\geqslant\pi\sigma^{-1}} g(t)=g(t_0)=1-\delta,$$

тогда

$$\int\limits_{0}^{\infty}\sin^2\frac{t_0x}{2}\,q(x)\,dx=\frac{\delta}{4}. \tag{2}$$

Множество $(0,\infty)$ разбиваем на два множества

$$(0,\infty)=R_1\cup R_2,\quad \text{где}\quad R_1=\left\{x:x>0,\quad \sin^2\frac{t_0x}{2}\geqslant\varepsilon\right\},$$

$$R_2=\left\{x:x\geqslant 0,\quad \sin^2\frac{t_0x}{2}<\varepsilon\right\}=\left\{x:0\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}\,\sigma,\quad \sin^2\frac{t_0x}{2}<\varepsilon\right\}\cup \tag{3}$$

$$\cup\left\{x:x>a\sqrt{2}\,\sigma,\quad \sin^2\frac{t_0x}{2}<\varepsilon\right\}=R_2^{(1)}\cup R_2^{(2)}.$$

Здесь $a>1$, $0<\varepsilon<1$ и будут подобраны позже.

Очевидно, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}\sin^2\frac{t_0x}{2}\,q(x)\,dx\geqslant\varepsilon\int\limits_{R_1}q(x)\,dx=\varepsilon Q(R_1). \tag{4}$$

Согласно соотношениям (2) и (4) имеем

$$Q(R_1)\leqslant\frac{\delta}{4\varepsilon}. \tag{5}$$

Так как

$$Q(R_2)=\frac{1}{2}-Q(R_1)$$

и

$$Q(R_2)=Q(R_2^{(1)})+Q(R_2^{(2)})=\int\limits_{R_2^{(1)}}q(x)\,dx+\int\limits_{R_2^{(2)}}q(x)\,dx,$$

а

$$R_2^{(2)}\subset\{x:x>Q\sqrt{2}\,\sigma\},$$

и поэтому

$$Q(R_2^{(2)})=\int\limits_{R_2^{(2)}} q(x)\,dx\leqslant\int\limits_{Q\sqrt{2}\sigma}^{\infty} q(x)\,dx\leqslant\frac{1}{2a^2},$$

то используя неравенство (5), легко получаем

$$Q(R_2^{(1)})\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{\delta}{4\varepsilon},$$

то есть

$$Q(R_2^{(1)})\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{a^2-1}{a^2}-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right]. \tag{6}$$

Известно, что

$$|\sin z|\geqslant\frac{2}{\pi}(z),$$

где через (z) обозначено кратчайшее расстояние до целого кратного числа π, т. е.

$$(z)=\min|z-k\pi|,$$

где минимум берётся по всем целым k. Поэтому, если только $|\sin(z)|<<\sqrt{\varepsilon}$, то тем более $\frac{2}{\pi}(z)<\sqrt{\varepsilon}$. И так получаем, что

$$R_2^{(1)}\subset\left\{x:0\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}\sigma,\quad\left|x-\frac{2k\pi}{t_0}\right|<\frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{t_0},\quad k=0,\ 1,\ \dots\right\}=\tilde{R}_2^{(1)},$$

и, следовательно,

$$Q(R_2^{(1)})\leqslant Q(\tilde{R}_2^{(1)}). \tag{7}$$

Но так как $0\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}\sigma$, то $0\leqslant k\leqslant\frac{a\sqrt{2}\sigma t_0}{2\pi}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$. Поэтому, при $t_0\geqslant\geqslant\pi\sigma^{-1}$, число интервалов множества $\tilde{R}_2^{(1)}$ не превосходит $\frac{1}{2\pi}\left[(1+a\sqrt{2})\sigma t_0++\pi\sqrt{\varepsilon}\right]$. Простым подсчётом получаем, что

$$Q(\tilde{R}_2^{(1)})\leqslant\frac{\sigma C\sqrt{\varepsilon}}{2}\left[(1+a\sqrt{2})+\frac{\sqrt{\varepsilon}\pi}{\sigma t_0}\right].$$

Имеем, что $\varepsilon<1$, а $t_0\geqslant\pi\sigma^{-1}$. Поэтому

$$Q(\tilde{R}_2^{(1)})\leqslant\frac{\sigma C\sqrt{\varepsilon}}{2}(a\sqrt{2}+2). \tag{8}$$

Согласно неравенствам (6), (7) и (8), имеем, что

$$\frac{\sigma C\sqrt{\varepsilon}}{2}(a\sqrt{2}+2)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-1}{a^2}-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right)$$

или

$$\delta\geqslant 2\varepsilon\frac{a^2-1}{a^2}-2\varepsilon^{\frac{3}{2}}\sigma C(a\sqrt{2}+2). \tag{9}$$

Обозначим $\sqrt{\varepsilon}=u$, и из неравенства (9) получим

$$\delta\geqslant\max_{0<u<1}\left[2u^2\frac{a^2-1}{a^2}-2u^3\sigma C(a\sqrt{2}+2)\right].$$

Легко находим, что этот максимум достигается, когда

$$u=\frac{2(a^2-1)}{3\sigma C a^2(a\sqrt{2}+2)}. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\delta\geqslant\frac{8(a^2-1)^3}{27\sigma^2C^2a^6(a\sqrt{2}+2)^2}.$$

Надо лишь удостовериться, что $\sqrt{\varepsilon}=u$, найденный по формуле (10), действительно меньше единицы.

Известно, что

$$\sigma^2 C^2 \geqslant \frac{1}{12}. \tag{11}$$

Поэтому из неравенства (10), используя неравенство (11), получаем

$$\sqrt{\varepsilon} \leqslant \frac{4\sqrt{3}\,(a^2-1)}{3a^2(a\sqrt{2}+2)} < 1,$$

если только $a>1$. Такое a мы всегда можем взять, так как её мы выбираем по произволу.

Число δ не зависит и от a. Поэтому

$$\delta \geqslant \frac{8}{27\sigma^2 C^2} \max_{a>1} \frac{(a^2-1)^3}{a^6(a\sqrt{2}+2)^3} = \frac{\alpha_1}{\sigma^2 C^2}.$$

Ясно, что $\alpha_1>0$, так как функция $\dfrac{(a^2-1)^3}{a^6(a\sqrt{2}+2)^3}$ положительна при $a>1$. Из соотношения (2), используя последнее неравенство, получаем при $|t|\geqslant\pi\sigma^{-1}$, что

$$|f(t)|^2 \leqslant 1-\frac{\alpha_1}{C^2\sigma^2}. \tag{12}$$

Следовательно, при $|t|\geqslant\dfrac{\pi}{\sigma}$, имеет место неравенство

$$|f(t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha}{C^2\sigma^2}\right).$$

Здесь $\alpha=\dfrac{\alpha_1}{2}>0$.

Тем наша лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ имеет плотность $p(x)$. Если при отсечении этой плотности на уровне $\overline{C}$ мы получаем $0<Q(\overline{C})<\frac{1}{4}$ и $\bar{\sigma}^2<\infty$, то при $|t|\geqslant\pi\bar{\sigma}^{-1}$*

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha\,[1-4Q(\overline{C})]}{\overline{C}^2\bar{\sigma}^2}\right\},$$

где α — абсолютная константа.

Доказательство. Имеем $p(x)=\bar{p}(x)+\bar{\bar{p}}(x)$. Пусть

$$p^*(x)=\lambda\bar{p}(x), \quad \text{где} \quad \lambda^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{p}(x)\,dx$$

и

$$p^{**}(x)=\mu\bar{\bar{p}}(x), \quad \text{где} \quad \mu^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{p}}(x)\,dx=Q(\overline{C}),$$

тогда

$$p(x)=\frac{1}{\lambda}p^*(x)+\frac{1}{\mu}p^{**}(x).$$

Очевидно, что $p^*(x)$ и $p^{**}(x)$ суть плотности, а $\lambda^{-1}+\mu^{-1}=1$. Поэтому будем иметь

$$f(t)=\lambda^{-1}f^*(t)+\mu^{-1}f^{**}(t) \quad \text{и} \quad |f(t)|\leqslant 1-\lambda^{-1}\Big[1-|f^*(t)|\Big].$$

Так как $\lambda^{-1}=1-Q(\overline{C})$, то

$$|f(t)| \leqslant 1-\Big[1-Q(\overline{C})\Big]\Big[1-|f^*(t)|\Big]. \tag{13}$$

Имеем, что

$$p^*(x) \leqslant \lambda \bar{C} = \frac{\bar{C}}{1-Q(\bar{C})}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p^*(x)\,dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \bar{p}(x)\,dx = \frac{\bar{\sigma}^2}{1-Q(\bar{C})}.$$

Используя неравенство 12, получаем при $|t| \geqslant \pi \sqrt{1-Q(\bar{C})}\,\bar{\sigma}^{-1}$

$$|f^*(t)|^2 \leqslant 1 - \frac{\alpha_1 [1-Q(\bar{C})]^3}{\bar{C}^2 \bar{\sigma}^2}$$

или

$$|f^*(t)|^2 \leqslant 1 - \frac{\alpha_1 [1-Q(\bar{C})]^3}{2\bar{C}^2 \bar{\sigma}^2}.$$

Подставляя в неравенство 13 это выражение, получаем, что при $|t| \geqslant \pi \bar{\sigma}^{-1}$

$$|f(t)| \leqslant 1 - \frac{\alpha_1 [1-Q(\bar{C})]^4}{2\bar{C}^2 \bar{\sigma}^2} \tag{14}$$

или

$$|f(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{\alpha [1-4Q(\bar{C})]}{\bar{C}^2 \bar{\sigma}^2} \right\},$$

что и доказывает лемму.

Очевидно, неравенство леммы будет тривиальным, если $1-4Q(\bar{C}) < 0$.

Лемма 3. *Пусть случайные величины последовательности независимых случайных величин $\{\xi_k\}$ имеют плотности $p_k(x)$ и $D\xi_k = \sigma_k^2$, $k=1, 2, \ldots$. Если удовлетворены следующие условия:*

1. *Существует конечное число M такое, что $\bar{C}_k^2 \bar{\sigma}_k^2 \leqslant M$, $k=1, 2, \ldots$,*

2. $$\bar{\bar{B}}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k(\bar{C})}{\bar{C}_k^2} = o(B_n^2),$$

то для достаточно больших n, при $|t| \leqslant \pi B_n (\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}$, имеет место следующая оценка

$$|\bar{f}_n(t)| \leqslant \exp(-ct^2),$$

где $c>0$ — константа, зависящая только от M.

Доказательство. Согласно неравенству (14), имеем

$$\left| \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \right| \leqslant 1 - \frac{\alpha_1 [1-4Q_k(\bar{C})]}{2\bar{C}_k^2 \bar{\sigma}_k^2},$$

если только $|t| \geqslant \pi B_n \bar{\sigma}_k^{-1}$. Воспользуемся следующей леммой Крамера [1].

Если $f(t)$ — характеристическая функция такая, что $|f(t)| \leqslant a < 1$ при $|t| \geqslant b$, то при $|t| < b$

$$|f(t)| \leqslant 1 - (1-a^2)\frac{t^2}{8b^2}.$$

В нашем случае из этой леммы следует, что при $|t| < \pi B_n \bar{\sigma}_k^{-1}$

$$\left| \varphi_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \right| \leqslant \exp\left\{ -\frac{\tilde{\alpha} t^2 [1-4Q_k(\bar{C})]}{B_n^2 \bar{C}_k^2} \right\}. \tag{15}$$

Так как $\bar{C}_k^2\bar{\sigma}_k^2 \leqslant M$, то $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{C}_k^2} \geqslant \bar{B}_n^2 M^{-1}$. Но $\bar{B}_n^2 = B_n^2 - \bar{\bar{B}}_n^2$, следовательно, используя условие второе, получаем при больших n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-4Q_k(\bar{C})}{\bar{C}_k^2} \geqslant \frac{a_1 B_n^2}{M}, \quad a_1 > 0. \tag{16}$$

Обозначив $\frac{Q_1}{M} = c$, получаем при $|t| \leqslant \pi B_n (\max_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}$, что

$$|\bar{f}_n(t)| \leqslant \exp(-ct^2).$$

4. **Доказательство теоремы 1.** Так как случайные величины последовательности (1) имеют ограниченные плотности, то и нормированная сумма тоже будет иметь плотность, и

$$\bar{p}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \bar{f}_n(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$2\pi |p_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|\, dt \leqslant \int_{-A}^{A} |\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}|\, dt + \int_{|t|>A} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt +$$
$$+ \int\limits_{A<|t|\leqslant \pi B_n(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}} |\bar{f}_n(t)|\, dt + \int\limits_{\pi B_n(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi B_n(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}} |\bar{f}_n(t)|\, dt +$$
$$+ \int\limits_{|t|>\pi B_n(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}} |\bar{f}_n(t)|\, dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \tag{17}$$

Из первого условия теоремы следует, что для любого конечного A

$$I_1 \to 0, \quad \text{если} \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ можем найти $A_0 = A_0(\varepsilon)$, такое, что

$$I_2 = \int_{|t|>A} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt < \varepsilon, \quad \text{если только} \quad A > A_0. \tag{19}$$

Используя лемму 2, получаем, что

$$I_3 \leqslant \int_{|t|>A} e^{-ct^2}\, dt,$$

следовательно,

$$I_3 \to 0, \quad \text{если} \quad A \to \infty, \tag{20}$$

так как $\exp(-ct^2)$ — интегрируемая функция.

При оценке I_4 поступаем следующим образом

$$I_4 = \int\limits_{\pi B_n(\max^{(1)}_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi B_n(\max^{(2)}_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}} |\bar{f}_n(t)|\, dt + \int\limits_{\pi B_n(\max^{(2)}_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi B_n(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k)^{-1}} |f_n(t)|\, dt = I_4^{(1)} + I_4^{(2)}. \tag{21}$$

Из неравенства (15) и леммы второй получаем при $\frac{\pi B_n}{\max^{(1)}_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi B_n}{\max^{(2)}_{1\leqslant k\leqslant n} \bar{\sigma}_k}$,

$$|\bar{f}_n(t)| \leqslant \exp\left\{ \frac{\bar{\alpha} t^2}{B_n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1-4Q_k(\bar{C})}{\bar{C}_k^2} - \frac{1-4Q_{r_1}(\bar{C})}{\bar{C}_k^2} \right) - \frac{\alpha[1-4Q_{r_1}(\bar{C})]}{M} \right\}.$$

Здесь r_1 находим из условия $\max\limits_{1\le k\le n}^{(1)}\bar{\sigma}_k=\bar{\sigma}_{r_1}$. Рассуждая как и при доказательстве леммы третьей, получим, что при $\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\le k\le n}^{(1)}\bar{\sigma}_k}\le|t|\le\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\le k\le n}^{(2)}\bar{\sigma}_k}$,

$$|\bar{f}_n(t)|\le\exp(-\tilde{c}t^2),$$

где $\tilde{c}>0$. Следовательно,

$$I_4^{(1)}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{22}$$

Далее, используя неравенство (15), получаем, что

$$I_4^{(2)}\le B_n\cdot\exp\left\{-\frac{\bar{\alpha}\pi^2}{\max\limits_{1\le k\le n}^{(3)}\bar{\sigma}_k}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-4Q_n(\bar{C})}{\bar{C}_k^2}-\frac{1-4Q_{r_1}(\bar{C})}{\bar{C}_{r_1}^2}-\frac{1-4Q_{r_2}(\bar{C})}{\bar{C}_{r_2}^2}\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{r_1}(t)||\varphi_{r_2}(t)|\,dt. \tag{23}$$

Из неравенства (16) и условий теоремы следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-4Q_k(\bar{C})}{\bar{C}_k^2}-\frac{1-4Q_{r_1}(\bar{C})}{\bar{C}_{r_1}^2}-\frac{1-4Q_{r_2}(\bar{C})}{\bar{C}_{r_2}^2}\ge\frac{a_2}{M}B_n^2, \qquad a_2>0. \tag{24}$$

Кроме того, имеем, что

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{r_1}(t)||\varphi_{r_2}(t)|\,dt\right]^2\le\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{r_1}(t)|^2\,dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{r_2}(t)|^2\,dt.$$

Используя представление $p_k(x)=\bar{p}_k(x)+\bar{\bar{p}}_k(x)$ и соотношение [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)]^2\,dx,$$

а также второе условие теоремы, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_k(t)|^2\,dt\le(N+1)\bar{C}_k.$$

r_1, r_2 подбираем из условия $\max\limits_{1\le k\le n}^{(i)}\bar{\sigma}_k=\bar{\sigma}_{r_i}$, $i=1,\ 2$. Тогда будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{r_i}(t)|^2\,dt\le\bar{C}_{r_i}(N+1), \qquad i=1,\ 2.$$

Отсюда, используя условие $\bar{C}_k^2\bar{\sigma}_k^2\le M$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{r_1}(t)||\varphi_{r_2}(t)|\,dt\le\frac{M(N+1)}{\max\limits_{1\le k\le n}^{(3)}\bar{\sigma}_k}. \tag{25}$$

Из неравенств (23)–(25) и следует, что

$$I_4^{(2)}\to 0, \qquad n\to\infty. \tag{26}$$

Оценим интеграл I_5. Согласно лемме второй и второму условию теоремы, имеем

$$I_5\le B_n b\exp\left\{-\frac{\alpha}{M}\left[n-4\sum_{k=1}^{n}Q_k(\bar{C})\right]\right\}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_1(t)||\varphi_2(t)|\,dt\le$$

$$\le b\sqrt{C_1C_2}\,B_n\exp\left\{-\frac{\alpha}{M}\left[n-4\sum_{k=1}^{n}Q_k(\bar{C})\right]\right\}.$$

Из четвёртого условия теоремы имеем, что $n-4\sum_{k=1}^{n} Q_k(\overline{C}) \geqslant a_3 n$, $a_3>0$, а из первого условия теоремы следует, что $B_n = o(e^{\beta n})$ для любого $\beta>0$, следовательно,

$$I_5 \to \infty \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{27}$$

Утверждение теоремы следует из соотношений (17)–(20), (26) и (27).

Доказательство теоремы 2. Теорему достаточно доказать только для $m=2$, так как справедливость её при $m=0$ очевидна. Когда $m=2$, имеем

$$2\pi x^2 |\overline{p}_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{f}_n''(t)-(e^{-\frac{t^2}{2}})''|\,dt \leqslant \int_{-A}^{A} |\overline{f}_n''(t)-(e^{-\frac{t^2}{2}})''|\,dt+$$

$$+\int_{|t|>A} |(e^{-\frac{t^2}{2}})''|\,dt+\int_{A<|t|\leqslant\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}} |\overline{f}_n''(t)|\,dt+\int_{\frac{\pi B_n}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}<|t|\leqslant\frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}} |\overline{f}_n''(t)|\,dt+$$

$$+\int_{|t|\geqslant\frac{\pi B_n}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}} |\overline{f}_n(t)|\,dt = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4+\mathrm{I}_5. \tag{28}$$

Для оценки I_1 используем следующую лемму [2].

Пусть $\{k_n(x)\}$ — последовательность плотностей с нулевыми средними и дисперсиями равными единице и пусть $k_n(x)\to k(x)$ при $n\to\infty$ равномерно, где $k(x)$ — плотность с нулевым средним и единичной дисперсией. Если $\{h_n(t)\}$ — последовательность соответствующих характеристических функций и $h(t)$ — характеристическая функция плотности $k(x)$, то $h_n''(t)\to h''(t)$ при $n\to\infty$ равномерно.

Последовательность $\{\overline{p}_n(x)\}$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют требованиям леммы. Поэтому

$$\overline{f}_n''(t)\to(e^{-\frac{t^2}{2}})'' \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

равномерно. Следовательно, для любого конечного A

$$I_1\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{29}$$

Так как $(e^{-\frac{t^2}{2}})''=(t^2-1)\,e^{-\frac{t^2}{2}}$, то для любого $\varepsilon>0$

$$I_2=\int_{|t|>A} |t^2-1|\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqslant\varepsilon, \tag{30}$$

лишь только A достаточно велико.

Заметим, что

$$\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{B_n}} p_k(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{itx}{B_n}e^{\frac{i\Theta tx}{B_n}}\right)\frac{ix}{B_n}p_k(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\left|\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_k^2|t|}{B_n^2}, \tag{31}$$

а

$$\left|\varphi_k''\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_k^2}{B_n^2}. \tag{32}$$

Но так как

$$\bar{f}_n''(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k''\left(\frac{t}{B_n}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\varphi_j\left(\frac{t}{B_n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\varphi_j'\left(\frac{t}{B_n}\right)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n}\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right), \tag{33}$$

то, согласно неравенствам (31) и (32), получаем

$$|\bar{f}_n''(t)|\leqslant(1+t^2)\max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n}\left|\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|. \tag{34}$$

Из неравенства (15), имея в виду то, что $Q_k(\bar{C})=0$, $k=1, 2, \ldots,$ получаем при $|t|\leqslant\pi B_n(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}$,

$$\max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n}\left|\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha}t^2}{B_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}-\max_{1\neq k\neq n}\frac{2}{C_k^2}\right)\right\}.$$

Из неравенства $C_k^2\sigma_k^2\geqslant\frac{1}{12}$ следует, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{2}{C_k^2}\leqslant 24\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2.$$

Поэтому, согласно второму и первому условиям теоремы, имеем для достаточно больших n

$$\frac{1}{B_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k^2}-\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{2}{C_k^2}\right)\geqslant\frac{a_4}{M},$$

где $a_4>0$. Обозначив $\frac{\tilde{\alpha}a_4}{M}$ через a_5, получаем при $|t|\leqslant\pi B_n(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}$

$$\max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n}\left|\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\exp\{-a_5t^2\}. \tag{35}$$

Из неравенств (34) и (35) следует, что при $|t|\leqslant\pi B_n(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}$

$$|\bar{f}_n''(t)|\leqslant(1+t^2)\exp\{-a_5t^2\}.$$

Используя это неравенство для оценки I_3, получаем

$$I_3\leqslant\int_{|t|>A}(1+t^2)e^{-a_5t^2}dt\to 0, \tag{36}$$

если только $A\to\infty$, так как $t^2e^{-a_5t^2}$ — интегрируемая функция.

Для оценки I_5, используя неравенства (32) и $\left|\varphi_k'\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \frac{M|\xi_k|}{B_n}$ из соотношения (33), получаем, что

$$|\bar{f}_n''(t)| \leqslant \left[1 + \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} M|\xi_k|\right)^2}{B_n^2}\right] \max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n} \left|\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|.$$

Известно [1], что $\sum_{k=1}^{n} M|\xi_n| \leqslant \sqrt{n}B_n$, следовательно,

$$|\bar{f}_n''(t)| \leqslant (n+1) \max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n} \left|\varphi_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|.$$

Используя лемму 1, получаем

$$\mathbf{I}_5 \leqslant (n+1)\exp\left\{-\frac{\alpha}{M}n + \frac{48\alpha}{M}\right\} B_n \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{r_1}(t)|\,|\varphi_{r_2}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)\sqrt{C_{r_1}C_{r_2}}B_n \exp\left\{-\frac{\alpha}{M}n + \frac{48\alpha}{M}\right\}.$$

Согласно соотношению $B_n = o(e^{\beta n})$, $\beta > 0$, имеем

$$\mathbf{I}_5 \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{37}$$

Теперь оценим $\mathbf{I}_4$. Используя неравенство (34), можем записать

$$\mathbf{I}_4 \leqslant C \frac{B_n^3}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k^2} \int\limits_{\frac{\pi}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k}} \max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n} |\varphi_r(t)|\,dt.$$

Из неравенства (15) легко заключаем, что при $|t| \geqslant \pi(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k)^{-1}$,

$$\max_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j\neq k}}^{n} |\varphi_r(t)| \leqslant |\varphi_{L_1}(t)|\,|\varphi_{L_2}(t)| \exp\left\{-\frac{\alpha_2(B_n^2 - K)}{M\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2}\right\},$$

где $K \leqslant 48$. Следовательно, согласно третьему условию теоремы, будет верно неравенство

$$\mathbf{I}_4 \leqslant \bar{C} B_n^{3+2k} \exp\left\{-\frac{\alpha_2}{M} B_n^{2(1-\rho)}\right\} \to 0, \tag{38}$$

при $n \to \infty$.

Утверждение теоремы следует из неравенств (29), (30), (36)–(38).

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Статулявичюсу за внимание к настоящей работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
20.I.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
2. W. L. Smith. A frequency-function form of the central limit theorem, Proc. Cambridge Philos. Soc., 49, 3 (1953), 462–472.
3. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.–Л., 1948.

APIE RIBINĘ LOKALINĘ TEOREMĄ TANKIAMS

P. SURVILA

(Reziumė)

Tegu $\{\xi_k\}$ — seka nepriklausomų atsitiktinių dydžių su tankiais $p_k(x) \leqslant C_k$, $M\xi_k = 0$ ir $D\xi_k = \sigma_k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, ir $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $\bar{p}_n(x)$ — normuotos sumos $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ pasiskirstymo tankis.

Darbe duodamos pakankamos sąlygos, kad nurodytai sekai galiotų pareinamybės:

1. Tolygiai pagal x, $\left| \bar{p}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \to 0$, kai $n \to \infty$,

2. Tolygiai pagal x ir $0 \leqslant m \leqslant 2$, $|x|^m \left| \bar{p}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \to 0$, kai $n \to \infty$.

ÜBER DEN LOKALEN GRENZWERTSATZ FÜR DEN DICHTEFUNKTIONEN

P. SURWILA

(Zusammenfassung)

Es sei

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

eine Folge unabhängigen Zufallsgrößen mit den Dichtefunktionen $p_k|x| \leqslant C_k$, mit den Mittelwerten $M\xi_k = 0$ und mit den Dispersionen $D\xi_k = \sigma_k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ und $\bar{p}(x)$ — die Dichtefunktion der normierten Summe $\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Im vorliegenden Artikel gibt man die hinreichende Bedingungen, daß für die Folge (1) der Zufallsgrößen die folgenden Relationen:

1. Gleichmäßig in x, $\left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \to \infty$, wenn $n \to \infty$,

2. Gleichmäßig in x, und für alle m $(0 \leqslant m \leqslant 2)$,

$$|x|^m \left| \bar{p}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \to 0, \quad \text{wenn} \quad n \to \infty.$$

gelte.