III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

О СТИРАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ *

С. Я. ХАВИНСОН

I

Зачатки теории устранимых множеств особых точек аналитических функций содержатся в теореме Лиувилля, утверждающей, что ограниченная целая функция тождественно равна постоянной, и в теореме Вейерштрасса об устранимой особенности однозначной, аналитической и ограниченной функции. Но историю этой проблемы следует, по-видимому, начинать с появления в 1888 г. работы Пенлеве. Изучению различных аспектов этой проблемы посвящен длинный ряд работ таких математиков, как Зоретти, Помпейу, Данжуа, Голубев, Лузин, Привалов, Альфорс, Бейрлинг, Неванлинна, Карлесон, Ароншайн, Сарио, Рудин, Цудзи, Витушкин и многих других**.

Нам сперва надлежит познакомиться с метрическими свойствами множеств. Приводимый в связи с этим аппарат существенно используется не только для изучения проблемы о стирании особенностей, но и в других исследованиях.

Напомним сперва некоторые понятия из теории меры.

Неотрицательная функция множеств $\mu(E)$, $\mu(E)\geqslant 0$, приписанная всем множествам в эвклидовом пространстве, называется **внешней мерой Каратеодори**, если

1. $\mu(A)\geqslant\mu(B)$ при $A\supset B$,

2. $\mu(e_1+e_2+e_3+\ldots)\leqslant\mu(e_1)+\mu(e_2)+\mu(e_3)+\ldots$ для любой конечной или счетной последовательности множеств e_1, e_2, e_3, ...,

3. $\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$, если расстояние между множествами A и B положительно.

Внешняя мера Каратеодори является мерой Бореля: т. е.

$$\mu(e_1+e_2+e_3+\ldots)=\mu(e_1)+\mu(e_2)+\mu(e_3)+\ldots,$$

если e_1, e_2, e_3, ... — последовательность непересекающихся борелевских множеств.

Рассматриваются также действительные и комплексные меры Бореля: μ — действительная мера Бореля, если $\mu=\mu_1-\mu_2$, где μ_1 и μ_2 — положительные меры Бореля, а $\mu=\mu^{(1)}+i\mu^{(2)}$ — комплексная мера Бореля, если $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ — действительные меры Бореля.

* Эта работа представляет собой краткий конспект лекций, прочитанных автором в Вильнюсском государственном университете им. В. Капсукаса.

** Ряд из этих работ, непосредственно связанных с нашим дальнейшим изложением, приведен в списке литературы.

Мера Хаусдорфа. Пусть $h(t)$, $h(0)=0$ — непрерывная монотонно возрастающая функция в интервале $0 \leqslant t \leqslant \beta$ и E — некоторое множество точек плоскости. Покроем множество E конечным или счетным числом квадратов K_i со сторонами d_i, $d_i \leqslant \rho$, $\rho \leqslant \beta$. Обозначим

$$H(\rho)=\inf_{d_i<\rho} \sum_i h(d_i)$$

(нижняя граница по всем возможным покрытиям квадратами со сторонами меньшими ρ). $H(\rho)$ — очевидно, возрастающая функция. Ее предел обозначим через $h(E)$:

$$\lim_{\rho\to 0} H(\rho)=h(E),$$

и назовем хаусдорфовой мерой множества E (соответствующей функции $h(t)$, или h — мерой). Эта мера является внешней мерой Каратеодори и, следовательно, мерой Бореля.

Важные примеры этой меры получаются при $h(t)=t^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 2$ (эти меры будем обозначать через L_α) и при $h(t)=\frac{1}{-\lg t}$ (логарифмическая мера L). Заметим, что $L_1(E)$ означает длину множества E, а $L_2(E)$ — плоскую меру Лебега множества E. Мера $L_\alpha(E)$ убывает, очевидно, при возрастании α.

Много применений имеет следующая

Лемма (*Картана, Фростмана и Цудзи*). *Пусть E — замкнутое ограниченное множество, мера h которого положительна: $h(E)>0$. Существует такая положительная масса μ (борелевская мера μ), сосредоточенная на множестве E, $\mu(E)>0$, что для любого круга $|z-a|<r$ (a и r, $r>0$ — произвольные числа) будет $\mu(\Delta_r)\leqslant h(r)$, где Δ_r — пересечение множества E с кругом $|z-a|<r$.* (Доказательство — этим словом указывается, что на лекции было приведено доказательство теоремы).

Потенциал. Пусть $H(r)$, $r>0$ — непрерывная монотонно убывающая функция, $H(r)\to+\infty$ при $r\to 0$, и μ — единичная масса, распределенная на E:

$$\mu(E)=\int_E d\mu=1.$$

Рассмотрим вещественную функцию комплексного переменного*

$$v(z)=\int_E H(|t-z|)\,d\mu_t. \tag{1}$$

Функцию $v(z)$ называют потенциалом („обобщенным"), соответствующим ядру $H(r)$ и мере μ. Если $H(r)=-\lg r$, то получаем логарифмический потенциал, а при $H(r)=r^{-\alpha}$ потенциал Ньютона порядка α, $\alpha>0$.

Обозначим

$$V_H=\inf_{\mu}\sup_{z} v(z)$$

(sup берется по всем точкам z комплексной плоскости, а inf по всем возможным положительным мерам, распределенным на множестве E, $\mu(E)=1$. Число

$$\gamma_H(E)=H^{-1}(V_H)$$

---

* Значок t при μ означает интегрирование по t.

называется H-емкостью множества E. Это определение емкости оправдывается исторически для случая логарифмической емкости (названия логарифмическая и ньютоновская приписываются емкости так же, как и потенциалу).

Нам будет удобнее определить емкость равенством

$$\tilde{\gamma}_H(E)=\frac{1}{V_H}.$$

В дальнейшем численное значение емкости не играет важной роли, но весьма важны качественно различающиеся случаи $\tilde{\gamma}_H(E)=0$ и $\tilde{\gamma}_H(E)>0$. Очевидно, что при различении этих случаев и $\tilde{\gamma}_H(E)$ и $\gamma_H(E)$ дают тот же результат.

Заметим еще, что для того, чтобы емкость множества E была положительной: $\tilde{\gamma}_H(E)>0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая мера μ, $\mu(E)>0$, для которой функция (1) ограничена в комплексной плоскости; для равенства же $\tilde{\gamma}_H(E)=0$ необходимо и достаточно, чтобы функция (1) была неограниченной при любой мере μ, $\mu\neq 0$. Сказанное непосредственно следует из определения. Нетрудно усмотреть, что

$$\tilde{\gamma}_H(E)=\sup_{|v(z)|\leqslant 1}\int_E d\mu, \tag{2}$$

где sup берется по всем таким μ, для которых соответствующая функция $v(z)$ из (1) оказывается $\leqslant 1$ (очевидно, что здесь масса μ не нормируется, как прежде, условием $\mu(E)=1$).

Мы здесь указали подход к понятию емкости посредством рассмотрения ограниченных потенциалов. Полезен также подход к этому понятию с позиции интеграла энергии.

Интеграл энергии. Интеграл (E, μ и $H(r)$ имеют тот же смысл, что в определении потенциала)

$$R(\mu)=\int_E\int_E H(|t-z|)\,d\mu_t\,d\mu_z$$

называется интегралом энергии. Обозначим

$$\inf_\mu R(\mu)=V_H^*\leqslant V_H,\quad \mu(E)=1,\quad \gamma_H^*(E)=\frac{1}{V_H^*}.$$

Число γ_H^* называется обобщенной H-емкостью. Нетрудно проверить, что

$$\gamma_H^*(E)\geqslant\tilde{\gamma}_H(E),$$

но при достаточно правильной функции $H(r)$ в предыдущих неравенствах имеет место только знак равенства. В частности, так будет для логарифмического и ньютоновского случая: $H(r)=-\lg r$, $H(r)=r^{-\alpha}$. Во всяком случае из равенства $\gamma_H^*(E)=0$ следует равенство $\tilde{\gamma}_H(E)=0$.

Литература: 7, 9, 10, 28, 35, 37.

II

Обозначим через γ и γ_α логарифмическую и α-ньютоновскую емкость и начнем с обзора некоторых результатов о емкости.

1. Фекете рассматривал абсолютную величину определителя Вандермонда, образованного для точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, из множества E:

$$V_n = \Pi\,|z_i - z_j|, \qquad i<j,$$

и ввел величину

$$\tau(E) = \lim \sqrt[\frac{n}{2}]{V_n^*}, \quad V_n^* = \max_{z_1, z_2, \ldots, z_n} V_n,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n \in E$. Сеге доказал, что $\tau(E) = \gamma(E)$.

2. Пусть

$$d_n = \inf_{c_1, c_2, \ldots, c_n} \max_{z\in E} |z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n|$$

(d_n — максимум модуля при $z\in E$ многочлена, наименее отклоняющегося от нуля на множестве E). Фекете доказал, что существует предел

$$\rho(E) = \lim \sqrt[n]{d_n}$$

($\rho(E)$ — **константа Чебышева**), причем $\rho(E) = \tau(E)$. По упомянутой теореме Сеге $\gamma(E) = \tau(E) = \rho(E)$.

3. Пусть E — континуум, $f(z)$ — аналитическая вне E функция, удовлетворяющая неравенству $|f(z)| \leqslant 1$. Пусть в окрестности точки $z = \infty$

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots.$$

Рассмотрим величину

$$\Omega(E) = \sup_f |c_{-1}|.$$

Из простых рассуждений следует, что $\gamma(E) = \Omega(E)$. Напоминаем, что E — континуум, если же E не континуум, а ограниченное замкнутое множество, то $\gamma(E) > \Omega(E)$.

4. Пусть $g(z, \infty)$ — функция Грина для дополнения к замкнутому ограниченному множеству E с полюсом в точке $z = \infty$. Эта функция существует тогда и только тогда, если $\gamma(E) > 0$. В последнем случае

$$\gamma(E) = \exp[-u(\infty)],$$

где $u(z)$ — гармоническая вне множества E функция, определенная равенством

$$g(z, \infty) = \ln|z| + u(z)$$

$u(\infty)$ называется **константой Робена** для E.

5. γ_H не является аддитивной функцией множества, но при $H(r) = r^{-1}$

$$\gamma_1(E_1 + E_2) \leqslant \gamma_1(E_1) + \gamma_2(E_2).$$

Для других ядер имеются также неравенства аналогичного характера. Нам важно отметить, что

$$\gamma_H(E_1 + E_2 + \ldots) = 0$$

для любой счетной или конечной последовательности замкнутых ограниченных множеств, если только

$$\gamma_H(E_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

6. Имеет место неравенство

$$\gamma(E) \geqslant \sqrt{\frac{L_2(E)}{\pi}}$$

(γ — логарифмическая емкость, L_2 — лебегова мера). Таким образом, $L_2(E)=0$, если $\gamma(E)=0$.

Известно также, что $\gamma(E)>0$, если E — континуум; значит, $\gamma(E)=0$ может быть только для всюду разрывного множества (для множества, не содержащего никакого континуума).

7.

$$\gamma(E) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\, d(E),$$

где $d(E)$ — диаметр множества E.

Следующие две теоремы указывают на связь между емкостями и мерами Хаусдорфа.

Теорема 1. *Если*

$$h(E)>0 \ \text{и} \ -\int\limits_0 h(r)\, H'(r)\, dr < +\infty,$$

то $\gamma_H(E)>0$. (Доказательство).

Теорема 2. *Пусть*

$$\gamma_H^*(E)>0.$$

Если

$$h(r)=\frac{1}{H(r)},$$

то $h(E)>0$ *и, более того,* $h(E)=\infty$. (Доказательство).

Первая теорема дает условие, при котором из положительности h-меры множества E следует положительность H-емкости этого множества. Вторая теорема является в некоторой мере обратной к первой. Расхождение между этой теоремой и обратной мы еще обсудим, но прежде укажем на несколько следствий из этих теорем.

1. **Теорема Фростмана.** *Если*

$$h(E)>0 \tag{3}$$

и

$$\int\limits_0 \frac{h(r)}{r}\, dr < \infty, \tag{4}$$

то $\gamma(E)>0$ (γ-лог. емкость).

В самом деле, достаточно заметить, что

$$H(r)=-\lg r, \quad H'(r)=-\frac{1}{r},$$

и применить теорему 1.

2. Если $L_\alpha(E)>0$, то $\gamma(E)>0$. Это непосредственно следует из теоремы Фростмана. Таким образом, $L_\alpha(E)=0$, если $\gamma(E)=0$.

3. Если

$$h(E)>0 \ \text{и} \ \int\limits_0 \frac{h(r)}{r^{1+\alpha}}\, dr < \infty,$$

то $\gamma_\alpha(E)>0$ (γ_α — α-ньютоновская емкость).

4. Если $L_\beta(E)>0$ и $\beta>\alpha$, то $\gamma_\alpha(E)>0$. Значит, $L_\beta(E)=0$, если $\beta>\alpha$ и $\gamma_\alpha(E)=0$.

Следствия 2, 3, 4 вытекают из теоремы 1 так же просто, как и следствие 1.

5. Теорема Эрдеша и Гиллиса. *Если* $\gamma(E)>0$, *то* $L(E)=\infty$ (γ и L – лог. емкость и мера). *Другими словами, если* $L(E)<\infty$ *то* $\gamma(E)=0$.

Эта теорема, для которой Эрдеш и Гиллис привели весьма сложное доказательство, непосредственно следует из теоремы 2, если заметить, что в рассматриваемом случае

$$h(r)=-\frac{1}{\lg r},\quad H(r)=-\lg r.$$

Заметим, что равнее Линдеберг установил частный случай результата Эрдеша – Гиллиса: если $L(E)=0$, то $\gamma(E)=0$.

Теорема Эрдеша-Гиллиса показывает, что если

$$\int_0 \frac{h(r)}{r}\,dr$$

расходится $\left(\text{здесь } h(r)=-\frac{1}{\lg r}\right)$, то из условия $h(E)>0$ не должно, вообще говоря, вытекать условие $\gamma(E)>0$.

Попытки обратить теорему Фростмана велись в следующем направлении: если $\gamma(E)>0$, то доказать существование функции $h(r)$ такой, чтобы имели место (3) и (4). Эта попытка увенчалась успехом в случае, когда E – обобщенное канторовское множество (определение такого множества см. несколько ниже). Карлесон же построил *пример множества E, лежащего на единичном отрезке, со следующими свойствами*: 1) $\gamma(E)>0$, 2) $h(E)=0$ *для любой функции* $h(r)$, *удовлетворяющей условию* (4).

Обратимся к вопросу о расхождении (а тем самым и близости) между теоремой 2 и обратным предложением к теореме 1. Рассмотрим для этого случай α-ньютоновской меры и емкости (в этом случае

$$\left.H(r)=r^{-\alpha},\ h(r)=r^{\alpha}=\frac{1}{H(r)}\right).$$

Из теоремы 2 получаем, что из $\gamma_\alpha(E)>0$ следует $L_\alpha(E)=\infty$. Из теоремы 1 нельзя сделать вывод, что из $L_\alpha(E)=\infty$ вытекает $\gamma_\alpha(E)>0$. Но из той же теоремы 1 следует, что немного более сильное требование $L_\beta(E)>0$ при $\beta>\alpha$ влечет за собой неравенство $\gamma_\alpha(E)>0$.

Определение канторовских множеств. Пусть Δ_0 – отрезок $0\leqslant x\leqslant 1$, I_1 = интервал длины 1: $p_0=\delta_0:p_0$, $p_0>1$, с центром симметрии в точке $x=\frac{1}{2}$; через Δ_1 обозначим совокупность двух отрезков Δ_0-I_1, а через I_2 – совокупность двух интервалов, имеющих те же центры симметрии, что и отрезки Δ_1, и сумма длин которых равна $\delta_1:p_1$, где $p_1>1$, а δ_1 – длина Δ_1. Далее обозначаем $\Delta_2=\Delta_1-I_2$ и определяем множества I_3, Δ_3, I_4, Δ_4, ... Множество

$$M=\bigcap_{i=0}^{\infty}\Delta_i=\Delta_0-\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$$

является совершенным множеством. Если $\varliminf p_n>1$, то множество M называется канторовым.

Литература: 4, 7, 9, 10, 28, 35, 37, 39.

III

Полунепрерывная функция. Функция $f(P)$ называется полунепрерывной снизу в точке P_0, если

$$f(P_0) \leqslant \varliminf_{P \to P_0} f(P).$$

Теорема Бэра. *Для того чтобы $f(P)$ была полунепрерывной снизу на замкнутом ограниченном множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(P) = \lim_{n \to \infty} f_n(P), \quad P \in E, \tag{5}$$

где $\{f_n(P)\}$ — возрастающая последовательность непрерывных функций.

Заметим, что существование равномерного предела (5) необходимо и достаточно, чтобы $f(P)$ была непрерывной на E (теорема Дини).

Полунепрерывность потенциала. *Потенциал* (1) — *полунепрерывная снизу функция во всей плоскости.* (Доказательство.)

Регулярные ядра. Ядро $H(r)$ назовем регулярным, если из непрерывности потенциала (1) на E следует его непрерывность во всей плоскости, кроме, быть может, точки $z = \infty$ (подчеркнем, что непрерывность потенциала на E понимается здесь как непрерывность по значениям потенциала, принимаемым только на множестве E).

Теорема 1. *Если $H(r)$ — регулярное ядро и $\gamma_H(E) > 0$ $\left(\tilde{\gamma}_H(E) > 0\right)$, то существует такая масса μ, что соответствующий потенциал* (1) *непрерывен во всей плоскости (а не только ограничен сверху), кроме, быть может, точки $z = \infty$.* (Доказательство).

Заметим, что *логарифмическое ядро и α-ньютоновские ядра — регулярные.* (Доказательство.)

Проблемы Пенлеве. Пусть некоторым свойством определен для каждой области некоторый класс функций K (аналитических или гармонических).

1-ая проблема. *Дано замкнутое ограниченное множество E. Каковы условия на множестве, чтобы класс K в дополнении к E содержал хотя бы одну функцию $f(z)$, $f(z) \neq C$? Другими словами, указать условия для нетривиальности или же тривиальности класса K. Условимся говорить, что E — нуль-множество для класса K в первой проблеме Пенлеве, если класс K тривиален.*

2-ая проблема. *Дана область G и замкнутое ограниченное множество E, $E \subset G$. Рассматривается класс K в области $G - E$. Каковы условия, чтобы все функции класса K в $G - E$ продолжались через E (т. е., чтобы каждая функция класса K в $G - E$ могла бы быть доопределена на множестве E таким образом, чтобы оказалась функцией класса K во всей области G)? Если E обладает таким свойством, то E — нуль-множество для K во второй проблеме Пенлеве.*

Пример 1. Пусть E — отрезок или другой континуум, и K — класс ограниченных аналитических (слово однозначных и здесь и в дальнейшем подразумевается) функций. E не является нуль-множеством для указанного класса K.

Пример 2. E — отрезок или аналитическая кривая, и K — класс функций, аналитических вне E и непрерывных также на E. E — нуль-множество.

Пример 3. Пример 2, но слово „аналитических“ заменено словом „гармонических“. E не является нуль-множеством (см. следующую теорему).

Теорема 2 (Карлесона). *Пусть E — замкнутое ограниченное множество и $\gamma(E)>0$ (γ-лог. емкость). Тогда существует функция $u(z)$, $u(z)\not\equiv C$, гармоническая вне E (в расширенной плоскости) и непрерывная всюду.* (Доказательство.)*

Теорема 3 (Келлога-Эванса). *Если E — замкнутое ограниченное множество и $\gamma(E)=0$, то для любой окрестности G множества E существует функция $u(z)$ со следующими свойствами:* 1) *$u(z)$ — гармоническая в области $G-E$,* 2) *$u(z)>0$ и* 3) $\lim\limits_{z\to E} u(z)=+\infty$.

Теорема 4. *Пусть G — область, E, $E\subset G$ — замкнутое ограниченное множество и $\gamma(E)=0$. Любая гармоническая и ограниченная в области $G-E$ функция может быть гармонически продолжена на всю область.* (Доказательство.)

Литература: 9, 10, 28, 31, 35, 37.

IV

Условимся обозначать через

HB — класс гармонических ограниченных функций,

HC — класс гармонических внутри области и непрерывных в замкнутой области функций,

AB — класс аналитических ограниченных функций и

AC — класс аналитических внутри области и непрерывных в замкнутой области функций

и сформулируем теорему, легко следующую из теорем 2 и 4 предыдущей лекции и подводящую итог этим теоремам.

Теорема 1. *Для того чтобы замкнутое ограниченное множество E было нуль-множеством для классов HB и HC как в первой, так и во второй проблеме Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(E)$ (лог. емкость) равнялась нулю.*

Замечание. Из теоремы 1 следует, что критерий нуль-множества один и тот же для классов HB и HC. Напомним, что для классов AB и AC дело обстоит иначе (см. примеры 1 и 2 предыдущей лекции). Кроме того, обе проблемы Пенлеве решаются одинаково в классе HB или HC. Впоследствии узнаем, что не для всех классов функций обе проблемы Пенлеве имеют одинаковое решение. Поэтому интересно выделить те классы, для которых обе проблемы Пенлеве эквивалентны.

Определение монотонности класса. Пусть определен некоторый класс K (напомним, что мы под сказанным понимаем, что класс K

---

* Впрочем, для пространственного случая аналогичный факт приведен еще в статье М. В. Келдыша [9], относящейся к 1941 г. (Работа Карлесона появилась в 1958 г.).

определен для любой области). Если из $G \subset G'$ следует $K(G) \supset K(G')$ (другими словами, если из принадлежности функции $f(z)$ классу K в области G' следует ее принадлежность классу K в области G), то класс K называется монотонным.

Легко усмотреть, что для монотонного класса нуль-множество во второй проблеме всегда является нуль-множеством и в первой проблеме Пенлеве.

Определение класса с разложением. Пусть K — класс аналитических функций и $f(z) \in K[G-E]$ ($E \subset G$ — замкнутое ограниченное множество). Пользуясь интегралом Коши, функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где функция $f_1(z)$ аналитична в области G, а функция $f_2(z)$ аналитична вне множества E (функция $f_1(z)$ выражается интегралом типа Коши по контуру области G, а $f_2(z)$ — интегралом типа Коши по конечному числу контуров, окружающих множество E). Если $f_1(z) \in K$ в некоторой области G_1, $E \subset G_1 \leqslant G$, а $f_2(z) \in K$ в дополнении к E до расширенной плоскости, то скажем, что K — класс с разложением. (Заметим, что условие $f_1(z) \in K$ в $G_1 \leqslant G$ обычно автоматически следует из аналитичности $f_1(z)$ в G, тогда как условие на $f_2(z)$ не всегда имеет место.)

Легко видеть, что для класса с разложением нуль-множество в первой проблеме Пенлеве является нуль-множеством и во второй проблеме Пенлеве.

Несложным рассуждением проверяется, что классы AB и AC — монотонные и обладают разложением. Эти свойства имеют также и классы $K[\varphi(\delta)]$, определение которых следует ниже.

Напомним понятие модуля непрерывности: обозначим

$$\omega(\delta) = \sup |f(z_1) - f(z_2)|, \quad z_1, \ z_2 \in G, \ |z_1 - z_2| < \delta, \ \delta > 0.$$

Возрастающую функцию $\omega(\delta)$ назовем модулем непрерывности функции $f(z)$ в области G.

Определение класса $K[\varphi(\delta)]$. Пусть $\varphi(\delta)$, $\delta > 0$ — возрастающая функция. Множество аналитических функций (в произвольно зафиксированной области), модуль непрерывности которых удовлетворяет неравенству

$$\omega(\delta) = O[\varphi(\delta)],$$

назовем классом $K[\varphi(\delta)]$.

Примеры. Если $\varphi(\delta) = O(1)$, то класс $K[\varphi(\delta)]$ совпадает с классом AB. Если $\varphi(\delta) = o(1)$, то класс $K[\varphi(\delta)]$ совпадает с классом AC. Если $\varphi(\delta) = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то класс $K[\varphi(\delta)]$ состоит из функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Последний класс обозначим через $K[\mathrm{Lip}\,\alpha]$.

Теорема 2 (1-ая теорема Долженко). *Если хаусдорфова мера $h(E)$ замкнутого ограниченного множества E, соответствующая функции*

$$h(r) = r\varphi(r),$$

равна нулю, то E — нуль-множество для класса $K[\varphi(\delta)]$. (Доказательство.)

Эта теорема обобщает и систематизирует ряд результатов, полученных ранее Пенлеве, Данжуа, Голубевым, Карлесоном и другими; метод, которым Долженко доказывает эту теорему, близок к методам, примененным указанными математиками.

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. *Если* $L_1(E)=0$, *то* E — *нуль-множество для класса* AB (1-ая теорема Пенлеве).

2. *Если* $L_1(E)<\infty$, *то* E — *нуль-множество для класса* AC (2-ая теорема Пенлеве).

3. *Если* $L_{1+\alpha}(E)=0$, *то* E — *нуль-множество для класса* $K[\mathrm{Lip}\,\alpha]$ (Карлесон).

Теорема Долженко и частные ее случаи дают в терминах хаусдорфовой меры достаточные условия для того, чтобы E было нуль-множеством рассматриваемого класса.

Рассмотрим вопрос об обращении этой теоремы, вернее, об обращении указанных частных случаев.

1. 1-ая теорема Пенлеве не обратима. Витушкин в 1958 г. (заметим, что рассматриваемая проблема ждала своего решения от 1888 г., когда была опубликована первая теорема Пенлеве) *построил замечательный пример замкнутого ограниченного множества* E, *являющегося нуль-множеством для класса* AB *и имеющего положительную длину:* $L_1(E)>0$.

Заметим, что множество E из примера Витушкина не лежит ни на одной спрямляемой кривой. В то же время известно, что если E лежит на отрезке (Данжуа) или на аналитической кривой (Альфорс и Бейрлинг) и E — нуль-множество для класса AB, то $L_1(E)=0$. То же самое доказано в случае, когда E лежит на достаточно правильных спрямляемых кривых (Хавин, Хавинсон, Иванов). Но случай, когда E лежит на произвольной спрямляемой кривой еще полностью не исследован.

2. Условие $L_1(E)<\infty$ не является необходимым для того чтобы E было нуль-множеством для класса AC (другими словами, и вторая теорема Пенлеве не обратима). Так, например, множество, состоящее из отрезков $0\leqslant \mathrm{Im}\, z\leqslant 1$, $\mathrm{Re}\, z=0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$ имеет бесконечную длину, но является нуль-множеством для класса AC.

3. Теорема Карлесона обратима:

Теорема 3. (2-ая теорема Долженко). *Для того чтобы* E *было нуль-множеством для класса* $K[\mathrm{lip}\,\alpha]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $L_{1+\alpha}(E)=0$.

Заметим, что достаточность условия $L_{1+\alpha}(E)=0$ содержалась в теореме Карлесона.

Карлесон отмечает следующее необходимое условие нуль-множества для класса AC:

Если E — *нуль-множество для класса* AC, *то* $\gamma_1(E)=0$ (напоминаем, что γ_1 обозначает емкость, соответствующую ядру $H_1(r)=r^{-1}$).

Следствие. *Если выполнены условия*

$$h(E)>0,$$

где $h(E)$ — *хаусдорфова мера, соответствующая функции* $h(r)$, *и*

$$\int\limits_0 \frac{h(t)}{t^2}\,dt<\infty,$$

то E *не является нуль-множеством для класса* AC.

В самом деле, из первой теоремы о потенциале (см. лекцию II) следует, что $\gamma_1(E)>0$.

Теорема Карлесона обобщает ряд ранее известных теорем, давших необходимые условия для того чтобы E было нуль-множеством для класса AC. Так, например, Помпейу и Данжуа показали необходимость условия $L_2(E)=0$. Голубев впервые показал недостаточность этого условия. Другие примеры функций, аналитических вне множества нулевой плоской меры и непрерывных во всей плоскости были построены Урысоном, Данжуа и другими. Все они вытекают из следствия к теореме Карлесона. Таким образом, условие Карлесона является самым общим из известных по этому вопросу.

Для множеств частного вида вопрос иногда удается решить до конца; отметим, в частности, такую теорему Карлесона:

Пусть множество $E=E_x\times Y$ декартово произведение, где E_x — замкнутое множество на интервале $[0, 1]$ *оси x, а Y — замкнутый интервал на оси y. Для того чтобы E было нуль-множеством для класса AC, необходимо и достаточно, чтобы E было счетным множеством.*

Литература: 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 20—26, 28—37.

V

Аналитическая емкость. Неудача попытки решить в прежних терминах вопрос о необходимых и достаточных критериях нуль-множеств для аналитических классов функций заставила искать новые характеристики множеств (Альфорс, Бейрлинг, Шиффер, Сарио, Витушкин, Хавинсон, Хавин). Вместо метрических характеристик множеств, связанных с естественным обобщением меры Лебега (меры Хаусдорфа), или метрических характеристик, связанных с теорией потенциала (емкости), т. е. с теорией гармонических и субгармонических функций, стали рассматривать характеристики, непосредственно связанные с изучаемым классом аналитических функций.

Пусть E — замкнутое ограниченное множество, $G=G_\infty$ — та из дополнительных к E областей, которая содержит бесконечно удаленную точку, и K — некоторый класс аналитических в области G функций $f(z)$:

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots.$$

Число

$$\Omega(E, K)=\sup|c_{-1}|=\sup\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta\right|, \tag{6}$$

где γ — контур, окружающий множество E и лежащий в области G, называют аналитической емкостью множества E относительно класса K. В случае, когда K — класс аналитических и ограниченных в области G единицей функций: $K=B^1(G)$ $(|f|\leqslant 1)$ то, аналитическую емкость множества E относительно этого класса обозначим через $\Omega(E)$, $\Omega(E)=\Omega\left(E, B^1(G)\right)$ и назовем просто аналитической емкостью множества E.

Обычно равенство $\Omega(E, K)=0$ служит необходимым и достаточным условием для того чтобы E было нуль-множеством для класса K. Рассмотрим для примера класс $B^1(G)$. Если E — нуль-множество, то, очевидно, $\Omega(E)=0$, Пусть, обратно, E — не нуль-множество, тогда $\Omega(E)>0$. Действительно, по предположению, существует в классе $B^1(G)$ функция $f(z)$,

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-m}}{z^m}+\ldots, \qquad |f(z)|\leqslant 1,$$

где $c_{-m}\neq 0$. Функция

$$\varphi(z)=\left(f(z)-c_0\right)z^{m-1}$$

также ограничена: $|\varphi(z)|\leqslant M$, а функция

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z)}{M}=\frac{c_{-m}}{Mz}+\ldots$$

принадлежит классу $B^1(G)$. Следовательно,

$$\Omega(E)=\sup_{f\in B^1(G)}|c_{-1}|\geqslant\frac{|c_{-m}|}{M}>0.$$

Таким образом, вопрос о нуль-множествах решается тривиально в терминах аналитической емкости. Но, чтобы это решение было содержательным, надо больше знать о свойствах самой аналитической емкости. Следующие вопросы могут быть поставлены среди других:

1. Какова связь аналитической емкости с другими емкостями или мерами множеств?

2. Связана ли аналитическая емкость множества с распределением масс на этом множестве, подобно тому, как обычная емкость?

3. Каковы свойства экстремальных функций в задаче о емкости? (Функцию $f^*(z)\in K$ называем экстремальной, если

$$f^*(z)=c_0+\frac{\Omega(E,\ K)}{z}+\ldots)$$

4. Как связаны аналитические емкости данного множества относительно различных классов? Чтобы пояснить суть последнего вопроса, представим себе, что мы установили для некоторых двух классов K_1 и K_2 эквивалентность равенств $\Omega(E,\ K_1)=0$ и $\Omega(E,\ K_2)=0$. Тогда нуль-множество для одного из этих классов будет таковым и для другого класса.

Что касается первого из этих вопросов, то отметим следующие результаты:

а. Если Δ_r — круг $|z|\leqslant r$, то $\Omega(\Delta_r)=r$.

б. Если E — континуум, то $\Omega(E)=\gamma(E)$. Если E — замкнутое ограниченное множество, но не континуум, то $\Omega(E)<\gamma(E)$ (Альфорс, Витушкин). Это предложение уже приводилось во второй лекции.

в. Если E — замкнутое ограниченное множество на прямой, то

$$\Omega(E)=\frac{L_1(E)}{4}$$

(Поммеренке, Иванов). В общем случае известны следующие неравенства

$$\Omega(E)\leqslant\frac{L_1(\Gamma)}{2\pi},\quad \Omega(E)\geqslant\frac{\sqrt{L_2(E)}}{\pi}.$$

В первом из этих неравенств Γ — граница области G; $L_1(\Gamma)$ — ее длина по Хаусдорфу, однако несколько измененная, а именно: длины участков, дважды проходимых при обходе границы G, удваиваются. Первое неравенство следует тривиально из определения аналитической емкости посредством контурного интеграла $\left(\text{см. (6)}\right)$. Второе неравенство менее тривиально. Оно в явном виде имеется в работе Поммеренке, а неявно у Альфорса и Бейрлинга.

Связь с распределением масс. **Теорема 1** (Ерохин, Хавинсон). *Пусть* Γ — *граница области* G, $L_1(\Gamma)<\infty$ *и* $f(z)\in B^1(G)$, $f(\infty)=0$. *Имеется такая масса (комплексная)* μ, *распределенная на границе* Γ, *что*

$$f(z)=\int_\Gamma \frac{d\mu}{\zeta-z}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что вычет $-c_{-1}$ функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ будет

$$-c_{-1}=-\int_\Gamma d\mu.$$

Таким образом,

$$\Omega(E)=\Omega(\Gamma)=\sup\left|\int_\Gamma d\mu\right|,$$

где sup *берется по всем массам* μ, *для которых функции, определенные равенством* (7), *ограничены единицей* $\left(\text{ср. с представлением } H\text{-емкости по формуле (2)}\right)$.

Попытка освободиться от условия $L_1(\Gamma)<\infty$ приводит к следующему важному результату (см. также теорему 4 работы [19]):

Теорема 2 (Хавинсон). *В любом случае* $\left(\text{и когда } L_1(\Gamma)=\infty\right)$ *существует такая аналитическая в области* G *функция* $L(z)$, *зависящая только от* G, $L(z)\neq 0$, $L(\infty)=1$ $\left(\ln L(z) - \text{однозначная в области } G \text{ функция}\right)$, *что любая функция* $f(z)\in B^1(G)$ *имеет представление*

$$f(z)=\frac{1}{L(z)}\int_\Gamma \frac{d\mu}{\zeta-z}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\Omega(E)=\Omega(\Gamma)=\sup\left|\int_\Gamma d\mu\right| \tag{9}$$

при условии, что правая часть равенства (8) *по модулю не превосходит единицу:*

$$\left|\frac{1}{L(z)}\int_\Gamma \frac{d\mu}{\zeta-z}\right|\leqslant 1. \tag{10}$$

Замечательно, что, хотя в равенстве (9) сравниваются комплексные массы, *экстремальная масса*, т. е. масса, для которой

$$\Omega(E)=\left|\int_\Gamma d\mu^*\right|=\int_\Gamma d\mu^*=\mu^*(\Gamma)$$

положительна!

Укажем еще два свойства экстремальной массы μ^*:

Теорема 3 (Хавинсон). *Для произвольной функции $f(z)\in B^1(G)$ в представлении* (8) *масса μ может быть взята так, что*

$$\int_\Gamma |d\mu| \leqslant \mu^*(\Gamma)$$

и, более того, для любого B-множества $R\subset E$:

$$\int_R |d\mu| \leqslant \mu^*(R).$$

Теорема 4 (Хавинсон). *Пусть S — некоторая порция замкнутого ограниченного множества E. Для того чтобы $\mu^*(S)=0$, необходимо и достаточно, чтобы $\Omega(S)=0$.*

Эта теорема напоминает теорему Неванлинна о связи между логарифмической емкостью и гармонической мерой.

Остановимся теперь на свойствах экстремальной функции $f^*(z)$ в задаче о емкости, т. е. функции

$$f^*(z)=\frac{1}{L(z)}\int_\Gamma \frac{d\mu^*}{\zeta-z},$$

$$f^*(z)=\frac{\Omega(\Gamma)}{z}+\dots.$$

а. *Экстремальная функция $f^*(z)$, нормированная тем, что ее вычет в точке $z=\infty$ отрицателен, единственна.* Этот результат был установлен Альфорсом в случае, когда область G конечносвязная, и Хавинсоном в общем случае.

б. *Если G-конечносвязная область, то $f^*(\zeta)=1$ при $\zeta\in\Gamma$* (Альфорс). *В общем случае, если $\Omega(\Gamma)>0$,*

$$\overline{\lim_{z\to\zeta\in\Gamma}}\, |f^*(z)|=1$$

почти везде по мере μ^* (Хавинсон).

в. *Если G — n-связная область, то $f^*(z)$ отображает G на n-листный единичный круг* (Альфорс). *В общем случае функция $f^*(z)$ принимает все значения из круга $|w|<1$, кроме, быть может, значений, образующих в $|w|<1$ множество аналитической емкости нуль* (Хавинсон).

г. *Все нули экстремальной функции $f^*(z)$ лежат в наименьшей выпуклой оболочке множества E* (Хавинсон).

Перед тем, как перейти к последнему из намеченных выше вопросов, укажем еще некоторые другие формулы для аналитической емкости. В этих формулах выявляется связь понятия аналитической емкости с вопросами аппроксимации функций.

а.

$$\Omega(E)=\inf_{\varphi,\,\gamma}\int_\gamma |1+\varphi(z)|\,ds,$$

где inf берется по всевозможным аналитическим в G функциям $\varphi(z)$, $\varphi(\infty)=0$, и всевозможным контурам γ, окружающим множество E (Гарабедиян, Хавинсон).

6. Если $L_1(\Gamma) < \infty$ (Γ — граница области G), то

$$\Omega(E) = \inf_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_n \in G \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}} \left[\max_{\zeta \in E} \left| 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\zeta - a_k} \right| + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \right], \tag{11}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — произвольные комплексные числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольные точки области G, n пробегает ряд натуральных чисел, а ζ — множество E. В общем случае равенство (11) остается верным, если последнюю сумму в правой части заменить на сумму

$$\sum_{k=1}^{n} |L(a_k)\lambda_k|,$$

где $L(z)$ — ранее введенная функция.

Отсюда вытекает интересная характеристика нуль-множеств:

Теорема 5. *Если $\Omega(E) = 0$, то для любой непрерывной на E функции $\Phi(\zeta)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (n зависит только от ε и E), что*

$$\max_{\zeta \in E} \left| \Phi(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\zeta - a_k} \right| < \varepsilon \text{ и } \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| < \varepsilon. \tag{12}$$

Обратно, если неравенства (12) *выполнены* (*при произвольном $\varepsilon > 0$ и соответствующих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$*) *для функции $\Phi(\zeta) = 1$ и, кроме того, $L_1(E) = \infty$, то $\Omega(E) = 0$.*

Эта теорема и другие результаты, изложенные в пункте 6 принадлежат Хавину и Хавинсону.

Обратимся, наконец, к вопросу о соотношениях между аналитическими емкостями в различных классах.

а. Пусть $E_p(G)$, $p \geqslant 1$ класс аналитических в G функций $f(z)$, для которых

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p \, ds \leqslant 1,$$

где Γ_n, $\Gamma_n \subset G$ — последовательность контуров, стремящаяся к Γ. Имеют место равенства

$$\Omega\left(E,\ E_1(G)\right) = \frac{1}{2\pi},$$

$$\Omega\left(E,\ E_p(G)\right) = (2\pi)^{-\frac{1}{p}} [\Omega(E)]^{\frac{1}{q}},$$

где $p > 1$ и $1:p + 1:q = 1$.

Следствие. *Нуль-множества для классов $E_p(G)$, $p > 1$, и $B^1(G)$ совпадают. Класс $E_1(G)$ не имеет непустых нуль-множеств.* Так, например, функция z^{-1} принадлежит классу $E_1(G)$, где G — расширенная плоскость без точки $z = 0$.

б. Пусть AD — класс аналитических в области G функций, для которых интеграл Дирихле

$$\iint_G |f'(z)|^2 \, dx\, dy \leqslant 1.$$

Тогда

$$\Omega(E, D) \leqslant [\Omega(E)]^2$$

(Альфорс, Бейрлинг).

Следствие. *Всякое нуль-множество для класса B^1 служит и нуль-множеством для класса AD.*

В заключение приведем пример класса аналитических функций, для которого первая и вторая проблемы Пенлеве не эквивалентны.

Пусть A — класс аналитических в G функций $f(z)$, для которых $\ln^+ |f(z)|$ имеет в G гармоническую мажоранту.

Теорема 6 (Рудин). *Для того, чтобы E было нуль-множеством для класса A в первой проблеме Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma(E)=0$ (γ — лог. емкость).

С другой стороны, класс A не имеет непустых нуль-множеств во второй проблеме Пенлеве. В самом деле, функция z^{-1} принадлежит классу $A(G)$, где G — единичный круг с исключенным центром (в этой области G функция $\ln^+ |z^{-1}|$ гармонична).

Настоящий конспект составлен А. Г. Нафталевичем и просмотрен С. Я. Хавинсоном.

Литература: 1, 6, 8, 12—14, 16—27, 38.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 24.X.1962

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Витушкин. ДАН СССР, 123, № 5, 778—781 (1958).
2. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон. Мат. сб., 44 (86), 225—234 (1958).
3. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон. УМН, 12, 4 (76), 193—199 (1957).
4. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., Гостехиздат (1952).
5. В. С. Федоров. Изв. Иваново-Вознесенского политех. ин-та, 1, 45—56 (1919).
6. Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон. Статья в сб. „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного", М.—Л., Гостехиздат, 45—77 (1960).
7. С. Сакс. Теория интеграла, Москва, ИЛ (1950).
8. В. П. Хавин. Вестник ЛГУ, № 1, серия матем., мех. и астр., вып. 1, 66—79 (1958).
9. М. В. Келдыш. УМН, вып. 8, 171—231 (1941).
10. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат (1941).
11. А. Г. Витушкин. ДАН СССР, 127, № 2, 246—249 (1959).
12. С. Я. Хавинсон. ДАН СССР, 128, № 5, 896—898 (1959).
13. С. Я. Хавинсон. ДАН СССР, 128, № 6, 1129—1131 (1959).
14. С. Я. Хавинсон. ДАН СССР, 131, № 1, 44—46 (1960).
15. В. В. Голубев. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М. (1916) (2-ое издание—Физматгиз, М.—Л. (1961)).
16. С. Я. Хавинсон. Труды ин-та матем. им. Стеклова, 61, 304—324.
17. В. П. Хавин. ДАН СССР, 131, № 1, 40—43 (1960).
18. С. Я. Хавинсон. Мат. сб., 54 (96) : 1, 3—50 (1961).
19. С. Я. Хавинсон. Лит. мат. сб., 2,2, 283—290 (1962).
20. L. V. Ahlfors. A. Beurling. Acta Math., 83, 1—2, 101—129 (1950).
21. L. V. Ahlfors. Duke Math. Jour., 14, 1—11 (1947).

22. L. Sario. Construction of functions with prescribed properties on Riemann surfaces (Contributions to the theory of Riemann surfaces) 7 An. of Math. Studies, 30, Princeton, New Jersey, 63—77 (1953).
23. M. Parreau. Ann. Inst. Fourier, 3, 103—197 (1951).
24. W. Rudin. Trans. Amer. Math. Soc., 78, 1, 46—66 (1955).
25. L. V. Ahlfors. Comment. Math. Helv., 24, 100—134 (1950).
26. R. P. Garabedian. Trans. Amer. Math. Soc., 67, 1, 1—35 (1949).
27. R. P. Garabedian. Trans. Amer. Math. Soc., 69, 3, 392—415 (1950).
28. O. Frostmann. Potentiel déquilibre et capacité des ensembles avec quelqes application a la théorie des fonctions, Lund (1935).
29. Zoretti. Lesons sur le prolongement analytique, Paris (1908).
30. Zoretti. Sur les fonctions analytiques uniformes qui possédent un ensemble parfait discontinu de points singulières, Thèse, Paris (1904).
31. Painlevé. Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2, 1—130 (1888).
32. Pompéiu. Comptes Rendus, 149, 103 (1909).
33. Denjoy. Comptes Rendus, 148, 1154—1156 (1909).
34. Pompéiu. Sur la continiite des fonctions de variables complexes, These, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 7 (1905).
35. L. Carleson. On a class of meromorphic functions and its exceptional sets, Uppsala (1950).
36. L. Carleson. Arkiv för matematik, 1, 4 (1951).
37. L. Carleson. Arkiv för matematik, 3, 5, 403—406 (1958).
38. Chr. Pommerenke. Archiv der Mathematik, 6, 4, 270—277.
39. Erdös and Gillis. J. London Math. Soc. 12, (1937).

PAVIENUMŲ IŠNYKIMO KLAUSIMU

S. J. CHAVINSONAS

(Reziumė)

Penleve iškeltos analizinių ir harmoninių funkcijų pavienumų išnykimo problemos buvo daug tiriamos.

Šiame darbe pateikiama tų tyrimų apžvalga.

ÜBER DAS VERSHWINDEN DER SINGULARITÄTEN

S. J. CHAVINSON

(Zusammenfassung)

Die von Painlevé angeregten Probleme des Verschwindens der Singularitäten analytischer und harmonischer Funktionen sind zum Gegenstand vieler Untersuchungen geworden.

Die obige Arbeit gibt eine Übersicht über solche Untersuchungen.