III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1963

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ В СЕКТОРАХ

И. ВАЙТКЯВИЧУС

1. Введение

1. В 1944 г. Ю. В. Линник [11] доказал существование абсолютной константы $c>0$ такой, что наименьшее простое число в арифметической прогрессии $ku+l$, $(k, l)=1$, $u=0, 1, 2, \ldots$, не превосходит величины k^c. В 1959 г. Г. И. Ригер [14] доказал, что для любого алгебраического поля K существует константа $c=c(K)$, зависящая только от самого поля K, такая, что в любом классе идеалов $\bmod \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — целый фиксированный идеал поля, существует простой идеал $\mathfrak{p}$ с

$$N(\mathfrak{p})<N(\mathfrak{m})^c.$$

Здесь и в дальнейшем $N(\mathfrak{p})$ означает норму соответствующего идеала.

Э. Фогельс в 1961 и 1962 г.г. [1], [2], [3], [4] доказал аналогичные теоремы о существовании наименьшего простого числа в интервалах вида (x, xk^c) для арифметической прогрессии и (x, xD^c) — для алгебраических полей, где

$$D=|d|N(\mathfrak{m})>1,$$

d — дискриминант поля.

В настоящей работе рассматриваются идеальные числа мнимого квадратичного поля в секторах с вершиной в начале координат и величиной угла, не превосходящей $\frac{\pi}{2}$. Идеальные числа мы вводим следуя Гекке. Здесь нет возможности описать конструкцию этих чисел, и мы должны отослать читателя к работам [6], [7], [8]. Коротко скажем следующее: идеальные числа построены так, что каждому идеалу поля K соответствует одно и только одно идеальное число, в частности, целому идеалу соответствует целое идеальное число. Все идеальные числа распадаются на h классов $\bmod \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — некоторый целый идеал поля.

Доказывается следующая

Теорема 1.1. *Пусть K — мнимое квадратичное поле дискриминанта d, $\mathfrak{m}$ — любой целый идеал этого поля и $\mathfrak{H}$ — класс идеальных чисел* $\bmod \mathfrak{m}$. *Обозначим*

$$D=|d|N(\mathfrak{m})>1,$$

где $N(\mathfrak{m})$ означает норму идеала $\mathfrak{m}$. Пусть далее $0<\Delta<\frac{\pi}{4}$, φ_1, φ_2 — любые действительные числа, удовлетворяющие условию

$$0<\varphi_2-\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}-2\Delta.$$

Тогда существует константа $B>0$, зависящая только от самого поля K, такая, что в секторе с вершиной в начале координат и раствором величиной $\varphi_2-\varphi_1=\varphi$ найдется хотя бы одно простое идеальное число $\mathfrak{p}\in\mathfrak{H}$, для которого

$$N(\mathfrak{p})<\left(\frac{D}{\varphi}\right)^B.$$

Доказательство теоремы проводится методом Ю. В. Линника в форме, данной К. А. Родосским [13], при этом используются некоторые результаты И. П. Кубилюсса и Э. Фогельса.

2. В многомерной теории чисел основным аппаратом для исследования распределения простых идеалов являются так называемые Z-функции Гекке, которые определяются рядами

$$Z(s\Xi)=\sum_{\alpha}{}' \frac{\Xi(\alpha)}{N(\alpha)^s}, \qquad s=\sigma+it, \quad \sigma>1, \tag{1.1}$$

где знак $'$ означает, что суммируется по всем неассоциированным идеальным числам α из поля K, для которых $N(\alpha)\neq 0$. В дальнейшем знак, писать не будем, но условия суммирования остаются в силе.

В сумме (1.1) $\Xi=\Xi(\alpha)$ называется характером Гекке второго рода и для мнимого квадратичного поля определяется равенством

$$\Xi(\alpha)=\chi(\alpha)\,\xi^{mg}(\alpha),$$

где $\chi(\alpha)$ — групповой характер $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, а $\xi^{mg}(\alpha)$ — так называемый характер Гекке первого рода:

$$\xi^{mg}(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^{gm}=e^{igm\arg\alpha}.$$

Здесь g — число единиц $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ и называется показателем характера Ξ. Если $m=0$, то $\Xi(\alpha)=\chi(\alpha)$ и тогда функции $Z(s,\ \Xi)$ совпадают с L-функциями Гекке. Если, кроме того, $\mathfrak{m}$ — единичный идеал, то L-функция превращается в обыкновенную дедекиндову Z-функцию $Z(s)$.

Ряд (1.1) сходится абсолютно в полуплоскости $\sigma>1$. Функции $Z(s,\ \Xi)$, если Ξ — не главный характер, являются целыми функциями. Если $\Xi=\Xi_0$ — главный характер, то $Z(s,\ \Xi_0)$ является мероморфной функцией, имеющей простой полюс в точке $s=1$.

Если $\Xi=\chi\xi^{gm}$ — первообразный характер $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, то функции $Z(s,\ \Xi)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$Z(s,\ \Xi)=\varkappa(\Xi)\left(\frac{1}{2\pi}\left|\sqrt{dN(\mathfrak{m})}\right|\right)^{1-2s}\frac{\Gamma\left(\frac{|gm|}{2}+1-s\right)}{\Gamma\left(\frac{|gm|}{2}+s\right)}Z(1-s,\ \bar{\Xi}), \tag{1.2}$$

где $|\varkappa(\Xi)|=1$ и не зависит от s. Если Ξ — производный характер $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, то порожденный им первообразный характер имеет вид $\Xi'=\chi'\xi^{gm}$ и тогда

$$Z(s,\ \Xi)=Z(s,\ \Xi')\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}}\left(1-\Xi'(\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{p})^{-s}\right).$$

Главную роль в доказательстве теоремы играет распределение нулей функций $Z(s,\ \Xi)$. Критические нули этих функций (т. е. нули, расположенные в полосе $0<\sigma<1$) симметричны относительно прямых $t=0$ и $\sigma=\frac{1}{2}$.

В случае действительного характера Ξ может существовать действительный критический нуль, с которым надо считаться.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, мы докажем ряд лемм относительно распределения нулей функций $Z(s, \Xi)$. Заметим, что в случае $m=0$ все полученные результаты совпадают с результатами Э. Фогельса [2], [3], [4], а в случае фиксированного идеала $\mathfrak{m}$ — все результаты легко получаются из результатов И. П. Кубилюса [8], [9]. В нашем случае дело обстоит так, что все оценки должны быть равномерны как относительно m, так и относительно $\mathfrak{m}$, т. е. D. Поэтому все результаты, полученные в этой работе, включают в себя результаты Э. Фогельса и И. П. Кубилюса.

Все доказательства вспомогательных лемм проводятся хорошо известными методами и поэтому в большинстве случаев являются схематичными.

3. Сформулируем здесь некоторые общеизвестные леммы, которыми в дальнейшем постоянно будем пользоваться.

Лемма 1.1. *Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ есть последовательность действительных чисел, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $g(\xi)$ — любая действительная или комплексная функция, имеющая в интервале $\lambda_1 \leqslant \xi \leqslant x$ непрерывную производную. Тогда*

$$\sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n \leqslant x} a_n g(\lambda_n) = A(x) g(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(\xi) g'(\xi) \, d\xi, \tag{1.3}$$

где a_n — любые комплексные числа и

$$A(\xi) = \sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n \leqslant \xi} a_n.$$

Если в равенстве (1.3) $A(x) g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$, *тогда*

$$\sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n < \infty} a_n g(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{\infty} A(\xi) g'(\xi) \, d\xi$$

с условием, что существует сумма или интеграл.

(См. [11], Anhang, Satz. 1.4.)

Лемма 1.2. *Пусть функция $F(s)$ регулярна в круге $|s-s_0| \leqslant r$ и в этом круге удовлетворяет неравенству*

$$\left| \frac{F(s)}{F(s_0)} \right| \leqslant M_1.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \frac{F'}{F}(s_0) \geqslant -\frac{4}{r} \ln M_1 + \operatorname{Re} \sum_{\rho} \frac{\nu(\rho)}{s_0 - \rho},$$

где суммируется по всем нулям функции $F(s)$, расположенным в круге $|s-s_0| \leqslant \frac{1}{2} r$, а $\nu(\rho)$ означает кратность нуля ρ.

(См. [11], Anhang, Satz 4.2)

Лемма 1.3. (Трансформация Меллина.) *Пусть $g(x)$ непрерывная действительная функция и интеграл*

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} |g(x)| \, dx$$

сходятся для $\alpha<\sigma<\beta$, *где* α, β *любые действительные числа*, $\alpha<\beta$. *Если* $s=\sigma+it$ *— комплексное переменное и*

$$f(s)=\int_0^\infty x^{s-1}g(x)\,dx,$$

то для всех σ, $\alpha<\sigma<\beta$,

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s}f(s)\,ds,\qquad x>0.$$

(См. [11], Anhang, Lemma 3.1.)

Лемма 1.4. *Пусть в полосе* $\alpha\leqslant\sigma\leqslant\beta$ *функция* $F(s)$ *регулярна и удовлетворяет неравенствам*

$$F(\sigma+it)\ll e^{\gamma t},\qquad \gamma<\frac{\pi}{\beta-\alpha},\qquad \alpha<\beta$$

и

$$F(\alpha+it)\ll U(1+|t|)^{\nu},\qquad F(\beta+it)\ll V,$$

где $\nu>0$, $U>1$, $V>1$ *и независим от* t. *Тогда в той же полосе*

$$|F(\sigma+it)<c(\alpha,\beta)\,U^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}}V^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}(1+|t|)^{\frac{\nu(\beta-\sigma)}{\beta-\alpha}}.$$

Доказательство см. [2], лемма 3.

Лемма 1.5. *Пусть* $\Omega>0$, $0<\Delta<\frac{1}{2}\Omega$, φ_1 *и* φ_2 *— действительные числа*, $0\leqslant\varphi_2-\varphi_1\leqslant\Omega-2\Delta$, r *— натуральное число. Существует периодическая функция* $f(w)$ *с периодом* Ω, *удовлетворяющая условиям:*

1) $f(w)=1$ *в интервале* $[\varphi_1,\ \varphi_2]$,
$0\leqslant f(w)\leqslant 1$ *в интервалах* $[\varphi_1-\Delta,\ \varphi_1]$, $[\varphi_2,\ \varphi_2+\Delta]$,
$f(w)=0$ *в интервале* $[\varphi_2+\Delta,\ \varphi_1+\Omega-\Delta]$;

2) $f(w)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$f(w)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{\frac{2\pi i}{\Omega}mw},$$

где

$$a_0=\frac{1}{\Omega}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta),$$

$$|a_m|\leqslant\min\left\{\frac{1}{\Omega}(\varphi_2-\varphi_1+\Delta),\ \frac{2}{\pi|m|},\ \frac{2}{\pi|m|}\left(\frac{r\Omega}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right\},\qquad m\neq 0.$$

(См. [9], лемма 9.)

4. Кроме выше введенных обозначений, в дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями и определениями:

$$M=|m|+1;$$

$$E(\Xi)=\begin{cases}1, & \text{если } \Xi=\Xi_0,\\ 0 & \text{в других случаях;}\end{cases}$$

$\tau(\alpha)$ — число неассоциированных делителей числа α;
$\varphi(m)$ — функция Эйлера;
$\mu(\alpha)$ — функция Мёбиуса;

$\Lambda(\alpha)$ — функция Мангольдта;

$\arg\alpha$ — обозначает основной аргумент числа α;

$$\chi(\alpha)=\begin{cases}\chi(\mathfrak{H}), & \text{если } \alpha\in\mathfrak{H},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Все константы как явного вида, так и входящие в символы O, $\ll$, зависят только от самого поля K.

2. Распределение нулей Z-функций Гекке

1. Докажем необходимые для доказательства теоремы 1.1 три теоремы относительно распределения нулей Z-функций Гекке. Прежде всего докажем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 2.1. *Для любого положительного фиксированного числа η справедливы оценки*

$$Z(1+\eta+it,\ \Xi)\ll\eta^{-1}, \tag{2.1}$$

$$Z(-\eta+it)\ll\eta^{-1}D^{\frac{1}{2}+\eta}M^{1+2\eta}(1+|t|)^{1+2\eta}, \tag{2.2}$$

$$|Z(\sigma+it,\ \Xi)|<c(\eta,\ D,\ m)e^{2|t|},\quad -\eta\leqslant\sigma\leqslant 1+\eta,\quad |t|\geqslant 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если $m=0$, то лемма доказана в работе [2], лемма 1. Поэтому в дальнейшем полагаем $m\neq 0$. Имеем

$$|Z(\sigma+it,\ \Xi)|\leqslant|Z(\sigma,\ 1)|=|Z(\sigma)|\ll\frac{1}{\sigma-1}=\eta^{-1},$$

что дает оценку (2.1).

Для доказательства оценки (2.2) рассмотрим два случая. Пусть характер Ξ является примитивным характером Ξ'. Тогда из функционального уравнения (1.2), используя формулу Стирлинга для функции $\Gamma(s)$ и оценку (2.1), получаем

$$|Z(-\eta+it,\ \Xi'|\leqslant\left|\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{dN(\mathfrak{m})}\right)^{1+2\eta-it}\frac{\Gamma\left(\frac{|gm|}{2}+1+\eta-it\right)}{\Gamma\left(\frac{|gm|}{2}-\eta+it\right)}\right|\times$$

$$\times|Z(1+\eta-it,\ \bar{\Xi}')|\ll\eta^{-1}D^{\frac{1}{2}+\eta}M^{1+2\eta}(1+|t|)^{1+2\eta},$$

что совпадает с оценкой (2.2).

Пусть теперь Ξ непримитивный характер $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$. Тогда существует идеал $\mathfrak{m}_0$, который является делителем идеала $\mathfrak{m}$, и примитивный характер $\Xi_1 \operatorname{mod}\mathfrak{m}_0$ такие, что

$$Z(s,\ \Xi)=Z(s,\ \Xi_1)\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m},\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}_0}\left(1-\frac{\Xi_1(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right).$$

Если положим $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_1$, то тогда

$$\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m},\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}_0}\left(1-\frac{\Xi_1(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{-\eta+it}}\right)\ll\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m},\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}_0}\left(1+N(\mathfrak{p})^{\eta}\right)\ll\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_1}\left(1+N(\mathfrak{p})^{\eta}\right)=$$

$$=\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{m}_1}N(\mathfrak{d})^{\eta}\ll N(\mathfrak{m}_1)^{\eta}\tau(\mathfrak{m}_1).$$

Но

$$\tau(\mathfrak{m}_1) \ll \tau\left(N(\mathfrak{m}_1)\right) \ll N(\mathfrak{m}_1)^{\frac{1}{3}}, \tag{2.4}$$

(см. [2], стр. 88). Из оценки (2.2) для примитивного характера и оценки (2.4) следует

$$\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m},\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}_0} \left(1 - \frac{\Xi_1(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{-\eta+it}}\right) \ll N(\mathfrak{m}_1)^{\eta+\frac{1}{3}},$$

$$Z(-\eta+it,\ \Xi) \ll \eta^{-1}\left(dN(\mathfrak{m}_0)\right)^{\frac{1}{2}+\eta} M^{1+2\eta}(1+|t|)^{1+2\eta} N(\mathfrak{m}_1)^{\frac{1}{3}+\eta} \ll$$

$$\ll \eta^{-1} D^{\frac{1}{2}+\eta} M^{1+2\eta}(1+|t|)^{1+2\eta}.$$

Доказательство оценки (2.3) следует из формул (52), (55), (41) работы [10].

Лемма 2.2. *Если $\Xi \neq \Xi_0$, то для любого положительного числа*

$$\delta \leqslant \frac{1}{\ln DM} < \frac{1}{2}$$

в области $-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$ справедлива оценка

$$Z(s,\ \Xi) \ll \delta^{-1} D^{\frac{1-\sigma}{2}} M^{1+\delta-\sigma}(1+|t|)^{1+\delta-\sigma}. \tag{2.5}$$

Если $\Xi = \Xi_0$, то оценка (2.5) *справедлива с условием $|s-t| \geqslant \frac{1}{10}$.*

Доказательство. Пусть $\Xi \neq \Xi_0$, $m \neq 0$. Тогда функции $Z(s,\ \Xi)$ являются регулярными в области $-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$. Воспользуемся леммой 1.4, полагая

$$\alpha = -\delta,\ \beta = 1+\delta,\ \nu = 1+2\eta,\ 2\eta = \delta,\ V = 4\delta^{-1} \ll \delta^{-1},\ U = \delta^{-1} D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta} M^{1+\delta}.$$

Имеем:

$$Z(s,\ \Xi) \ll (\delta^{-1} D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta} M^{1+\delta})^{\frac{1+\delta-\sigma}{1+2\delta}} (\delta^{-1})^{\frac{\delta+\sigma}{1+\delta}} (1+|t|)^{\frac{(1+\delta)(1+\delta-\sigma)}{1+2\delta}} \ll$$

$$\ll \delta^{-1} D^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} M^{1+\delta-\sigma}(1+|t|)^{1+\delta-\sigma}.$$

В случае главного характера $\Xi = \Xi_0$ рассматриваем функцию

$$F(s) = \frac{s-1}{s-2} Z(s,\ \Xi_0), \tag{2.6}$$

которая уже регулярна в области $-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$. Тогда из оценок (2.1) и (2.2) следует

$$F(1+\delta+it) \ll \delta^{-1},\quad F(-\delta+it) \ll \delta^{-1} D^{\frac{1}{2}} M(1+|t|)^{\delta+1}. \tag{2.7}$$

Опять по лемме 1.4 получаем

$$\frac{s-1}{s-2} Z(s,\ \Xi_0) \ll \delta^{-1} D^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} M^{1+\delta-\sigma}(1+|t|)^{1+\delta-\sigma},\qquad -\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta.$$

Если $|s-1| > \frac{1}{10}$, то последнее неравенство и доказывает лемму в случае главного характера.

Если $m=0$, то лемма совпадает с леммой 4 работы [2].

2. **Лемма 2.3.** *Пусть* $N(D, m, t)$ *означает число нулей функции* $Z(s, \Xi)$ *в прямоугольнике* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t-T| \leqslant 1$. *Тогда*

$$N(D, m, t) \ll \ln DM(1+|t|). \tag{2.8}$$

Доказательство. Если $m=0$, то лемма доказана в работе [2]; если $m \neq 0$, но $\mathfrak{m}$ фиксированный идеал, то лемма доказана в работе [8]. Поэтому нашу лемму необходимо доказать в предположении $m \neq 0$, при этом оценка должна быть равномерна относительно идеала $\mathfrak{m}$, т. е. относительно D.

Пусть $\Xi \neq \Xi_0$. Тогда

$$\left|\frac{1}{Z(2+it, \Xi)}\right| = \left|\sum_{\alpha} \frac{\mu(\alpha)\,\Xi(\alpha)}{N(\alpha)^{2+it}}\right| \leqslant Z(2, \Xi_0) \leqslant Z(2) = O(1).$$

Отсюда

$$|Z(2+it, \Xi)| > c_1.$$

Обозначим $s_0 = 2+it$. Оценка (2.5) показывает, что существует константа $c_2 > 0$ такая, что для всех точек s в круге $|s-s_0| \leqslant 12$ справедливо неравенство

$$|Z(s, \Xi)| < e^{c_2 \ln DM(1+|t|)}. \tag{2.10}$$

Пусть $\nu(x) = \nu(x, s_0, \Xi)$ означает число нулей функции $Z(s, \Xi)$ в круге $|s-s_0| \leqslant x$. Тогда по теореме Иенсена (см. [15], § 3.61), используя оценки (2.9) и (2.10), получим:

$$\int_0^{12} \frac{\nu(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{12} \ln|Z(s_0+12e^{i\Theta}, \Xi)|\,d\Theta - \ln|Z(s_0, \Xi)| <$$

$$< c_3 \ln DM(1+|t|). \tag{2.11}$$

Кроме того

$$\int_0^{12} \frac{\nu(x)}{x}\,dx \geqslant \int_3^{12} \frac{\nu(x)}{x}\,dx \geqslant \nu(3)\ln 3;$$

с другой стороны

$$N(D, m, t)\ln 3 \leqslant \int_0^{12} \frac{\nu(x)}{x}\,dx < c_3 \ln DM(1+|t|),$$

откуда следует

$$N(D, m, t) \leqslant c_4 \ln DM(1+|t|).$$

Если $\Xi = \Xi_0$, то аналогичные рассуждения применяем к функции $(s-1)Z(s, \Xi_0)$.

Лемма 2.4. *В полосе* $-1 \leqslant \sigma \leqslant 5$ *выполняется неравенство*

$$\frac{Z'}{Z}(s, \Xi) - \sum_{|s-\rho|<1} \frac{1}{s-\rho} + \frac{E(\Xi)}{s-1} \ll \ln DM(1+|t|). \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $s_0 = 2+it$. Тогда в круге $|s-s_0| \leqslant 12$ из оценок (2.9) и (2.10) следует:

$$\left|\frac{Z(s, \Xi)}{Z(s_0, \Xi)}\right| \leqslant \frac{1}{c_1} e^{c_2 \ln DM(1+|t|)}. \tag{2.13}$$

Применяя лемму 1.2 к функции $f(s) = Z(s, \Xi)$ в случае $\Xi \neq \Xi_0$ и к функции $f(s) = (s-1)Z(s, \Xi_0)$ в случае $\Xi = \Xi_0$ в круге радиуса $r=2$, легко получаем оценку (2.12).

Лемма 2.5. *Пусть* $N(t, r, \Xi)$ *означает число нулей функции* $Z(s, \Xi)$ *в круге* $G(t, r)$:

$$|s-(1+it)|\leqslant r. \tag{2.14}$$

Если

$$\frac{1}{\ln DM(1+|t|)}\leqslant r\leqslant 2, \tag{2.15}$$

то

$$N(t, r, \Xi)<c_5 r\ln DM(1+|t|). \tag{2.16}$$

Доказательство. Если $1\leqslant r\leqslant 2$, то лемма следует из леммы 2.3. Поэтому в дальнейшем будем считать $r\leqslant 1$. Пусть $s=1+r+it$. Из леммы 2.4 для $\sigma>0$ следует

$$\frac{Z'}{Z}(s, \Xi)=-\frac{E(\Xi)}{s-1}+\sum_{|s-\rho|<1}\frac{1}{s-\rho}+O\left(\ln DM(1+|t|)\right). \tag{2.17}$$

Отсюда для $\sigma>1$ получаем

$$\operatorname{Re}\frac{Z'}{Z}(s, \Xi)\leqslant\left|\frac{Z'}{Z}(s, \Xi)\right|\leqslant\sum_{\alpha}\frac{\Lambda(\alpha)}{N(\alpha)^{\sigma}}=-\frac{Z'}{Z}(\sigma)\ll\frac{1}{\sigma-1}. \tag{2.18}$$

Кроме того, для точек $s=1+r+it$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}>0;$$

поэтому для $r\leqslant 1$ и для каждого $\rho=\beta+i\gamma\in G(t, r)$, $s=1+r+it$, $|\gamma-t|\leqslant 1$, следует

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}=\operatorname{Re}\frac{s-\rho}{|s-\rho|^2}\geqslant\frac{r}{(2r)^2}=\frac{1}{4r}, \tag{2.19}$$

откуда

$$\operatorname{Re}\sum_{|\gamma-t|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho}\geqslant\operatorname{Re}\sum_{\rho\in G(t, r)}\frac{1}{s-\rho}\geqslant\frac{N(t, r, \Xi)}{4r}. \tag{2.20}$$

Далее имеем

$$\frac{E(\Xi)}{s-1}\ll\frac{1}{\sigma-1}=\frac{1}{r}, \qquad (\sigma=1+r). \tag{2.21}$$

Все эти оценки вместе с соотношением (2.17) и доказывают лемму.

3. **Лемма 2.6.** *Пусть* $v\geqslant 2$ *целое число. Существует последовательность чисел* $T_v=T_v(\Xi)$ *с условием* $v<T_v<v+1$, *для которых справедлива оценка*

$$\left|\frac{Z'}{Z}(\sigma\pm iT_v, \Xi)\right|<c_6\ln^2 DMT_v, \qquad (-1\leqslant\sigma\leqslant 2). \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $\rho(\Xi)=\beta(\Xi)+i\gamma(\Xi)=\beta+i\gamma$ означает нули функции $Z(s, \Xi)$, расположенные в прямоугольнике $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $v<t<v+1$. Ординаты этих нулей мы можем расположить в возрастающем порядке $\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\ldots\leqslant\gamma_l$. Число этих нулей конечное и по лемме 2.3 $\ll\ln DMv$, $(D>1,\ v\geqslant 2)$. Делим интервал $(v, v+1)$ на $l+1$ равных частей. Существует по крайней мере один интервал, скажем с индексом j, $j=1, 2, \ldots, l$, который не содержит нулей функции $Z(s, \Xi)$. Длина этого интервала

$$>\frac{c_7}{\ln DMv},$$

поэтому

$$|T_v-\gamma_j|>\frac{c_7}{\ln DMv}$$

для всех $j=1, 2, \ldots, l$. Тогда числом T_v можно считать любую ординату из интервала с индексом j. По лемме 2.4

$$\frac{Z'}{Z}(\sigma+iT_v, \Xi)=\sum_{|\gamma-T_v|\leqslant 1}\frac{1}{\sigma+iT_v-\rho}+O(\ln DMT_v)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\gamma-T_v|\leqslant 1}\frac{1}{|\gamma-T_v|}+O(\ln DMT_v)\leqslant\sum_{|\gamma-T_v|\leqslant 1}\frac{1}{c_7}\ln DMT_v+O(\ln DMT_v).$$

Число членов последней суммы по лемме 2.3 не превосходит величины $c_4\ln DMT_v$, что и доказывает лемму. В силу симметричности нулей относительно прямой $t=0$, лемма справедлива и в отрицательной области $t<0$.

Лемма 2.7. *Для достаточно малой константы* a, $0<a<1$, *справедливо неравенство*

$$\left|\frac{Z'}{Z}(\sigma_0, \Xi_0)\right|<\frac{5}{4(\sigma_0-1)}, \quad \text{где} \quad \sigma_0=1+\frac{a}{\ln DM}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Если $\sigma>1$, то

$$\frac{Z'}{Z}(\sigma, \Xi_0)=-\sum_{\alpha}\frac{\Xi_0(\alpha)\Lambda(\alpha)}{N(\alpha)^\sigma}<0.$$

Воспользовавшись леммой 2.4, получим:

$$\frac{Z'}{Z}(\sigma, \Xi_0)=-\frac{1}{\sigma-1}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{|\sigma-\rho|<1}\frac{1}{\sigma-\rho}+\Theta c_8\ln DM\right\}, \qquad |\Theta|<1. \tag{2.24}$$

Далее при $\sigma>1$ и $\beta<1$ имеем

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-\rho}=\frac{\sigma-\beta}{|\sigma-\rho|^2}>0,$$

таким образом

$$\mathrm{Re}\sum_{|\rho-\sigma|<1}\frac{1}{\sigma-\rho}\geqslant 0. \tag{2.25}$$

Из соотношений (2.24) и (2.25) получаем

$$-c_8\ln DM\leqslant\mathrm{Re}\left\{\sum_{|\rho-\sigma|<1}\frac{1}{\sigma-\rho}+\Theta c_8\ln DM\right\}\leqslant\frac{1}{\sigma-1}.$$

Так как $-\frac{Z'}{Z}(\sigma, \Xi_0)$ неотрицательна, то наибольшее значение для нее возможно

$$\frac{1}{\sigma-1}+c_8\ln DM.$$

Если a достаточно мала, то

$$c_8\ln DM<\frac{1}{4a}\ln DM.$$

Обозначая $\sigma_0=1+\frac{a}{\ln DM}$, получаем лемму.

4. **Лемма 2.8.** *Существует абсолютная константа* $c_9>0$ *такая, что в области*

$$\sigma>1-\frac{c_9}{\ln DM|t|}, \qquad |t|\geqslant 3 \tag{2.26}$$

функция $Z(s, \Xi)$ не имеет нулей.

Доказательство. Пусть $\rho=\beta+i\gamma$, $|\gamma|\geqslant 3$ есть некоторый нуль функции $Z(s, \Xi)$ и пусть

$$\sigma_0=1+\frac{a}{\ln DM|\gamma|},$$

где a — константа леммы 2.7. Имеем:

$$-3\frac{Z'}{Z}(\sigma_0,\ \Xi_0)-4\operatorname{Re}\frac{Z'}{Z}(\sigma_0+i\gamma,\ \Xi)-\operatorname{Re}\frac{Z'}{Z}(\sigma_0+2i\gamma,\ \Xi^2)=$$

$$=3\sum_{\substack{\mathfrak{p},k\geqslant 1\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}}}\frac{\Xi_0(\mathfrak{p}^k)\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{k\sigma_0}}+4\operatorname{Re}\sum_{\substack{\mathfrak{p},k\geqslant 1\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}}}\frac{\Xi(\mathfrak{p}^k)\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{k(\sigma_0+i\gamma)}}+\operatorname{Re}\sum_{\substack{\mathfrak{p},k\geqslant 1\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}}}\frac{\Xi^2(\mathfrak{p}^k)\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{k(\sigma_0+2i\gamma)}}=$$

$$=\sum_{\substack{\mathfrak{p},k>1\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}}}\frac{3+4\cos\left\{\varphi(\mathfrak{p}^k)\,gmk\arg\mathfrak{p}-k\gamma\ln N(\mathfrak{p})\right\}+\cos\left\{2\varphi(\mathfrak{p}^k)\,gmk\arg\mathfrak{p}-2k\gamma\ln N(\mathfrak{p})\right\}}{N(\mathfrak{p})^{k\sigma_0}\ln^{-1}N(\mathfrak{p})}=$$

$$=\sum_{\substack{\mathfrak{p},k\geqslant 1\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}}}\frac{2\left\{1+\cos\left(gmk\,\varphi(\mathfrak{p}^k)\arg\mathfrak{p}-k\gamma\ln N(\mathfrak{p})\right)\right\}^2}{N(\mathfrak{p})^{k\sigma_0}}\ln N(\mathfrak{p})\geqslant 0. \tag{2.27}$$

Из леммы 2.4 получаем:

$$\left.\begin{aligned}-\operatorname{Re}\frac{Z'}{Z}(\sigma_0+i\gamma,\ \Xi)&<8\left\{c_{10}\ln DM|\gamma|+2\ln\frac{1}{a}\right\}-\frac{4}{\sigma_0-\beta},\\ -\operatorname{Re}\frac{Z'}{Z}(\sigma_0+2i\gamma,\ \Xi^2)&<8\left\{c_{10}\ln DM|\gamma|+2\ln\frac{1}{a}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Подставляя оценку (2.28) и (2.23) в неравенство (2.27), получаем

$$\frac{15}{4(\sigma_0-1)}+40\left(c_{10}\ln DM|\gamma|+2\ln\frac{1}{a}\right)-\frac{4}{\sigma_0-\beta}\geqslant 0,$$

откуда

$$1-\beta\geqslant\frac{16(\sigma_0-1)}{15+160(\sigma_0-1)\left(c_{10}\ln DM|\gamma|+2\ln\frac{1}{a}\right)}-(\sigma_0-1)=$$

$$=\frac{a}{\ln DM|\gamma|}\left\{\frac{16}{15+160ac_{10}+\dfrac{320a\ln\frac{1}{a}}{\ln DM|\gamma|}}-1\right\}.$$

Последнее неравенство для β дает оценку

$$\beta>1-\frac{c_0}{\ln DM|\gamma|},$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2.9. *Существует абсолютная константа $c_{11}>0$ такая, что ни одна из функций $Z(s,\ \Xi)$ с показателем характера $m\neq 0$ не имеет нулей в области*

$$\sigma>1-\frac{c_{11}}{\ln DM},\qquad |t|\leqslant 5.$$

Доказательство. Проводится аналогичными рассуждениями как и в лемме 2.8.

5. **Теорема 2.1.** *Существует абсолютная константа $C>0$ такая, что функция $Z(s,\ \Xi)$ с показателем характера $m\neq 0$ не имеет нулей в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{C}{\ln DM(1+|t|)}\geqslant\frac{3}{4}. \tag{2.29}$$

Если $m=0$, то существует не более одного действительного характера для которого функция $Z(s,\ \chi)$ в области (2.29) может иметь действительный нуль $1-\delta'$, удовлетворяющий условию

$$\delta'>D^{-4},\quad D>D_0>1. \tag{2.30}$$

Доказательство. В случае $m \neq 0$ теорема следует из лемм 2.8 и 2.9. Если $m=0$, то теорема следует из лемм 11—17, доказанных в работе [2], стр. 98—106.

6. **Лемма 2.10.** *При* $x \geqslant 1$

$$\sum_{0<N(\alpha)\leqslant x} \Xi(\alpha) = c_{12} E(\Xi) x + O(DM \ln x) + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

(См. [8], лемма 6.)

Лемма 2.11. *Пусть* $x \geqslant 1$, φ_1, φ_2 — *вещественные числа*, $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{0<N(\alpha)\leqslant x \\ \varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2}} \tau(\alpha) = (\varphi_2 - \varphi_1)(c_{13} \ln x + c_{14}) x + O(x^{\frac{3}{4}} \ln^2 x).$$

(См. [8], лемма 18.)

Лемма 2.12. *Пусть* $X \geqslant 1$. *Тогда в области* $\sigma > \frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$Z(s, \Xi) = \frac{1}{g'} \sum_{0<N(\alpha)\leqslant x} \Xi(\alpha) N(\alpha)^{-s} + c_{12} \frac{E(\Xi) X^{1-s}}{s-1} +$$

$$+ \frac{1}{g'} s \int_X^\infty H(u, \Xi) u^{-1-s} du - \frac{1}{g'} H(X, \Xi) X^{-s},$$

где

$$H(u, \Xi) = \sum_{0<N(\alpha)\leqslant x} \Xi(\alpha) - c_{12} g' E(\Xi) x.$$

(См. [8], лемма 7.)

7. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $R(\omega, t)$ — прямоугольник

$$1-\omega \leqslant \sigma \leqslant 1-\omega+\frac{\lambda}{\ln DP}, \quad |t| \leqslant \frac{e\lambda}{\ln DP}, \quad C \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2} \ln DP, \quad P>1,$$

где C — константа теоремы 2.1; $N(\omega, t)$ — количество функций $Z(s, \Xi)$ с $|m| \leqslant P$, имеющих хотя бы один нуль в прямоугольнике $R(\omega, t)$,

$$u = u(\omega) = (DP)^{\frac{11-23\omega}{2(4\omega^2-\omega+1)}},$$

$$v = v(\omega) = (DP)^{\frac{7-6\omega}{4\omega^2-\omega+1}},$$

$$a(\alpha) = a(\alpha, u) = \sum_{\substack{\delta/\alpha \\ N(\alpha)>u}} \mu(\delta),$$

$$S(\Xi, x, s, u) = S(\Xi, x, s) = \sum_{u<N(\alpha)\leqslant x} \Xi(\alpha) a(\alpha) N(\alpha)^{-s}.$$

8. **Лемма 2.13.** *Если функция* $Z(s, \Xi)$, $\Xi \neq \Xi_0$, *в прямоугольнике* $R(\omega, t)$ *имеет нуль, то существует число* $v_1 = v_1(\Xi) \in (u, v)$ *и константа* $c_{16} > 0$ *такие, что*

$$|S(\Xi, v, \omega)| > c_{16} \ln^{-1} DP, \qquad 0 < \omega \leqslant \frac{1}{16}. \tag{2.31}$$

Доказательство. Для достаточно большого DP из леммы 2.12 при $\Xi \neq \Xi_0$ следует

$$\sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x} \Xi(\alpha) N(\alpha)^{-s} = g' Z(s, \Xi) - s \int_x^\infty H(y, \Xi) y^{-1-s} ds + H(x, \Xi) x^{-s},$$

где

$$H(y, \Xi) = \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant y} \Xi(\alpha).$$

Допустим, что функция $Z(s, \Xi)$, $\Xi \neq \Xi_0$, $|m| \leqslant P$ имеет нуль $\rho = \beta + i\gamma$ в прямоугольнике $R(\omega, t)$. Тогда из последнего соотношения ввиду оценки леммы 2.10, получаем

$$\sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x} \Xi(\alpha) N(\alpha)^{-\rho} \ll |\rho| \int_x^\infty \{ DM \ln y + y^{\frac{1}{2}} \} y^{-1-\beta} dy +$$

$$+ O(DMx^{-\beta} \ln x) + O(x^{\frac{1}{2}-\beta}) \ll \frac{e\lambda}{\ln DP} \left\{ DP \int_x^\infty \frac{\ln y}{y^{1+\beta}} dy + \int_x^\infty \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}+\beta}} \right\} +$$

$$+ DP \frac{\ln x}{x^\beta} + x^{\frac{1}{2}-\beta} \ll \frac{(DP)^{\frac{1}{2}}}{\ln DP} \left\{ DP \frac{\ln x}{x^\beta} + x^{\frac{1}{2}-\beta} \right\} + DP \frac{\ln x}{x^\beta} + x^{\frac{1}{2}-\beta} \ll$$

$$\ll \frac{(DP)^{\frac{1}{2}}}{\ln DP} \{ DPx^{-\beta} + x^{\frac{1}{2}-\beta} \} \ln x.$$

Тогда

$$\left| \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant u} \mu(\alpha) \Xi(\alpha) N(\alpha)^{-\rho} \sum_{1 \leqslant N(\delta) \leqslant \frac{v}{N(\alpha)}} \Xi(\delta) N(\delta)^{-\rho} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant u} N(\alpha)^{-\beta} \left| \sum_{1 \leqslant N(\delta) \leqslant \frac{v}{N(\alpha)}} \Xi(\delta) N(\delta)^{-\rho} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant u} N(\alpha)^{-\beta} \left\{ \frac{(DP)^{\frac{1}{2}}}{\ln DP} \left(DP \left(\frac{v}{N(\alpha)}\right)^{-\beta} + \left(\frac{v}{N(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}-\beta} \right) \ln \frac{v}{N(\alpha)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16} \frac{(DP)^{\frac{1}{2}}}{\ln DP} \left\{ v^{-\beta} \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant u} 1 + v^{\frac{1}{2}-\beta} \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant u} N(\alpha)^{-\frac{1}{2}} \right\} \ln DP \leqslant$$

$$\leqslant c_{16} (DP)^{\frac{1}{2}} \{ DPuv^{-1+\omega} + u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}+\omega} \} = c_{16} (DP)^{\frac{3}{2}} uv^{-1+\omega} + (DP)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}+\omega}.$$

Из определения чисел u и v следует, что

$$uv^{-1+\omega} = (DP)^{\frac{11-23\omega}{2(4\omega^2-\omega+1)} - \frac{7-6\omega}{4\omega^2-\omega+1}(1-\omega)} = (DP)^{-\frac{3}{2}},$$

$$u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}+\omega} = (DP)^{-\frac{24\omega^2-17\omega+3}{4(4\omega^2-\omega+1)}}.$$

Если $0 < \omega \leqslant \frac{1}{16}$, то

$$\frac{24\omega^2-17\omega+3}{4(4\omega^2-\omega+1)} > \frac{1}{2},$$

поэтому окончательно имеем

$$\left| \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant u} \mu(\alpha)\Xi(\alpha)N(\alpha)^{-\rho} \sum_{1 \leqslant N(\delta) \leqslant \frac{v}{N(\alpha)}} \Xi(\delta)N(\delta)^{-\rho} \right| < c_{17} < g'^2.$$

Подставляя это в тождество

$$\sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant v} \mu(\alpha)\Xi(\alpha)N(\alpha)^{-\rho} \sum_{1 \leqslant N(\delta) \leqslant \frac{v}{N(\alpha)}} \Xi(\alpha)N(\delta)^{-\rho} = g'^2_v,$$

имеем в наших предположениях

$$|S(\Xi, v, \rho)| > c_{18}. \tag{2.32}$$

Для доказательства леммы предположим, что

$$|S(\Xi, x, \omega)| < c_{16} \ln^{-1} DP.$$

для всех $x \in (u, v)$. Тогда из равенства

$$S(\Xi, v, \rho) = (\rho - 1 + \omega) \int_u^v S(\Xi, x, \omega) x^{-\omega-\rho} dx + S(\Xi, v, \omega) v^{1-\omega-\rho}$$

следует при достаточно малом c_{19}

$$|S(\Xi, v, \rho)| \leqslant c_{18} c_{19},$$

что противоречит (2.32) при достаточно больших D, P. Этим лемма доказана.

9. **Лемма 2.14.** *Пусть* $0 < \omega \leqslant \frac{1}{16}$. *Существует более чем*

$$c_{20} N(\omega, T) v^{-\omega} \ln^{-3} DP$$

характеров Ξ *с показателями из промежутка* $|m| \leqslant P$ *и общее для всех их число* $v_2 \in (u, v)$ *таких, что*

$$|S(\Xi, v_2, \omega)| > c_{21} \ln^{-1} DP. \tag{2.33}$$

Доказательство. Пусть функция $Z(s, \Xi)$, $\Xi \neq \Xi_0$, $|m| \leqslant P$ имеет нуль в прямоугольнике $R(\omega, T)$ и $v_1(\Xi) = v_1$ — число из леммы 2.13. Полагаем

$$x = v_1 \pm \Theta v_3, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1,$$

$$v_3 = v_3(\Xi) = c_{22} v_1^{1-\omega} \ln^{-2} DP,$$

где $c_{22} > 0$ достаточно малая константа,

$$x_1 = v_1 - \Theta v_3 \qquad x_2 = v_1 + \Theta v_3,$$

$$F(y) = \sum_{x_1 < N(\alpha) \leqslant y} \tau(\alpha), \qquad (y > x_1).$$

Тогда имеем:

$$S_1 = |S(\Xi, v_1, \omega)| - |S(\Xi, x, \omega)| \leqslant \left| \sum_{x_1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x_2} \Xi(\alpha) a(\alpha) N(\alpha)^{-1+\omega} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x_1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x_2} \tau(\alpha) N(\alpha)^{-1+\omega} \leqslant \int_{x_1}^{x_2} F(y) y^{-2+\omega} dy + F(x_2) x_2^{-1+\omega}.$$

Из леммы 2.11 получаем

$$F(y) = \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x_2} \tau(\alpha) - \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant x_1} \tau(\alpha) \leqslant c_{23}(x_2 - x_1) \ln DP + O(x_2^{\frac{3}{4}} \ln^2 DP).$$

Поэтому

$$S_1 \leqslant \left\{ c_{23}(x_2 - x_1)\ln DP + O(x_2^{\frac{3}{4}}\ln^2 DP)\right\} \int\limits_{x_1}^{x_2} y^{-2+\omega}\,dy +$$

$$+\left\{ c_{23}(x_2 - x_1)\ln DP + O(x_2^{\frac{3}{4}}\ln^2 DP)\right\} x_2^{-1+\omega} \leqslant c_{23}(x_2 - x_1)\, x_1^{-1+\omega}\ln DP +$$

$$+ O(x_2^{-\frac{1}{4}+\omega}\ln^2 DP) \leqslant c_{24}\ln^{-1} DP$$

при достаточно большом DP. В силу леммы 2.13 отсюда следует, что

$$|S(\Xi,\ x,\ \omega)| > c_{25}\ln^{-1} DP \tag{2.34}$$

для всякой точки интервала $(x_1,\ x_2)$, длина которого не превосходит величины

$$c_{26}v_1^{1-\omega}\ln^{-2} DP,$$

где $c_{26} < c_{24}$ и c_{24} достаточно малая константа.

Для доказательства утверждения леммы разобъем интервал $[u,\ v]$ на интервалы

$$[v^{(k+1)},\ v^{(k)}],\quad [v^{(k)},\ v^{(k-1)}],\ \ldots,\ [v^{(1)},\ v^{(0)}],$$

где

$$k = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{v}{u}\right],$$

$$v^{(j)} - 2^{-j}v,\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\quad v^{(k+1)} = u.$$

Среди этих интервалов существует по крайней мере один, скажем $[v^{(j+1)},\ v^{(j)}]$, для которого имеется

$$\geqslant (k+1)^{-1} N(\omega,\ T)$$

характеров Ξ с $|m| \leqslant P$ и числами v_1 из этого интервала. Каждому числу v_1 соответствует интервал длины

$$c_{26}v_1^{1-\omega}\ln^{-2} DP$$

с указанным выше свойством. Сумма длин этих интервалов

$$\geqslant (k+1)^{-1} N(\omega,\ T)\, c_{26}v_1^{1-\omega}\ln^{-2} DP \geqslant c_{20} N(\omega,\ t)\,(v^{(j+1)})^{1-\omega}\ln^{-3} DP.$$

Все они расположены на интервале длины $\leqslant v^{(j+1)}$, поэтому они будут перекрываться хотя бы в одной точке v_2 в количестве

$$\geqslant c_{20}\frac{N(\omega,\ T)}{v^{(j+1)}}(v^{(j+1)})^{1-\omega}\ln^{-3} DP \geqslant c_{20} N(\omega,\ T)\, v^{-\omega}\ln^{-3} DP,$$

что и доказывает лемму.

Теперь мы уже в состоянии доказать необходимую в дальнейшем плотностную теорему.

10. Теорема 2.2. *Пусть $N(\omega,\ T)$ означает число нулей функции*

$$Z_1(s) = \prod_{|m| \leqslant P}\ \prod_{\chi} Z(s,\ \Xi),$$

в прямоугольнике $1-\omega \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$, $0 < \omega_0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{16}$. Тогда существует абсолютная константа $A > 0$ такая, что для любого $\lambda \in \left[C,\ \frac{1}{2}\ln DP\right]$, $D > D_0 > 1$, $P > 1$ (C — константа теоремы 2.1),

$$N\left(\frac{\lambda}{\ln DP},\ \frac{e^{\lambda}}{\ln DP}\right) < e^{A\lambda}.$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$S_2 = \sum_{\Xi}{}' |S(\Xi, v_2, \omega)|^2,$$

где суммируется по всем характерам Ξ, обладающим свойством леммы 2.14. По той же лемме

$$S_2 > c_{26} N(\omega, T) v^{-\omega} \ln^{-6} DP. \tag{2.35}$$

С другой стороны

$$S_2 \leqslant \sum_{\chi} \sum_{|m| \leqslant P} |S(\chi \xi^{gm}, v_2, \omega)|^2,$$

где суммируется по всем $h(\mathfrak{m})$ характеров $\chi \bmod \mathfrak{m}$. Имеем:

$$S_2 \leqslant \sum_{\chi} \sum_{|m| \leqslant P} \Bigl| \sum_{u \leqslant N(\alpha) \leqslant v_2} \chi \xi^{gm} a(\alpha) N(\alpha)^{-1+\omega} \Bigr|^2 =$$

$$= \sum_{\chi} \sum_{|m| \leqslant P} \sum_{u \leqslant N(\alpha) \leqslant v_2} \sum_{u \leqslant N(\delta) \leqslant v_2} \chi(\alpha) \overline{\chi}(\delta) \xi^{gm}(\alpha) \overline{\xi^{gm}}(\delta) a(\alpha) a(\delta) N(\alpha)^{-1+\omega} N(\delta)^{-1+\omega} =$$

$$= \sum_{u \leqslant N(\alpha) \leqslant v_2} \sum_{u \leqslant N(\delta) \leqslant v_2} a(\alpha) a(\delta) N(\alpha)^{-1+\omega} N(\delta)^{-1+\omega} \sum_{\chi} \chi(\alpha) \overline{\chi}(\delta) \times$$

$$\times \sum_{|m| \leqslant P} e^{gim(\arg \alpha - \arg \delta)} \ll h \sum_{u \leqslant N(\alpha) \leqslant v_2} \sum_{u \leqslant N(\delta) \leqslant v_2} \tau(\alpha) \tau(\delta) N(\alpha)^{-1+\omega} N(\delta)^{-1+\omega} \psi(\alpha, \delta) \ll$$

$$\ll D \sum_{u \leqslant N(\alpha) \leqslant v_2} \tau(\alpha) N(\alpha)^{-1+\omega} \sum_{u \leqslant N(\delta) \leqslant v_2} \tau(\delta) N(\delta)^{-1+\omega} \psi(\alpha, \delta),$$

где

$$\psi(\alpha, \delta) = \min\left(P, \frac{1}{\left(\frac{g(\arg \alpha - \arg \delta)}{2\pi}\right)}\right).$$

Для оценки внутренней суммы положим

$$\varphi_j = \arg \alpha + \frac{(2j-1)\pi}{g[P]}, \qquad j = 0, 1, \ldots, g[P].$$

Тогда, если $y > u$, имеем

$$W(y, \alpha) = \sum_{u < N(\delta) \leqslant y} \tau(\delta) \psi(\alpha, \delta) = \sum_{j=0}^{g[P]-1} \sum_{\substack{u < N(\alpha) \leqslant y \\ \varphi_j < \arg \delta \leqslant \varphi_{j+1}}} \tau(\delta) \psi(\alpha, \delta) \leqslant$$

$$\leqslant P \sum_{j=0}^{g[P]-1} \min\left(1, \frac{1}{\min\left(j - \frac{1}{2}, [P] - j - \frac{1}{2}\right)}\right) \sum_{\substack{1 \leqslant N(\delta) \leqslant y \\ \varphi_j < \arg \delta \leqslant \varphi_{j+1}}} \tau(\delta).$$

Воспользовавшись леммой 2.11, получим

$$W(y, \alpha) \ll P \ln P \cdot \left(\frac{1}{P} y \ln y + y^{\frac{3}{4}} \ln^2 y\right) \ll (y + P y^{\frac{3}{4}}) \ln P \cdot \ln^2 y.$$

Отсюда частичным суммированием выводим

$$\sum_{u < N(\alpha) \leqslant v} \tau(\delta) N(\delta)^{-1+\omega} \psi(\alpha, \delta) = (1 - \omega) \int_u^v W(y, \alpha) y^{-2+\omega} dy + W(v, \alpha) y^{-1+\omega} \ll$$

$$\ll (1 - \omega)(v + P v^{\frac{3}{4}}) \ln P \cdot \ln^2 v \cdot \int_u^v \frac{dy}{y^{2-\omega}} + (v + P v^{\frac{3}{4}}) \ln P \cdot \ln^2 v \cdot v^{-1+\omega} \ll$$

$$\ll \left(\frac{1}{\omega_0} v^{\omega} + P u^{-\frac{1}{4}+\omega}\right) \ln^3 DP.$$

Таким образом

$$S_2 \ll \left(\frac{1}{\omega_0} v^{\omega} + Pu^{-\frac{1}{4}+\omega}\right) \ln^3 DP \cdot D \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant v} \tau(\alpha) N(\alpha)^{-1+\omega} \ll$$

$$\ll DPv^{\omega} \ln^4 DP \cdot \sum_{1 \leqslant N(\alpha) \leqslant v} \tau(\alpha) N(\alpha)^{-1+\omega}.$$

Применяя еще раз лемму 2.11 и частичное суммирование, получаем

$$S_2 \ll DPv^{2\omega} \ln^6 DP.$$

Последняя оценка и оценка (2.35) дают неравенство

$$N(\omega, T) v^{-\omega} \ln^{-5} DP \ll DPv^{2\omega} \ln^5 DP.$$

Отсюда

$$N(\omega, T) \ll DPv^{3\omega} \ln^{10} DP =$$

$$= DP \cdot (DP)^{3 \frac{7-6\omega}{4\omega^2-\omega+1} \cdot \omega} \ln^{10} DP = (DP)^{\frac{20\omega-14\omega^2+1}{4\omega^2-\omega+1} \cdot \omega} \ln^{10} DP.$$

В интервале $0 < \omega \leqslant \frac{1}{16}$ функция

$$\frac{20\omega - 14\omega^2 + 1}{4\omega^2 - \omega + 1}$$

достигает своего максимума ϑ в точке

$$\omega = \frac{\sqrt{2347} - 31}{66}.$$

Таким образом

$$N(\omega, T) \leqslant (DP)^{(\vartheta+\varepsilon)\omega},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое число для достаточно большого DP. Обозначая $\vartheta + \varepsilon = \vartheta_1$ и полагая

$$\omega = \frac{\lambda}{\ln DP},$$

имеем

$$N(\omega, T) < (DP)^{\vartheta_1 \frac{\lambda}{\ln DP}} = e^{\vartheta_1 \lambda},$$

что и доказывает теорему с $A = \vartheta_1$.

В случае $m = 0$ теорема совпадает с теоремой работы [4].

11. Теорема 2.3. *Пусть* $P > 1$ *и*

$$Z_1(s) = \prod_{|m| \leqslant P} \prod_{\chi} Z(s, \Xi).$$

Существует абсолютная константа $A_1 > 0$ *такая, что в области*

$$1 - \frac{A_1}{\ln DP} \leqslant \sigma \leqslant 1, \qquad |t| \leqslant DP$$

функция $Z_1(s)$ *не имеет нулей при*

$$P > D^{-1} e^{A_1 D^4}.$$

Если

$$P \leqslant D^{-1} e^{A_1 D^4},$$

то функция $Z_1(s)$ *в области*

$$1 - \frac{\lambda_0}{\ln DP} \leqslant \sigma \leqslant 1, \qquad |t| \leqslant DP,$$

где

$$\lambda_0 = A_1 \ln \frac{eA_1}{\delta_0 \ln DP}, \qquad A_1 \leqslant \lambda_0 \leqslant \frac{1}{2} \ln DP,$$

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta', & \text{если} \quad \delta' \leqslant \dfrac{A_1}{\ln DP}, \\ \dfrac{A_1}{\ln DP}, & \text{если} \quad \delta' > \dfrac{A_1}{\ln DP}, \end{cases}$$

может иметь не более одного нуля $\beta' = 1 - \delta'$, *который является действительным и удовлетворяет неравенству* $\delta > D^{-4}$ (если он существует).

Доказательство. Если $m \neq 0$, то теорема следует из теоремы 2.1. В случае $m = 0$, доказательство можно найти в работе [3].

3. Некоторые другие вспомогательные леммы

1. **Лемма 3.1.** *Пусть ряд*

$$F(s) = \sum_{\alpha} a(\alpha) N(\alpha)^{-s}, \qquad s = \sigma + it$$

абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0 > -\infty$. *Для любого действительного числа* $y > 0$ *и любого комплексного числа* $w = u + iv$ *имеет место равенство*

$$\sum_{\alpha} \frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^w} e^{-yN(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Gamma(s-w)}{y^{s-w}} F(s)\, ds, \tag{3.1}$$

где $b > \sigma_0$, $b > u$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Gamma(s-w)}{y^{s-w}} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Gamma(s-w)}{y^{s-w}} \sum_{\alpha} \frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^s} ds =$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^w} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{(yN(\alpha))^s} ds. \tag{3.2}$$

Перемена порядка суммирования и интегрирования здесь допустима, так как при $\operatorname{Re} s = b - u$ по условию леммы

$$\sum_{\alpha} \left| \frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^{s+w}} \right| = \sum_{\alpha} \frac{|a(\alpha)|}{N(\alpha)^b} < \infty$$

и

$$\int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty} \left| \frac{\Gamma(s)}{y^s} \right| \cdot |ds| = \frac{1}{y^{b-u}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(b-u+it)|\, dt < \infty, \qquad b-u > 0.$$

Воспользуемся теперь леммой 1.3, полагая

$$f(s) = \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx, \qquad (\sigma > 0).$$

Тогда

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{y^s} ds, \qquad b > 0, \quad y > 0.$$

Так как в нашем случае $b-u>0$, то из последней формулы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{(yN(\alpha))^s}\,ds=e^{-yN(\alpha)},$$

что вместе с соотношением (3.2) доказывает лемму.

Лемма 3.2. *Если $y>0$, то для любого действительного a*

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}N(\alpha)^{-s}e^{s^2y}\,ds=i\sqrt{\pi}\,y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2N(\alpha)}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $s=a+it$. Тогда

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}N(\alpha)^{-s}e^{s^2y}\,ds=\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}N(\alpha)^{-a-it}e^{(a+it)^2y}\,d(a+it)=$$

$$=iN(\alpha)^{-a}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}N(\alpha)^{-it}e^{(a^2+2ait-t^2)y}\,dt=$$

$$=iN(\alpha)^{-a}e^{a^2y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-yt^2+it\left(2ay-\ln N(\alpha)\right)}\,dt. \tag{3.4}$$

Обозначим для краткости $q=i\left(2ay-\ln N(\alpha)\right)$ и воспользуемся известной формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-px^2\pm qx}\,dx=e^{\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}},\qquad p>0.$$

Полагая $p=y$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-yt^2+qt}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{\frac{q^2}{4y}}=\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{\frac{1}{4y}\left\{i\left(2ay-\ln N(\alpha)\right)\right\}^2}.$$

Последнее равенство вместе с (3.4) дает

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}N(\alpha)^{-s}e^{s^2y}\,ds=i\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{-\frac{1}{4y}\ln^2N(\alpha)},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.3. *Пусть ряд*

$$F(s)=\sum_{\alpha}a(\alpha)N(\alpha)^{-s}$$

абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma>\sigma_0>-\infty$, $y>0$, $b>\sigma_0$ и $w=u+iw$. Тогда

$$\sum_{\alpha}\frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^w}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2N(\alpha)}=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}F(s)e^{(s-w)^2y}\,ds.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}F(s)e^{(s-w)^2y}\,ds=\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{(s-w)^2y}\sum_{\alpha}\frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^s}\,ds=$$

$$=\sum_{\alpha}\frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^w}\int\limits_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty}N(\alpha)^{-s}e^{s^2y}\,\bar{d}s \tag{3.5}$$

в силу абсолютной сходимости ряда и интеграла при $s=b-u+it$. Применяя лемму 3.2, получаем

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{(s-w)^2 y} F(s)\,ds = \sum_{\alpha} \frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^w}\cdot i\sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)},$$

что в месте с равенством (3.5) доказывает лемму.

2. Лемма 3.4. *Если* $y\geqslant 1$, *то для любого* b *из интервала* $\frac{1}{2}\leqslant b<1$ *справедливо соотношение*

$$S(y,\ \Xi,\ b)=\sum_{\alpha}\Xi(\alpha)\Lambda(\alpha)N(\alpha)^b e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} =$$

$$=2\sqrt{\pi y}\left\{e^{(1+b)^2 y}E(\Xi)-\sum_{\rho_\Xi} e^{(\rho_\Xi+b)^2 y}\right\}+O(\ln 2DM),$$

где сумма в правой части берется по всем критическим нулям функции $Z(s,\ \Xi)$.

Доказательство. Сумма $S(y,\ \Xi,\ b)$ сходится абсолютно для любого b, $\frac{1}{2}\leqslant b<1$ и к ней можно применить лемму 3.3, полагая

$$F(s)=\sum_{\alpha}\frac{\Xi(\alpha)\Lambda(\alpha)}{N(\alpha)^s}=-\frac{Z'}{Z}(s,\ \Xi),$$

$\sigma_0=1$, $w=-b$. Тогда

$$S(y,\ \Xi,\ b)=i\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{Z'}{Z}(s,\ \Xi)\,e^{(s+b)^2 y}\,ds,\qquad y>0.$$

Вводим обозначение

$$F_1(s)=\frac{Z'}{Z}(s,\ \Xi)\,e^{(s+b)^2 y}$$

и рассматриваем интеграл

$$I=\int_{C_v}F_1(s)\,ds,$$

где C_v есть прямоугольник с вершинами в точках $2\pm iT_v$, $-b\pm iT_v$, T_v — числа леммы 2.6, $v\geqslant 2$. По той же лемме

$$\int_{-b+iT_v}^{2+iT_v}F_1(s)\,ds\ll \ln^2 DMT_v\cdot e^{-y\left(T_v^2+O(1)\right)}\to 0,\qquad T_v\to\infty.$$

То же самое получим и на отрезке $(-b-iT_v,\ 2-iT_v)$. По теореме вычетов при $T_v\to\infty$ имеем

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}F_1(s)\,ds=\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}F_1(s)\,ds+2\pi i\sum_{-b\leqslant\sigma\leqslant 2} Rez\,F_1(s). \tag{3.7}$$

Для интеграла в правой части по лемме 2.4 получаем

$$\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}F_1(s)\,ds\ll\int_0^\infty \ln DM(t+2)\cdot e^{-t^2 y}\,dt\ll\int_0^\infty \ln DM\left(\frac{\xi}{\sqrt{y}}+2\right)\cdot e^{-\xi^2}\frac{d\xi}{\sqrt{y}}\ll$$

$$\ll y^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \ln DM(\xi+2)\cdot e^{-\xi^2}\,d\xi\ll y^{-\frac{1}{2}}\ln 2DM,\qquad (\xi=t\sqrt{y}). \tag{3.8}$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname*{Re}_{s=1} z F_1(s) = -e^{(1+b)^2 y} E(\Xi), \\ &\operatorname*{Re}_{s=\rho_\Xi} z F_1(s) = \nu(\rho_\Xi)\, e^{(\rho_\Xi+b)^2 y}, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

где $\nu(\rho_\Xi)$ означает кратность нуля ρ_Ξ. Подставляя (3.8) и (3.9) в соотношение (3.7), получаем

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} F_1(s)\,ds = O(y^{-\frac{1}{2}} \ln 2DM) - 2\pi i\left\{e^{(1+b)^2 y} E(\Xi) - \sum_{\rho_\Xi} e^{(\rho_\Xi+b)^2 y}\right\},$$

что вместе с равенством (3.6) доказывает лемму.

3. **Лемма 3.5.** *Пусть число* $y \geqslant 1$ *и числа* φ_1, φ_2 *удовлетворяют условию* $0 \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$. *Тогда имеет место оценка*

$$S(y, z, \varphi) = \sum_{\substack{N(\alpha)>z \\ \alpha\in\mathfrak{H} \\ \varphi_1\leqslant\arg\alpha\leqslant\varphi_2}} \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} \ll c_{27} \frac{\varphi}{h} e^{\frac{3}{2}\ln z - \frac{1}{4y}\ln^2 z},$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $z \geqslant e^{3y}$ *и* $\mathfrak{H}$ *означает класс идеальных чисел* $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\psi(x, \mathfrak{H}) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x \\ \alpha\in\mathfrak{H}}} \Lambda(\alpha) = \sum_{n\leqslant x} G(n, \mathfrak{H}), \tag{3.10}$$

$$\psi(x, \mathfrak{H}, \varphi) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x \\ \alpha\in\mathfrak{H} \\ \varphi_1\leqslant\arg\alpha\leqslant\varphi_2}} \Lambda(\alpha) = \sum_{n\leqslant x} G(n, \mathfrak{H}, \varphi), \tag{3.11}$$

где

$$G(n, \mathfrak{H}) = \sum_{\substack{N(\alpha)=n \\ \alpha\in\mathfrak{H}}} \Lambda(\alpha), \qquad G(n, \mathfrak{H}, \varphi) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant n \\ \alpha\in\mathfrak{H} \\ \varphi_1\leqslant\arg\alpha\leqslant\varphi_2}} \Lambda(\alpha).$$

Тогда

$$S(y, z, \varphi) = \sum_{n>z} G(n, \mathfrak{H}, \varphi)\, n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 n}. \tag{3.12}$$

Воспользуемся леммой 1.1, полагая $\lambda_n = n$,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \leqslant z, \\ G(n, \mathfrak{H}, \varphi), & \text{если } z < n \leqslant x, \quad x > z, \end{cases}$$

$$g(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 \xi}.$$

При $z \geqslant 2$ получаем

$$\sum_{n\leqslant x} a_n n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 n} = \sum_{n\leqslant x} a_n x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 x} - \int_1^x \sum_{n\leqslant\xi} a_n \left(\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 \xi}\right)' d\xi.$$

Так как первая сумма в правой части $\to 0$ при $x\to\infty$, то ввиду определения чисел a_n

$$S(y,\ z,\ \varphi)=\sum_{n>z} G(n,\ \mathfrak{H},\ \varphi)\, n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 n}=$$

$$=-\int_z^{\infty}\sum_{z<n\leqslant\xi} G(n,\ \mathfrak{H},\ \varphi)\left(\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi}\right)' d\xi. \tag{3.13}$$

Далее

$$\sum_{z<n\leqslant\xi} G(n,\ \mathfrak{H},\ \varphi)=\psi(\xi,\ \mathfrak{H},\ y)-\psi(z,\ \mathfrak{H},\ y).$$

Таким образом

$$S(y,\ z,\ \varphi)=-\int_z^{\infty}\psi(\xi,\ \mathfrak{H},\ \varphi)\left(\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi}\right)' d\xi-\psi(z,\ \mathfrak{H},\ \varphi)\, z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 z}. \tag{3.14}$$

Из асимптотического закона распределения простых идеальных чисел мнимого квадратичного поля следует существование абсолютной константы c_{28} такой, что

$$\pi(x,\ \mathfrak{H},\ \varphi)=\sum_{\substack{N(\mathfrak{p})\leqslant x\\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{H}\\ \varphi_1\leqslant\arg\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} 1\leqslant c_{28}\frac{g'}{2\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{x}{h\varphi(\mathfrak{m})\ln x}.$$

Тогда

$$\psi(x,\ \mathfrak{H},\ \varphi)=\sum_{\substack{N(\mathfrak{p})\leqslant x\\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{H}\\ \varphi_1\leqslant\arg\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p})+O\Bigg(\sum_{\substack{N(\mathfrak{p})\leqslant x^{\frac{1}{2}}\\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{H}\\ \varphi_1\leqslant\arg\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}}\left[\frac{\ln x}{\ln N(\mathfrak{p})}\right]\ln N(\mathfrak{p})\Bigg)=$$

$$=\pi(x,\ \mathfrak{H},\ \varphi)\ln x+O\left(\frac{1}{h}(\varphi_2-\varphi_1)x^{\frac{1}{2}}\right)=O\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}x\right). \tag{3.15}$$

Подставляя эту оценку в (3.14), получаем

$$S(y,\ z,\ \varphi)\ll\frac{1}{h}(\varphi_2-\varphi_1)\int_z^{\infty}\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi}\left(\frac{\ln\xi}{2y}-\frac{1}{2}\right)d\xi. \tag{3.16}$$

Для интеграла в правой части, произведя замену переменного $\xi=e^{\eta}$ с последующей заменой $\eta=\ln z+u$, получаем

$$\int_z^{\infty}\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi}\left(\frac{\ln\xi}{2y}-\frac{1}{2}\right)d\xi=\int_{\ln z}^{\infty}\left(\frac{\eta}{2y}-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{3}{2}\eta-\frac{\eta^2}{4y}}d\eta=$$

$$=e^{\frac{3}{2}\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z}+\int_{\ln z}^{\infty}e^{\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{4y}\eta^2}d\eta=$$

$$=e^{\frac{3}{2}\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z}+e^{\frac{3}{2}\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z}\int_0^{\infty}e^{\frac{3}{2}u-\frac{u}{4y}(u+2\ln z)}du.$$

Последний интеграл сходится при $\ln z\geqslant 3y$, поэтому окончательно получаем

$$S(y,\ z,\ \varphi)\ll\frac{1}{h}(\varphi_2-\varphi_1)\,e^{\frac{3}{2}\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z},$$

что соответствует неравенству леммы.

4. **Лемма 3.6.** *Пусть* $y \geqslant 1$, $\ln z > 3y$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. *Тогда*

$$S_1(y, z, \varphi) = \sum_{\substack{\alpha = \mathfrak{p}^k,\ k \geqslant 2 \\ \alpha \in \mathfrak{H},\ N(\alpha) \leqslant z \\ \varphi_1 \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 N(\alpha)} <$$

$$< c_{29} \varphi \ln z \cdot \{ e^{\frac{7y}{4}} + e^{\ln z - \frac{1}{4y} \ln^2 z} \}.$$

Доказательство. Обозначим

$$G_1(n, \mathfrak{H}, \varphi) = \sum_{\substack{\alpha = \mathfrak{p}^k,\ k \geqslant 2, \\ N(\alpha) = n,\ \alpha \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha).$$

Тогда

$$S_1(y, z, \varphi) = \sum_{n \leqslant z} G_1(n, \mathfrak{H}, \varphi) n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 n}.$$

Опять воспользовавшись леммой 1.1, получаем

$$S_1(y, z, \varphi) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant z} G_1(n, \mathfrak{H}, \varphi) z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 z} -$$

$$- \int_1^z \sum_{1 \leqslant n \leqslant \xi} G_1(n, \mathfrak{H}, \varphi) (\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 \xi})' d\xi. \tag{3.19}$$

Но

$$\sum_{\substack{N(\alpha) = n,\ \alpha = \mathfrak{p}^k, \\ k \geqslant 2,\ \alpha \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha) = \sum_{\substack{N(\alpha) = p^{kf},\ k \geqslant 2, \\ f = 1, 2,\ \alpha \in \mathfrak{H}, \\ \varphi_1 \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha).$$

Таким образом

$$S_1(y, z, \varphi) = \sum_{\substack{p^{kf} \leqslant z,\ k \geqslant 2 \\ f = 1, 2}} G_1(p^{kf}, \mathfrak{H}, \varphi) p^{\frac{1}{2} kf} e^{-\frac{k^2 f^2}{4y} \ln^2 p}. \tag{3.20}$$

Введем еще функцию

$$\vartheta(x, \varphi) = \sum_{\substack{p^{kf} \leqslant x,\ k \geqslant 2 \\ f = 1, 2}} G_1(p^{kf}, \mathfrak{H}, \varphi). \tag{3.21}$$

Тогда равенство (3.20) можно выразить в следующем виде:

$$S_1(z, y, \varphi) = \vartheta(z^{\frac{1}{kf}}, \varphi) z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 z} -$$

$$- \int_1^{z^{\frac{1}{kf}}} \vartheta(\xi, \varphi) \{ \xi^{\frac{1}{2} kf} e^{-\frac{k^2 f^2}{4y} \ln^2 \xi} \}' d\xi. \tag{3.22}$$

Если $k \geqslant 2$, то и $kf \geqslant 2$, поэтому

$$\vartheta(z^{\frac{1}{kf}}, \varphi) = \sum_{p \leqslant z^{\frac{1}{kf}}} \sum_{\substack{N(\alpha) = p \\ \alpha \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha) = \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant z^{\frac{1}{kf}},\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}) \ll \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} z^{\frac{1}{2}} \ln z. \tag{3.23}$$

Оценим интеграл в правой части равенства (3.22). Обозначая его через J_1 и вводя новую переменную $t=\ln\xi$, получаем

$$J_1=-\int\limits_{2}^{z^{\frac{1}{kf}}}\vartheta(\xi,\varphi)\left(\frac{1}{2}kf-\frac{k^2f^2}{2y}\ln\xi\right)\xi^{\frac{1}{2}kf-1}e^{-\frac{k^2f^2}{4y}\ln^2\xi}d\xi=$$

$$=\int\limits_{\ln 2}^{\frac{1}{kf}\ln z}\vartheta(e^t,\varphi)\left(\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{1}{2}kf\right)e^{\frac{1}{2}kft-\frac{k^2f^2}{4y}t^2}dt.$$

Но

$$\frac{k^2f^2}{2y}-\frac{1}{2}kt\begin{cases}\leqslant 0, & \text{если}\quad \ln z\leqslant t\leqslant\frac{y}{kf},\\ >0, & \text{если}\quad t>\frac{y}{kf}.\end{cases}$$

Отбрасывая отрицательные члены, интеграл только увеличим. Поэтому

$$J_1\leqslant\int\limits_{(kf)^{-1}y}^{(kf)^{-1}\ln z}\vartheta(e^t,\varphi)\left(\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{kf}{2}\right)e^{\frac{1}{2}kft-\frac{k^2f^2}{4y}t^2}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}\ln z\cdot\int\limits_{(kf)^{-1}y}^{(kf)^{-1}\ln z}e^t\left(\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{kf}{2}\right)e^{\frac{1}{2}kft-\frac{k^2f^2}{4y}t^2}dt=$$

$$=c_{30}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}\ln z\cdot\left\{\int\limits_{(kf)^{-1}y}^{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}+\int\limits_{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}^{(kf)^{-1}\ln z}\right\}. \tag{3.24}$$

(Если $\ln z>3y$, то всегда

$$\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y>\frac{1}{kf}\ln z,\qquad y>0.)$$

Обозначая интегралы в правой части неравенства (3.24) соответственно через J_2 и J_3, получаем

$$J_2\leqslant-e^{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}\int\limits_{(kf)^{-1}y}^{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}e^{\frac{1}{2}kft-\frac{k^2f^2}{4y}t^2}d\left(\frac{1}{2}kft-\frac{k^2f^2}{4y}t^2\right)=$$

$$=e^{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}\left\{e^{\frac{1}{4}y}-e^{\frac{1}{4}y-\frac{4y}{k^2f^2}}\right\}\leqslant e^{\frac{1}{2}y+y+\frac{1}{4}y}=e^{\frac{7}{4}y},\qquad (kf\geqslant 2). \tag{3.25}$$

Оценим интеграл J_3. Если

$$t\geqslant\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y,$$

то

$$\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{1}{2}kf\geqslant 2;$$

отсюда и из общего неравенства $r\leqslant 2(r-1)$ при $r\geqslant 2$ следует, что

$$\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{1}{2}kf\leqslant 2\left(\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{1}{2}kf-1\right).$$

Таким образом

$$J_3 \leqslant \int\limits_{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}^{(kf)^{-1}\ln z} 2\left(\frac{k^2f^2}{2y}t-\frac{1}{2}kf-1\right)e^{\left(\frac{1}{2}kf+1\right)t-\frac{k^2f^2}{4y}t^2}dt=$$

$$=-2\int\limits_{\left(\frac{1}{kf}+\frac{4}{k^2f^2}\right)y}^{(kf)^{-1}\ln z} e^{\left(\frac{1}{2}kf+1\right)t-\frac{k^2f^2}{4y}t^2}\,d\left(\left(\frac{1}{2}kf+1\right)t-\frac{k^2f^2}{4y}t^2\right)<$$

$$<2e^{\frac{1}{2}y+\frac{3}{kf}y-\frac{1}{4}y-\frac{2}{kf}y}=2e^{\frac{1}{4}y+\frac{y}{kf}}\leqslant 2e^{\frac{3}{4}y},\qquad (kf\geqslant 2). \tag{3.26}$$

Из оценок (3.25) и (3.26) получаем

$$J_1 \leqslant \frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}\left\{e^{\frac{7}{4}y}+2e^{\frac{3}{4}y}\right\}\ln z \leqslant \frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}e^{\frac{7}{4}y}\ln z. \tag{3.27}$$

Так как

$$\vartheta\left(z^{\frac{1}{kf}},\ \varphi\right)\leqslant\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}z^{\frac{1}{2}}\ln z \quad \text{при} \quad kf\geqslant 2,$$

то для суммы $S_1(y,\ z,\ \varphi)$ имеем оценку

$$S_1(y,\ z,\ \varphi)\leqslant\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}z\ln z\cdot e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 z}+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}\ln z\cdot e^{\frac{7}{4}y}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi_2-\varphi_1}{h}\ln z\cdot\left\{e^{\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z}+e^{\frac{7}{4}y}\right\},$$

что и доказывает лемму.

5. Лемма 3.7. *Если* $P>1$, *то*

$$S=\sum_{\alpha}\chi(\alpha)f(\arg\alpha)\,\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}=$$

$$=\sum_{|m|\leqslant P}a_m\sum_{\alpha}\Xi(\alpha)\,\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}+O\left(P^{-1}y^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}\right),$$

где $f(\arg\alpha)$ — *функция* $f(w)$ *леммы* 1.5.

Доказательство. Из леммы 1.5 получаем

$$f(\arg\alpha)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{gmi\arg\alpha}=\sum_{|m|\leqslant P}a_m e^{gmi\arg\alpha}+O(P^{-1}).$$

Тогда

$$S=\sum_{|m|\leqslant P}a_m\sum_{\alpha}\chi(\alpha)\,\xi^{mg}(\alpha)\,\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}+$$

$$+O\left(P^{-1}\sum_{\alpha}\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}\right). \tag{3.28}$$

Обозначая сумму в остаточном члене через S_1,

$$G(n)=\sum_{N(\alpha)=n}\Lambda(\alpha)$$

и суммируя по частям, получаем

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty} G(n)\,n^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 n}=-\int_1^{\infty}\sum_{1\le n\le\xi} G(n)\,(\xi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi})'\,d\xi\ll$$

$$\ll-\int_1^{\infty}\xi e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln\xi}{2y}\right)\xi^{-\frac{1}{2}}d\xi\ll-\int_1^{\infty}\xi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2\xi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln\xi}{2y}\right)d\xi\ll$$

$$\ll-\int_1^{\infty}e^{\frac{3}{2}\eta-\frac{\eta^2}{4y}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2y}\right)d\eta\ll\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{\eta^2}{4y}-\frac{3}{2}\eta\right)}d\left(\frac{\eta^2}{4y}-\frac{3}{2}\eta\right)+$$

$$+e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{\eta}{2\sqrt{y}}-\frac{3}{2}\sqrt{y}\right)^2}d\eta=O(1)+c_{30}\sqrt{y}\,e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=$$

$$=O(1)+O(y^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}})=O(y^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}),$$

что вместе с соотношением (3.28) доказывает лемму.

1. Доказательство теоремы 1.1.

1. Воспользуемся очевидным тождеством

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{H}\\ \varphi_1\le\arg\alpha\le\varphi_2}}\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}=\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathfrak{H},\\ N(\mathfrak{p})\le z,\\ \varphi_1\le\arg\mathfrak{p}\le\varphi_2}}\ln N(\mathfrak{p})\cdot N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\mathfrak{p})}+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha=\mathfrak{p}^k,\ k\ge2,\\ \alpha\in\mathfrak{H},\ N(\alpha)\le z,\\ \varphi_1\le\arg\alpha\le\varphi_2}}\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}+\sum_{\substack{N(\alpha)>z\\ \alpha\in\mathfrak{H}\\ \varphi_1\le\arg\alpha\le\varphi_2}}\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)}.$$

Последние две суммы в правой части есть суммы $S(y,\ z,\ \varphi)$ и $S_1(y,\ z,\ \varphi)$, рассмотренные в леммах 3.5 и 3.6. Обозначим

$$\Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)=h\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{H}\\ \varphi_1\le\arg\alpha\le\varphi_2}}\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)},$$

$$S(y)=h\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathfrak{H},\ N(\mathfrak{p})\le z\\ \varphi_1\le\arg\mathfrak{p}\le\varphi_2}}\ln N(\mathfrak{p})\cdot N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\mathfrak{p})}.$$

Тогда получаем

$$S(y)=\Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)-h\cdot S(y,\ z,\ \varphi)-hS_1(y,\ z,\ \varphi).$$

Используя оценки лемм 3.5 и 3.6, выводим:

$$S(y)>\Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)-c_{27}(\varphi_2-\varphi_1)\,e^{\frac{3}{2}\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z}-$$

$$-c_{29}(\varphi_2-\varphi_1)\ln z\cdot\{e^{\ln z-\frac{1}{4y}\ln^2 z}+e^{\frac{7}{4}y}\},\qquad(\ln z>3y).$$

Пусть теперь

$$z=e^{4y}.\tag{4.1}$$

Тогда получаем оценку

$$S(y)>\Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)-c_{31}(\varphi_2-\varphi_1)\,ye^{2y}.\tag{4.2}$$

2. Пусть $N[A]+3$, где A — константа теоремы 3.2, $\eta \geqslant \eta_0 > 0$ действительное переменное, зависящее от y (η_0 точнее подберем в конце доказательства). Умножим неравенство (4.2) на $(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1}$ и проинтегрируем N раз по η. Кратный интеграл обозначим следующим образом

$$\int_{\eta_0}^{\eta_0+1} \int_{\eta_{N-1}}^{\eta_{N-1}+1} \ldots \int_{\eta_1}^{\eta_1+1} d\eta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{N-1} = \int_{(\eta_0)} d(\eta).$$

Тогда из неравенства (4.2) получаем

$$\int_{(\eta_0)} S(y)(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta) > \int_{(\eta_0)} \Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta) -$$

$$- c_{32}(\varphi_2 - \varphi_1) \int_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}y} d(\eta).$$

Введем обозначения

$$K_1 = \int_{(\eta_0)} S(y)(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta),$$

$$K_2 = \int_{(\eta_0)} \Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta),$$

$$K_3 = c_{32}(\varphi_2 - \varphi_1) \int_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} d(\eta).$$

С этими обозначениями последнее неравенство принимает вид

$$K_1 > K_2 - K_3. \tag{4.3}$$

3. По определению функции $\Phi(y,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ имеем

$$K_2 = \int_{(\eta_0)} h \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} (2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta) =$$

$$= \int_{(\eta_0)} \sum_{\alpha} \overline{\chi}(\mathfrak{H}) f(\arg\alpha)\, \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} (2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta) + R,$$

где $f(\arg\alpha)$ — функция $f(w)$ леммы 1.5, а

$$R = \int_{(\eta_0)} \{\Phi(y,\ \varphi_1 - \Delta,\ \varphi_1) + \Phi(y,\ \varphi_2,\ \varphi_2 + \Delta)\}(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta).$$

Принимая во внимание определение характера $\chi(\mathfrak{H})$ и применяя леммы 3.7 и 1.5, получаем

$$K_2 = \int_{(\eta_0)} \sum_{|m| \leqslant p} a_m \sum_{\alpha} \Xi(\alpha)\, \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} (2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta) +$$

$$+ O\left(P^{-1} \int_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}} (\sqrt{y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} d(\eta)\right) + R. \tag{4.4}$$

Так как в равенстве (4.4) двойная сумма сходится абсолютно и равномерно для всякого $y>0$, а интеграл берется в конечных пределах, то, меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем соотношение

$$K_2=\sum_{|m|\leq P} a_m \int_{(\eta_0)} \sum_{\alpha} \Xi(\alpha)\,\Lambda(\alpha)\,N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} \left(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1} d(\eta)+$$
$$+O\left(P^{-1}\int_{(\eta_0)} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)\right)+R.$$

Сумма под интегралом без множителя $(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1}$ совпадает с суммой $S(y,\ \Xi,\ b)$, рассмотренной в лемме 3.4 с $b=\frac{1}{2}$. Используя для этой суммы выражение из леммы 3.4 и обозначая для краткости

$$R_1=O\left(P^{-1}\int_{(\eta_0)} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)\right),$$

выводим соотношение

$$K_2=\sum_{|m|\leq P} a_m \int_{(\eta_0)} \left\{2\sqrt{\pi y}\left(e^{\frac{9}{4}y} E(\Xi)-\sum_{\rho_\Xi} e^{\left(\rho_\Xi+\frac{1}{2}\right)^2 y}\right)+\right.$$
$$\left.+O(\ln 2DM)\right\}\left(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1} d(\eta)+R_1+R=$$
$$=\sum_{|m|\leq P} a_m \int_{(\eta_0)} \left\{E(\Xi)-\sum_{\rho_\Xi} e^{\left(\rho_\Xi+\frac{1}{2}\right)^2 y-\frac{9}{4}y}+O\left(y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}y}\ln 2DM\right)\right\} d(\eta)+$$
$$+R+R_1=a_0\int_{(\eta_0)} d(\eta)-a_0 E\chi'(\mathfrak{H})\int_{(\eta_0)} e^{\left(\beta'+\frac{1}{2}\right)y-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)-$$
$$-\sum_{|m|\leq P} a_m \sum_{\chi} \overline{\chi}(\mathfrak{H}) \sum_{\rho_{m,\chi}(\neq\beta')} \int_{(\eta_0)} e^{\left(\rho_{m,\chi}+\frac{1}{2}\right)^2 y-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)+$$
$$+O\left(\sum_{|m|\leq P} |a_m| \int_{(\eta_0)} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}y}\ln 2DM\cdot d(\eta)\right)+R+R_1. \qquad (4.5)$$

В этом равенстве β' означает „исключительный" нуль, $E=1$ или 0 в зависимости от того, существует „исключительный" нуль или нет, $\chi'(\mathfrak{H})$ — характер, соответствующий „исключительному" нулю и $\rho_{m,\chi}$ — нуль функции $Z(s,\ \Xi)$ с фиксированными m и χ.

4. Далее имеем:

$$\int_{(\eta_0)} d(\eta)=\int_{\eta_0}^{\eta_0+1}\int_{\eta_{N-1}}^{\eta_{N-1}+1}\cdots\int_{\eta_1}^{\eta_1+1} d\eta\, d\eta_1\ldots d\eta_{N-1}=1. \qquad (4.6)$$

Пусть далее $\rho_{m,\chi}=\beta_{m,\chi}+i\gamma_{m,\chi}=\beta+i\gamma$, $\beta=1-\delta_{m,\chi}=1-\delta$, $\beta'=1-\delta'$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\left(\rho_{m,\chi}+\frac{1}{2}\right)^2 y-\frac{9}{4}y=\left(1-\delta+i\gamma+\frac{1}{2}\right)^2 y-\frac{9}{4}y=\\&\quad=-\{(3-\delta)\delta+\gamma^2-i\gamma(3-2\delta)\}\,y,\\&\left(\beta'+\frac{1}{2}\right)^2 y=-\delta'(3-\delta')\,y.\end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Положим

$$y=\eta \ln DP, \qquad DP>1 \tag{4.8}$$

и оценим интеграл

$$J=\int\limits_{(\eta_0)} e^{\left(\rho_{m,\chi}+\frac{1}{2}\right)^2 y-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)=\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\{(3-\delta)\delta+\gamma^2-i\gamma(3-2\delta)\}y}\, d(\eta).$$

Обозначая для краткости

$$f(\delta,\ \gamma)=(3-\delta)\,\delta+\gamma^2-i\gamma\,(3-2\delta),$$

$$B(f)=f(\delta,\ \gamma)\ln DP,$$

получаем

$$J=\int\limits_{(\eta_0)} e^{-B(f)\eta}\, d(\eta)=\left(\frac{1}{B(f)}\right)^N e^{-B(f)\eta_0}(1-e^{-B(f)})^N. \tag{4.9}$$

Так как при $\delta\leqslant 1$, $(3-\delta)\,\delta+\gamma^2\geqslant 0$, то

$$|1-e^{-B(f)}|\leqslant 1+e^{-\{(3-\delta)\delta+\gamma^2\}\ln DP}\leqslant 2. \tag{4.10}$$

Замечая, что $(3-\delta)\,\delta\geqslant 2\delta\geqslant 0$, $(\delta\leqslant 1)$, имеем:

$$|e^{-B(f)\eta_0}|=e^{-\{(3-\delta)\delta+\gamma^2\}\eta_0\ln DP}<e^{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0\ln DP}. \tag{4.11}$$

Наконец

$$|B(f)|=\ln DP\cdot|(3-\delta)\,\delta+\gamma^2-i\gamma\,(3-2\delta)|\geqslant \ln DP\cdot|2\delta+\gamma^2+i\gamma|. \tag{4.12}$$

Из оценок (4.10), (4.11), (4.12) и равенства (4.9) следует

$$|J|<\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N e^{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0\ln DP}|2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N}. \tag{4.13}$$

Подставляя (4.6), (4.7), (4.8) и (4.13) в равенство (4.5), получаем

$$K_2>a_0-a_0E\chi'(\mathfrak{H})\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\delta'(3-\delta')\eta\ln DP}\, d(\eta)-$$

$$-\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N\sum_{|m|\leqslant P}|a_m|\sum_{\chi}\sum_{\rho_{m,\chi}(\neq\beta')} e^{-(2\delta_{m,\chi}+\gamma_{m,\chi}^2)\eta_0\ln DP}|2\delta_{m,\chi}+\gamma_{m,\chi}^2+i\gamma_{m,\chi}|^{-N}+$$

$$+O\left(\sum_{|m|\leqslant P}|a_m|\ln DM\cdot\int\limits_{(\eta_0)} y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)\right)+R_1+R. \tag{4.14}$$

Введем обозначения

$$K_2^{(1)}=E\chi'(\mathfrak{H})\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\delta'(3-\delta')\ln DP}\, d(\eta),$$

$$K_2^{(2)}=\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N\sum_{|m|\leqslant P}|a_m|\sum_{\chi}\sum_{\rho_{m,\chi}(\neq\beta')} e^{-(2\delta_{m,\chi}+\gamma_{m,\chi}^2)\eta_0\ln DP}|2\delta_{m,\chi}+\gamma_{m,\chi}^2+i\gamma_{m,\chi}|^{-N},$$

$$K_2^{(3)}=c_{33}\sum_{|m|\leqslant P}|a_m|\ln DM\cdot\int\limits_{(\eta_0)} y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{9}{4}y}\, d(\eta).$$

Тогда соотношение (4.14) представится в виде

$$K_2>a_0-a_0K_2^{(1)}-K_2^{(2)}-K_2^{(3)}+R_1+R. \tag{4.15}$$

Оценим отдельно все величины, входящие в правую часть неравенства (4.15).

5. Интеграл $K_2^{(1)}$ оценивается следующим образом:

$$|K_2^{(1)}|\leqslant\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\delta'(3-\delta')\eta\ln DP}\, d(\eta)\leqslant\int\limits_{(\eta_0)} e^{-2\delta'\eta\ln DP}\, d(\eta).$$

Так как $\eta \geqslant \eta_0$, то

$$|K_2^{(1)}|_{\Phi} \leqslant e^{-2\delta' \eta_0 \ln DP}. \tag{4.16}$$

Далее имеем:

$$\int\limits_{(\eta_0)} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}y} d(\eta) \leqslant (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}\eta_0 \ln DP} \int\limits_{(\eta_0)} d(\eta) =$$

$$= (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}\eta_0 \ln DP}.$$

Тогда

$$K_2^{(3)} \leqslant c_{33} (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}\eta_0 \ln DP} \sum_{|m| \leqslant P} |a_m| \ln DM. \tag{4.17}$$

Для последней суммы по лемме 1.5 получаем:

$$\sum_{|m| \leqslant P} |a_m| \ln DM = a_0 \ln 2D + 2 \sum_{1 \leqslant m \leqslant P} \frac{1}{m} \ln DM \leqslant$$

$$\leqslant a_0 \ln 2D + c_{34} \ln D \cdot \sum_{1 \leqslant m \leqslant P} \frac{\ln m}{m} \leqslant a_0 \ln 2D + c_{34} \ln D \cdot \ln^2 P \leqslant c_{35} \ln D \cdot \ln^2 P.$$

В таком случае из неравенства (4.17) следует

$$K_2^{(3)} \leqslant c_{36} (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}\eta_0 \ln DP} \ln D \cdot \ln^2 P =$$

$$= c_{36} \eta_0^{-\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} D \cdot \ln^2 P \cdot (DP)^{-\frac{9}{4}\eta_0} < c_{36} P^{-1} (DP)^{2-\frac{9}{4}\eta_0}.$$

Если $\eta_0 > 2$, то $2 - \frac{9}{4}\eta_0 < -\frac{1}{2}\eta_0$. Кроме того, в теореме 2.3 имели неравенство $\frac{1}{2} \ln DP \geqslant \lambda_0$. Поэтому

$$K_2^{(3)} < c_{36} P^{-1} (DP)^{-\frac{1}{2}\eta_0} = c_{36} \frac{1}{P} e^{-\frac{1}{2}\eta_0 \ln DP} \leqslant c_{36} \frac{1}{P} e^{-\lambda_0 \eta_0}. \tag{4.18}$$

6. Оценим R_1 и R. Имеем:

$$R_1 = O\left(P^{-1} \int\limits_{(\eta_0)} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y} - \frac{9}{4}y} d(\eta)\right) = O\left(P^{-1} \int\limits_{(\eta_0)} e^{-\frac{3}{4}\eta_0 \ln DP} d(\eta)\right) =$$

$$= O\left(P^{-1} e^{-\frac{3}{4}\eta_0 \ln DP}\right) = O\left(\frac{1}{P} e^{-\frac{1}{2}\eta_0 \ln DP}\right) = O\left(\frac{1}{P} e^{-\lambda_0 \eta_0}\right) \tag{4.19}$$

$\left(\text{ввиду } \frac{1}{2} \ln DP \geqslant \lambda_0\right)$.

Так как по определению

$$R = \int\limits_{(\eta_0)} \Bigg\{ h \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 - \Delta \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_1}} \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 N(\alpha)} (2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} +$$

$$+ h \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \alpha \leqslant \varphi_2 + \Delta}} \Lambda(\alpha) N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y} \ln^2 N(\alpha)} (2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y})^{-1} \Bigg\} d(\eta).$$

то, применяя те же самые методы, что и в доказательствах лемм 3.5, 3.6 и 3.7, для обеих сумм получим оценки

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \varphi_1-\Delta\leqslant\arg\alpha\leqslant\varphi_1}} \chi(\alpha)\Lambda(\alpha)N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} = O(\Delta y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}),$$

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \varphi_2\leqslant\arg\alpha\leqslant\varphi_2+\Delta}} \chi(\alpha)\Lambda(\alpha)N(\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\alpha)} = O(\Delta y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}).$$

Тогда для R имеем:

$$R=O\Big(\Delta\int\limits_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}\sqrt{y}}\, y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)\Big)=O\Big(\Delta\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{y}-\frac{9}{4}y}\, d(\eta)\Big)=$$

$$=O\Big(\Delta\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\frac{3}{4}y}\, d(\eta)\Big)=O(\Delta e^{-\frac{3}{4}\eta_0\ln DP})=O(\Delta e^{-\lambda_0\eta_0}),$$

т. е.

$$|R|\leqslant c_{37}e^{-\lambda_0\eta_0}. \tag{4.20}$$

7. Займемся теперь суммой $K_2^{(2)}$. Для ее оценки разобьем полосу $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, в которой лежат все критические нули функций $Z(s, \Xi)$, на четыре области $G_n^{(1)}$, $G_n^{(2)}$, $G_n^{(3)}$, $G_n^{(4)}$, при этом они могут между собой перекрываться:

$(G_n^{(1)})$: $\quad 0\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad n\leqslant|t|\leqslant n+1,\quad n=1, 2, 3, \ldots;$

$(G_n^{(2)})$: $\quad 1-\dfrac{\lambda_0+n+1}{\ln DP}\leqslant\sigma\leqslant 1-\dfrac{\lambda_0+n}{\ln DP},\quad |t|\leqslant\dfrac{e^{\lambda_0+n+1}}{\ln DP}.$

$n=0, 1, 2, \ldots, n_0=[\ln\ln DP];$

$(G_n^{(3)})$: $\quad 1-\dfrac{\lambda_0+n+1}{\ln DP}\leqslant\sigma\leqslant 1-\dfrac{\lambda_0}{\ln DP},\quad \dfrac{e^{\lambda_0+n}}{\ln DP}\leqslant|t|\leqslant\dfrac{e^{\lambda_0+n+1}}{\ln DP},$

$n=0, 1, 2, \ldots, n_0;$

$(G_n^{(4)})$: $\quad 1-\dfrac{\ln\ln DP+n+1}{\ln DP}\leqslant\sigma\leqslant 1-\dfrac{\ln\ln DP+n}{\ln DP},\quad |t|\leqslant 1,$

$n=0, 1, 2, \ldots, n_1=[\ln DP].$

Если число нулей всех функций $Z(s, \Xi)$, $|m|\leqslant P$, расположенных в наших областях, обозначим соответственно $N_n^{(1)}$, $N_n^{(2)}$, $N_n^{(3)}$, $N_n^{(4)}$, то по лемме 2.3 и теореме 2.2 получим:

$$\left.\begin{aligned} &N_n^{(1)}<c_{38}\ln DMn, && n=1, 2, 3, \ldots;\\ &N_n^{(2)}<e^{A(\lambda_0+n+1)}, && 0\leqslant n\leqslant n_0;\\ &N_n^{(3)}<e^{A(\lambda_0+n+1)}, && 0\leqslant n\leqslant n_0;\\ &N_n^{(4)}<e^{A(\ln\ln DP+n+1)}, && 0\leqslant n\leqslant n_1.\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Далее, если для краткости введем обозначение

$$F(\delta_{m,\chi}, \gamma_{m,\chi})=F(\delta, \gamma)=e^{-(2\delta_{m,\chi}+\gamma_{m,\chi}^2)\eta_0\ln DP}\,|2\delta_{m,\chi}+\gamma_{m,\chi}^2+i\gamma_{m,\chi}|^{-N},$$

то в областях $G_n^{(j)}$, $j=1, 2, 3, 4$ будут выполняться соответственно неравенства

$$\left.\begin{aligned} &F(\delta, \gamma)\leqslant e^{-n^2\eta_0\ln DP}\,n^{-2N} && \text{в}\quad G_n^{(1)},\\ &F(\delta, \gamma)\leqslant e^{-2(\lambda_0+n)\eta_0}\Big(\frac{2(\lambda_0+n)}{\ln DP}\Big)^{-N} && \text{в}\quad G_n^{(2)},\\ &F(\delta, \gamma)\leqslant e^{-2\lambda_0\eta_0}\Big(\frac{e^{\lambda_0+n}}{\ln DP}\Big)^{-N} && \text{в}\quad G_n^{(3)},\\ &F(\delta, \gamma)\leqslant e^{-2(\ln\ln DP+n)\eta_0}\Big(2\frac{\ln\ln DP+n}{\ln DP}\Big)^{-N} && \text{в}\quad G_n^{(4)}.\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Ввиду леммы 1.5 получаем

$$K_2^{(2)} \leqslant (\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{|m|\leqslant P} \sum_{\chi} \sum_{\rho_{m,\chi}(\neq\beta')} F(\delta_{m,\chi}, \gamma_{m,\chi}) =$$

$$=(\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{\rho(\neq\beta')} e^{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0 \ln DP}|2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N},$$

где суммируется уже по всем нулям всех функций $Z(s, \Xi) \bmod \mathfrak{m}$ с $|m|\leqslant P$. Последняя сумма разбивается на четыре суммы соответственно по нулям в областях $G_n^{(j)}$, $j=1, 2, 3, 4$:

$$K_2^{(2)} \leqslant (\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \left\{\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4\right\}. \tag{4.23}$$

Используя оценки (4.21) и (4.22), находим:

$$\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum\nolimits_1 = \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho\in G_n^{(1)}} e^{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0 \ln DP}|2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N} <$$

$$< c_{38}\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\eta_0 \ln DP} n^{-2N}\ln DPn \leqslant$$

$$\leqslant c_{38}\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N e^{-\eta_0 \ln DP}\ln DP\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{2N}} \leqslant$$

$$\leqslant c_{39}\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N e^{-\eta_0 \ln DP}\ln DP < c_{40}\, e^{-\frac{1}{2}\eta_0 \ln DP} \leqslant c_{40}\, e^{-\lambda_0\eta_0} \qquad (N>3). \tag{4.24}$$

Далее

$$\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum\nolimits_2 = \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{\rho\in G_n^{(2)}} e^{-(2\delta+\gamma^2)\ln DP\cdot\eta_0}|2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N} <$$

$$< \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=1}^{n_0} e^{A(\lambda_0+n+1)} e^{-2(\lambda_0+n)\eta_0}\left(\frac{2(\lambda_0+n)}{\ln DP}\right)^{-N} =$$

$$= e^{-2\lambda_0\eta_0+A(\lambda_0+1)} \sum_{n=0}^{n_0} e^{-(2\eta_0-A)n}(\lambda_0+n)^{-N} \leqslant c_{41}\, e^{-2\lambda_0\eta_0+A(\lambda_0+1)} \leqslant c_{42}\, e^{-2\lambda_0\eta_0+A\lambda_0} =$$

$$= c_{42}\, e^{-\lambda_0\eta_0-\lambda_0(\eta_0-A)} \leqslant c_{42}\, e^{-\lambda_0\eta_0}, \tag{4.25}$$

так как

$$\sum_{n=0}^{n_0}(\lambda_0+n)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_0^{-N}+O(1)=O(1), \qquad \eta_0-A\geqslant 0.$$

Для третьей суммы имеем:

$$\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum\nolimits_3 = \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{\rho\in G_n^{(3)}} e^{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0 \ln DP}|2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N} <$$

$$< \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=1}^{n_0} e^{A(\lambda_0+n+1)} e^{-2\lambda_0\eta_0}\left(\frac{e^{\lambda_0+n}}{\ln DP}\right)^{-N} =$$

$$= 2^N e^{-2\lambda_0\eta_0+A(\lambda_0+1)-\lambda_0 N} \sum_{n=0}^{n_0} e^{-(N-A)n} \leqslant c_{43}\, e^{-2\lambda_0\eta_0+A\lambda_0+A-\lambda_0 N} \leqslant c_{43}\, e^{-\lambda_0\eta_0} \tag{4.26}$$

ввиду $N-A>3$.

Наконец

$$\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum\nolimits_4 = \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=0}^{n_1} \sum_{\rho\in G_n^{(4)}} e^{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0 \ln DP} |2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N} <$$

$$< \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum_{n=0}^{n_1} e^{A(\ln\ln DP+n+1)} e^{-2(\ln\ln DP+n)\eta_0} \left(2\,\frac{\ln\ln DP+n}{\ln DP}\right)^{-N} =$$

$$= e^{-2\eta_0 \ln\ln DP + A(\ln\ln DP+1)} \sum_{n=0}^{n_1} e^{-(2\eta_0-A)n} (\ln\ln DP+n)^{-N} \leqslant$$

$$\leqslant c_{44}\, e^{-(2\eta_0-A)\ln\ln DP} \leqslant c_{44}\, e^{-(2\eta_0-A)\lambda_0} = c_{44}\, e^{-\lambda_0\eta_0-(\eta_0-A)\lambda_0} < c_{44}\, e^{-\lambda_0\eta_0},$$

если только $\eta_0 > A$ и $\lambda_0 \leqslant \ln\ln DP$. Если же $\lambda_0 > \ln\ln DP$, то для $n \leqslant \lambda_0 - \ln\ln DP - 1$ в области $G_n^{(4)}$ по теореме 3.3 нулей не существует. Таким образом для $\lambda_0 > \ln\ln DP$ имеем

$$\left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N \sum\nolimits_4 < \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^{-N} \sum_{\substack{n>\lambda_0-\ln\ln DP-1\\ n\geqslant 0}} e^{-2(\ln\ln DP+n)\eta_0+A(\ln\ln DP+n+1)} \times$$

$$\times \left(2\,\frac{\ln\ln DP+n}{\ln DP}\right)^N = \sum_{\substack{n>\lambda_0-\ln\ln DP-1\\ n\geqslant 0}} e^{-(2\eta_0-A)(\ln\ln DP+n)+A} (\ln\ln DP+n)^{-N} < e^{-\lambda_0\eta_0},$$

т. е. опять получаем оценку типа (4.27).

Подставляя оценки (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) в (4.23) для $K_2^{(2)}$, выводим окончательную оценку

$$K_2^{(2)} < (\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\, c_{45}\, e^{-\lambda_0\eta_0}. \tag{4.28}$$

Собирая теперь оценки (4.16), (4.28), (4.18), (4.19), (4.20) и подставляя в (4.15), получаем:

$$K_2 > a_0 - a_0 e^{-2\delta'\eta_0 \ln DP} - (\varphi_2-\varphi_1+\Delta)\, c_{45} e^{-\lambda_0\eta_0} - c_{36}\frac{1}{P} e^{-\lambda_0\eta_0} -$$

$$- c_{46}\frac{1}{P} e^{-\lambda_0\eta_0} - c_{37}\Delta e^{-\lambda_0\eta_0} = a_0 - a_0 e^{-2\delta'\eta_0\ln DP} - (\varphi_2-\varphi_1+\Delta) c_{45} e^{-\lambda_0\eta_0} -$$

$$- c_{47}\frac{1}{P} e^{-\lambda_0\eta_0} - c_{37}\Delta e^{-\lambda_0\eta_0}, \qquad (c_{47} = c_{36}+c_{46}). \tag{4.29}$$

8. Оценим интеграл K_3. Из неравенства (4.3) ввиду $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_1+1, \ \ldots\ \eta_0 \leqslant \eta_{N-1} \leqslant \eta_0+1$, имеем $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0+N$. Тогда

$$K_3 = c_{32}(\varphi_2-\varphi_1) \int_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}\, d(\eta) =$$

$$= c_{32}(\varphi_2-\varphi_1) \int_{(\eta_0)} (\eta\ln DP)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\eta\ln DP}\, d(\eta) \leqslant$$

$$\leqslant c_{32}(\varphi_2-\varphi_1) \ln^{\frac{1}{2}} DP\cdot(\eta_0+N)^{\frac{1}{2}} \int_{(\eta_0)} e^{-\frac{1}{2}\eta\ln DP}\, d(\eta) =$$

$$= c_{32}(\varphi_2-\varphi_1)\ln^{\frac{1}{2}} DP\cdot(\eta_0+N)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\ln DP}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\eta_0\ln DP} (1-e^{-\frac{1}{2}\ln DP})^N \leqslant$$

$$\leqslant c_{48}(\varphi_2-\varphi_1)\, e^{-\frac{1}{2}\eta_0\ln DP} \leqslant c_{48}(\varphi_2-\varphi_1)\, e^{-\lambda_0\eta_0} \tag{4.30}$$

для достаточно большого DP.

Оценки (4.29) и (4.30) вместе с неравенством (4.3) дают следующую оценку

$$K_1 > a_0 - a_0 e^{-2\delta' \eta_0 \ln DP} - (\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) c_{45} e^{-\lambda_0 \eta_0} -$$

$$- c_{47} \frac{1}{P} e^{-\lambda_0 \eta_0} - c_{37} \Delta e^{-\lambda_0 \eta_0} - c_{48} (\varphi_2 - \varphi_1) e^{-\lambda_0 \eta_0}. \tag{4.31}$$

Пусть $P = \Delta^{-1}$, $\Delta = \frac{1}{a}(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $a > 1$ любая константа. Ввиду леммы 1.5 и подбора числа Δ имеем

$$a_0 = \frac{g}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) = \frac{g(a+1)}{2\pi a}(\varphi_2 - \varphi_1) = c_{49}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Тогда

$$K_1 > c_{50}(\varphi_2 - \varphi_1)\left\{1 - e^{-2\delta' \eta_0 \ln DP} - c_{51} e^{-\lambda_0 \eta_0}\right\}. \tag{4.32}$$

Далее, если $\eta_0 \geqslant A_1^{-1}$, где A_1 — константа теоремы 2.3, то

$$e^{-2\delta' \eta_0 \ln DP} \leqslant e^{-2\delta' \frac{\ln DP}{A_1}} \leqslant e^{-2\delta_0 \frac{\ln DP}{A_1}}$$

($\delta' \geqslant \delta_0$ по теореме 2.3). Положим теперь

$$\eta_0 = \max\left\{A,\ 3,\ \frac{1}{A_1},\ \frac{1}{A_1}\ln 4c_{51}\right\}.$$

Тогда

$$c_{51} e^{-\lambda_0 \eta_0} = c_{51} e^{-A_1 \ln \frac{eA_1}{\delta_0 \ln DP}} =$$

$$= c_{51} e^{-A_1 \eta_0 - A_1 \eta_0 \ln \frac{A_1}{\delta_0 \ln DP}} = c_{51} e^{-A_1 \eta_0}\left(\frac{\delta_0 \ln DP}{A_1}\right)^{A_1 \eta_0}$$

по определению числа λ_0 в теореме 2.3. Из той же самой теоремы следует $\delta_0 \ln DP \leqslant A_1$, а из определения числа η_0 получаем $A_1 \eta_0 \geqslant 1$. Таким образом для достаточно большого DP имеем

$$c_{51} e^{-\lambda_0 \eta_0} \leqslant c_{51} e^{-\ln 4c_{51}} \frac{\delta_0 \ln DP}{A_1} = \frac{\delta_0 \ln DP}{4A_1}$$

и для K_1 получаем неравенство

$$K_1 > c_{50}(\varphi_2 - \varphi_1)\left\{1 - e^{-\delta_0 \frac{\ln DP}{A_1}} - \frac{\delta_0 \ln DP}{4A_1}\right\}.$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$1 - e^{-\xi} - \frac{1}{4}\xi \geqslant \frac{1}{4}\xi, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Полагая $\xi = \delta_0 \frac{\ln DP}{A_1}$, имеем

$$K_1 > c_{50}(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\delta_0 \ln DP}{4A_1}. \tag{4.33}$$

С другой стороны

$$K_1 = \int_{(\eta_0)} h \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant z \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 N(\mathfrak{p})} \left(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1} d(\eta) <$$

$$< 2\sqrt{\pi}\, h \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant z \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}} \int_{(\eta_0)} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}y} d(\eta).$$

Для интеграла в правой части получаем:

$$\int\limits_{(\eta_0)} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}y} d(\eta) \leqslant (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4}\eta_0 \ln DP} \int\limits_{(\eta_0)} d(\eta) =$$

$$= (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} (DP)^{-\frac{9}{4}\eta_0}.$$

Принимая в расчет оценку $h \ll D$, выводим

$$K_1 < 2\sqrt{\pi} (\eta_0 \ln DP)^{-\frac{1}{2}} (DP)^{1-\frac{9}{4}\eta_0} \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant z \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}}.$$

Сопоставляя последнее неравенство с неравенством (4.33) и принимая во внимание оценку $\delta_0 > c_{52} D^{-4}$, окончательно получаем

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant z \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{H} \\ \varphi_1 \leqslant \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}} > c_{53} (\varphi_2 - \varphi_1) (DP)^{\frac{9}{4}\eta_0 - 5},$$

где $\frac{9}{4}\eta_0 - 5 > 0$, если $\eta \geqslant 3$.

Максимальное значение z найдем из равенства (4.1) и неравенства $y = \eta \ln DP \leqslant (\eta_0 + N) \ln DP$:

$$z = e^{4y} \leqslant e^{4(\eta_0 + N)\ln DP}.$$

Из определения чисел P и Δ следует, что

$$z < e^{4(\eta_0+N)\ln\left(\frac{aD}{\varphi}\right)} < e^{4(\eta_0+N)\ln a \cdot \ln\left(\frac{D}{\varphi}\right)} = \left(\frac{D}{\varphi}\right)^{4(\eta_0+N)\ln a}, \qquad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

что и доказывает теорему с константой $B = 4(\eta_0 + N)\ln a$, так как из неравенства

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathfrak{H} \\ N(\mathfrak{p}) < \left(\frac{D}{\varphi}\right)^B \\ \varphi_1 \leqslant \arg \mathfrak{p} \leqslant \varphi_2}} \ln N(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}} > c_{53} (\varphi_2 - \varphi_1) (DP)^{\frac{9}{4}\eta_0 - 5} > 0$$

следует, что

$$\pi\left(\left(\frac{D}{\varphi}\right)^B, \ \mathfrak{H}, \ \varphi_1, \ \varphi_2\right) > 1,$$

где $\pi(x, \mathfrak{H}, \varphi_1, \varphi_2)$ означает число простых идеальных чисел $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}$ с $N(\mathfrak{p}) \leqslant x$ в секторе с раствором величины $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ и вершиной в начале координат.

9. Из доказанной теоремы можно сделать некоторые выводы относительно квадратичных форм. Пусть $F(x, y)$ положительно определенная примитивная квадратичная форма дискриминанта $-d$. Для каждой такой формы в мнимом квадратичном поле K с дискриминантом d существуют два целые идеальные взаимно простые числа α_1, α_2, принадлежащие некоторому классу $\mathfrak{H} \bmod \mathfrak{m}$, такие, что линейная форма $L(x, y) = \alpha_1 x + \alpha_2 y$, где x, y — целые рациональные взаимно простые числа, так же принадлежат классу $\mathfrak{H}$ и

$$L(x, y) \cdot \overline{L(x, y)} = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)(\bar{\alpha}_1 x + \bar{\alpha}_2 y) = ax^2 + bxy + cy^2 = F(x, y),$$

где

$$a = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 = N(\alpha_1), \qquad b = \alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2, \qquad c = \alpha_2 \bar{\alpha}_2 = N(\alpha_2)$$

целые рациональные числа. Если обозначим

$$\mu = L(x, y) \in \mathfrak{H},$$

то получим

$$n = N(\mu) = F(x, y),$$

т. е. число n представимо квадратичной формой $F(x, y)$. (Подробнее об этом см. [7].)

Неравенства $\varphi_1 \leqslant \arg\alpha \leqslant \varphi_2$ в общем случае означают, что число α находится в неэвклидовом угле $w(\mu) - w(\nu)$, где $w(\omega)$ — функция, входящая в показатель характера Гекке первого рода:

$$\lambda(\omega) = \left(\frac{\omega}{|\omega|}\right)^g = e^{2\pi i w(\omega)}.$$

В этих условиях из нашей теоремы следует, что для каждой квадратичной формы $F(x, y)$ дискриминанта $-d$ существует пара целых рациональных взаимно простых чисел x, y таких, что форма $F(x, y)$ представляет простое число p, при этом точка с координатами (x, y) принадлежит сектору, радиус которого не превосходит величины

$$\left(\frac{|d|}{\varphi}\right)^B,$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — величина угла.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
5.IV.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fogels. On the existence of primes in short arithmetical progressions. Acta Arith., VI, 1961, 295–311.
2. E. Fogels. On the zeros of Heckes L-funktions I. Acta Arith., VII, 1962, 87–106.
3. E. Fogels. On the zeros of Heckes L-funktions II. Acta Arith., VII, 1962, 131–147.
4. E. Fogels. On the zeros of Heckes L-funktions III. Acta Arith., VII, 1962, 225–240.
5. E. Fogels. On the distribution of prime ideals. Acta Arith., VII, 1962, 255–270.
6. E. Hecke. Über eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen I. Math. Z., 1, 1918, 357–376.
7. E. Hecke. Über eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, II. Math. Z., 6, 1920, 11–51.
8. И. П. Кубилюс. О некоторых задачах геометрии простых чисел. Математ. сб., 31 (73), № 3, 1952, 507–542.
9. J. Kubilius. Daugiamatės analizės skaičių teorijos klausimais. Vilniaus Universiteto Darbai, IV tomas, 1955, 5–43.
10. E. Landau. Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Z., 2, 1918, 52–154.
11. Ю. В. Линник. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. Математ. сб. 1, 15 (57), 1944, 139–178; 11, 15 (57), 1944, 347–368.
12. K. Prachar. Primzahlverteilung, 1957.
13. К. А. Родосский. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. Матем. сб., 34 (76), № 2, 1954, 331–356.
14. G. J. Rieger. Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper II. J. reine angew. Math., 201, 1959, 157–171.
15. Е. Титчмарш. Теория функций, 1951.
16. Е. К. Титчмарш. Теория дзета-функции Римана, 1953.

APIE MENAMO KVADRATINIO SKAIČIŲ KŪNO PIRMINIŲ SKAIČIŲ PASISKIRSTYMĄ SEKTORIUOSE

J. VAITKEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamas menamo kvadratinio skaičių kūno pirminių idealinių skaičių pasiskirstymas sektoriuose. Įrodoma

Teorema. *Tegul K yra menamas kvadratinis kūnas, d—jo diskriminantas, $\mathfrak{m}$—bet kuris sveikas šio kūno idealas ir $\mathfrak{H}$—idealinių skaičių klasė* mod $\mathfrak{m}$. *Pažymėkim*

$$D=|d|N(\mathfrak{m})>1,$$

kur $N(\mathfrak{m})$ reiškia idealo $\mathfrak{m}$ normą. Tegul toliau $0<\Delta<\frac{\pi}{4}$, φ_1, φ_2—bet kurie realūs skaičiai, tenkinantieji sąlygą

$$0<\varphi_2-\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}-2\Delta.$$

Tada egzistuoja konstanta $B>0$, priklausanti tik nuo kūno K, tokia, kad sektoriuje, kurio viršūnė yra koordinatų pradžios taške ir kampo dydis lygus $\varphi_2-\varphi_1=\varphi$, rasim bent vieną pirminį idealinį skaičių $\mathfrak{p}\in\mathfrak{H}$, kuriam

$$N(\mathfrak{p})<\left(\frac{D}{\varphi}\right)^B.$$

Teorema įrodoma J. V. Linniko metodu, suprastintu pagal K. A. Rodosskį.

ÜBER DIE VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN DES IMAGINÄR-QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS IN DEN SEKTOREN

J. VAITKEVIČIUS

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel wird die Verteilung der idealen Primzahlen des imaginär-quadratischen Zahlkörpers in den Sektoren betrachtet.

Satz. *Es sei K der imaginär-quadratische Zahlkörper, d—sein Diskriminant, $\mathfrak{m}$—ein beliebiges ganzzahliges Ideal dieses Körpers und $\mathfrak{H}$—die Klasse der idealen Zahlen* mod $\mathfrak{m}$. *Dabei bezeichnen wir*

$$D=|d|N(\mathfrak{m})>1,$$

wo $N(\mathfrak{m})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{m}$ bedeutet. Es seien fernerhin $0<\Delta<\frac{\pi}{4}$, φ_1, φ_2—beliebige reelle die Bedingung

$$0<\varphi_2-\varphi_1\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta$$

erfüllende Zahlen.

Wir betrachten nun den Sektor, dessen Spitze im Nullpunkt des Koordinatensystems sich befindet und dessen Winkelgröße $\varphi_2-\varphi_1=\varphi$ ist.

Dann existiert eine nur vom Körper K abhängige Konstante $B<0$, und zwar eine solche, für die in diesem Sektor wenigstens eine ideale Primzahl $\mathfrak{p}\in\mathfrak{H}$ vorhanden ist. Für diese Zahl gilt die Bedingung

$$N(\mathfrak{p})<\left(\frac{D}{\varphi}\right)^B.$$

Der Satz wird mit Hilfe der Methode von Ju. W. Linnik (vereinfacht von K. A. Rodosski) bewiesen.