III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1963

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССАХ $K_n(E)$ И $P(E)$

Э. Г. КИРЬЯЦКИЙ

Регулярную и однозначную в единичном круге E функцию $F_n(z)=z^{n-1}f(z)$ $f(0)=0$, $f'(0)=1$ будем считать принадлежащей классу $K_n(E)$, если n-ая разделённая разность этой функции

$$[z_0\, z_1\, \ldots\, z_n]_{F_n(z)}\neq 0$$

при любых попарно различных z_0, z_1, $\ldots$, z_n, взятых из области E [1].

Обозначим через $P(E)$ семейство таких нормированных в единичном круге E функций $f(z)$, что

$$z^{n-1}f(z)\in K_n(E)$$

при любом $n\geqslant 1$.

Некоторые свойства функций из семейства $P(E)$ были изучены в работе [3]. Там, например, была доказана

Теорема А. *Если функция*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots$$

принадлежит $P(E)$, *то*

$$\frac{r}{1+r}\leqslant |f(z)|\leqslant \frac{r}{1-r},\quad |z|=r<1. \tag{1}$$

Коэффициенты функции $f(z)$ *удовлетворяют неравенству*

$$|a_k|\leqslant 1,\quad k=2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{2}$$

В этой работе покажем, что если в (1) и (2) достигаются равенства хотя бы при одном r, $r<1$, или хотя бы при одном $k\geqslant 2$, то $f(z)=z(1-e^{i\alpha}z)^{-1}$. Этот результат дает возможность решить одну экстремальную задачу для классов $K_n(E)$.

Сформулируем ещё одну теорему, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема В. *Если функция*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\quad\in P(E),$$

то функция

$$\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

также принадлежит $P(E)$ *относительно* z, $|z|<1$ *при любом фиксированном* ζ, $|\zeta|<1$. *Коэффициенты* $A_m(\zeta)$ *последней функции в разложении её в ряд Маклорена по* z *определяются по формуле*

$$A_m(\zeta)=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{m-1}\zeta^{m-1}}{\zeta^{m-1}f(\zeta)},$$

причем

$$|A_m(\zeta)| \leqslant 1, \qquad |\zeta| < 1.$$

Доказательство теоремы можно найти в работе [3].

Теорему B можно дополнить следующим образом:

Теорема 1. *Если функция* $f(z) \in P(E)$ *и аналитична в некоторой окрестности точки* ζ_0, $|\zeta_0| = 1$, *то функция*

$$\Phi(z, \zeta_0) = \frac{\zeta_0 z}{f(\zeta_0)} \cdot \frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0}$$

также принадлежит $P(E)$.

Доказательство. Так как функция $f(z)$ однолистна в единичном круге E и $f(0) = 0$, то $f(\zeta_0) \neq 0$ и функция $\Phi(z, \zeta)$ регулярна по обеим переменным при $|z| < 1$ и $\zeta \in E_0$, где E_0 — область, составленная из круга E и достаточно малой окрестности точки ζ_0. Пусть $\zeta_n \to \zeta_0$ и $|\zeta_n| < 1$. Из сказанного следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $r < 1$ найдется такое число $N = N(\varepsilon, r)$, что

$$|\Phi(z, \zeta_k) - \Phi(z, \zeta_0)| < \varepsilon, \qquad |z| < r, \qquad k > N.$$

Таким образом, последовательность функций $\Phi(z, \zeta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ равномерно сходится внутри круга E к функции $\Phi(z, \zeta_0)$. Кроме того, по теореме B функция $\Phi(z, \zeta_k)$ принадлежит $P(E)$. Следовательно и функция $\Phi(z, \zeta_0) \in P(E)$ [см. 1].

Следующая теорема будет касаться коэффициентов функций, принадлежащих $P(E)$.

Теорема 2. *Если функция*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + \ldots$$

принадлежит $P(E)$ *и для некоторого* $k \geqslant 2$

$$|a_k| = 1,$$

то

$$f(z) = z(1 - e^{i\alpha} z)^{-1}.$$

Доказательство будет состоять из нескольких пунктов

а) покажем, что любая функция $\psi(z) \in P(E)$, имеющая k-ый коэффициент по модулю равный единице, имеет вид

$$\psi(z) = \frac{z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-1} z^{k-1}}{1 - e^{i\gamma} z^{k-1}}, \tag{3}$$

где

$$e^{i\gamma} = a_k.$$

Действительно, функция

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{\zeta(z)}{\psi(\zeta)} \cdot \frac{\psi(z) - \psi(\zeta)}{z - \zeta}$$

на основании теоремы B принадлежит $P(E)$ относительно z, $|z| < 1$, при любом фиксированном ζ, $|\zeta| < 1$, и для её коэффициентов $A_m(\zeta)$, $m = 2, 3, \ldots$ справедливы неравенства

$$|A_m(\zeta)| = \left| \frac{\psi(\zeta) - \zeta - a_2\zeta^2 - \ldots - a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}\psi(\zeta)} \right| \leqslant 1. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $A_k(\zeta)$, $(m=k)$, регулярна внутри круга $|\zeta|<1$ и $A_k(0)=a_k=e^{i\gamma}$. По принципу максимума модуля для аналитических функций отсюда следует, что

$$A_k(\zeta)=\frac{\psi(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{k-1}\zeta^{k-1}}{\zeta^{k-1}\psi(\zeta)}\equiv e^{i\gamma} \tag{5}$$

и остаётся решить (5) относительно $\psi(\zeta)$;

б) если $|a_2|=1$, то функция $\psi(z)$ имеет вид

$$\psi(z)=\frac{z}{1-e^{i\gamma}z}. \tag{6}$$

Чтобы убедиться в справедливости (6), надо в (3) положить $k=2$;

в) докажем, что функция $f_0(z)=z(1-e^{i\beta}z^2)^{-1}$ не принадлежит семейству $P(E)$.

Действительно, если бы функция $f_0(z)$, вопреки утверждению, принадлежала $P(E)$, то функция

$$\varphi_0(z\zeta_0)=\frac{\zeta_0 z}{f_0(\zeta_0)}\cdot\frac{f_0(z)-f_0(\zeta_0)}{z-\zeta_0}=\frac{z(1+e^{i\beta}\zeta_0 z)}{1-e^{i\beta}z^2}=z+e^{i\beta}\zeta_0 z^2+\ldots, \tag{7}$$

$$|\zeta_0|=1,\quad \zeta_0\neq e^{-\frac{i\beta}{2}},$$

согласно теореме 1 также принадлежала бы $P(E)$. Второй коэффициент этой функции по модулю равен единице. На основании пункта б, получим

$$\varphi_0(z,\zeta_0)=\frac{z}{1-e^{i\beta}\zeta_0 z},$$

что противоречит равенству (7);

г) пусть $k\geqslant 3$ и $a_k=1$. (Мы можем считать a_k действительным числом. В противном случае, мы рассмотрели бы функцию $f_1(z)=e^{-i\Theta}f(e^{i\Theta}z)$, где $(k-1)\,\Theta+\arg a_k=0$.)

Покажем, что в этом случае второй коэффициент a_2 функции $f(z)$ по модулю равен единице. Так как на основании теоремы А имеем $|a_2|\leqslant 1$, то достаточно убедиться в невозможности неравенства

$$|a_2|<1. \tag{8}$$

Будем рассуждать от противного. Допустим, что неравенство всё же имеет место. Согласно пункту а функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{z+a_2z^2+\ldots+a_{k-1}z^{k-1}}{1-z^{k-1}}. \tag{9}$$

Далее, функция

$$\varphi(z,\zeta)=\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=z+A_2(\zeta)z^2+\ldots$$

на основании теоремы В принадлежит $P(E)$ относительно z, $|z|<1$, при фиксированном ζ, $|\zeta|<1$. Пользуясь формулой (см. теорему В) для коэффициентов $A_m(\zeta)$, а также равенством (9) для функции $f(z)$, получим

$$A_k(\zeta)\equiv 1 \tag{10}$$

и

$$|A_2(\zeta)|=\left|\frac{a_2+a_3\zeta+\ldots+a_{k-1}\zeta^{k-3}+\zeta^{k-2}}{1+a_2\zeta+\ldots+a_{k-1}\zeta^{k-2}}\right|\leqslant 1,\qquad |\zeta|<1. \tag{11}$$

Обозначим корни знаменателя дроби (11) через $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_{k-2}$. Эти числа являются также корнями числителя функции $f(z)$ из (9). Так как функция $f(z)$ однолистна в единичном круге, то она не может иметь более двух полюсов на единичной окружности. Следовательно, $k-3$ корней $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k-3}$ имеют вид $\zeta_j = e^{i\gamma_j}$, $j=1, 2, \ldots, k-3$, причём $1-\zeta_j^{k-1}=0$. Что касается корня ζ_{k-2}, то он по модулю не меньше единицы, так как

$$|\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_{k-2}| = |\zeta_{k-2}| = \frac{1}{|a_{k-1}|} \geqslant 1.$$

Числа $\zeta_j = e^{i\gamma_j}$, $j=1, 2, \ldots, k-3$ будут также корнями числителя дроби (11), иначе в окрестности какой-либо из этих точек не выполняется неравенство (11). Кроме корней $e^{i\gamma_j}$, $j=1, 2, \ldots, k-3$, многочлен $a_2+a_3\zeta+ \ldots + \zeta^{k-2}$ имеет корень ζ_0, по модулю меньший единицы. Действительно, по предположению $|a_2|<1$ и поэтому

$$|\zeta_0 \zeta_1 \ldots \zeta_{k-3}| = |\zeta_0| = |a_2| < 1.$$

Итак, в точке ζ_0 имеем

$$b_2 = A_2(\zeta_0) = 0. \tag{12}$$

Построим теперь функцию

$$f_0(z) = \varphi(z, \zeta_0) = \frac{\zeta_0 z}{f(\zeta_0)} \cdot \frac{f(z)-f(\zeta_0)}{z-\zeta_0} = z + A_2(\zeta_0) z^2 + \ldots .$$

Для неё имеем согласно (10) и (12)

$$\left.\begin{aligned} &b_2 = A_2(\zeta_0) = 0, \\ &b_k = A_k(\zeta_0) = 1, \\ &f_0(z) \in P(E). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Функцию $f_0(z)$ будем исследовать таким же образом, как и функцию $f(z)$. Опираясь на пункт а, получим

$$f_0(z) = \frac{z + b_3 z^3 + \ldots + b_{k-1} z^{k-1}}{1 - z^{k-1}}. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_0(z, \zeta) = \frac{\zeta z}{f_0(\zeta)} \cdot \frac{f_0(z) - f_0(\zeta)}{z-\zeta} = z + B_2(\zeta) z^2 + \ldots \qquad \in P(E).$$

Её второй коэффициент $B_2(\zeta)$ будет

$$B_2(\zeta) = \frac{b_3\zeta + b_4\zeta^2 + \ldots + \zeta^{k-2}}{1 + b_3\zeta^2 + \ldots + b_{k-1}\zeta^{k-2}}. \tag{15}$$

Как и в случае дроби (9) и (11) убедимся, что числитель дроби (15) имеет $k-3$ корня, лежащих на единичной окружности. Кроме того, он ещё имеет корень в начале координат. Отсюда заключаем, что $|b_3|=1$. На основании пункта а, и учитывая, что $b_2=0$, получим для функции $f_0(z)$ следующее выражение

$$f_0(z) = \frac{z}{1-e^{i\beta} z^2}. \tag{16}$$

Последнее приводит к противоречию, так как из пункта с известно, что функция (16) не может принадлежать семейству $P(E)$. Следовательно, наше допущение, что $|a_2|<1$ не верно. Значит $|a_2|=1$ и тогда, согласно пункту б,

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{i\alpha} z}.$$

Изучим вид функции, для которой в (1) и (2) имеют место равенства.

Лемма 1. *Если $f(z)\in P(E)$ и в какой-нибудь точке ζ_0, $|\zeta_0|<1$*

$$\left|\frac{f(\zeta_0)-\zeta_0}{\zeta_0 f(\zeta_0)}\right|=1, \tag{17}$$

то

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{i\alpha}z}.$$

Доказательство. Согласно теореме B, для второго коэффициента $A_0(\zeta)$ функции

$$\varphi(z,\zeta)=\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\cdot\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\in P(E)$$

имеем

$$|A_2(\zeta)|=\left|\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)}\right|\leqslant 1,\qquad |\zeta|<1. \tag{18}$$

Так как функция $A_2(\zeta)$ регулярна внутри единичного круга, то, учитывая (17) и (18), по принципу максимума модуля для аналитических функций, получим

$$\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)}\equiv e^{i\alpha}$$

и

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{i\alpha}z}.$$

Теорема 3. *Если $f(z)\in P(E)$ и, хотя бы для одного значения r, $|r|<1$*

$$\max_{|z|=r}|f(z)|=\frac{r}{1-r} \tag{19}$$

или

$$\min_{|z|=r}|f(z)|=\frac{r}{1+r}, \tag{20}$$

то

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{i\alpha}z}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено (19). Согласно теореме B

$$\left|\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)}\right|\leqslant 1,\qquad |\zeta|<1. \tag{21}$$

Покажем, что внутри единичного круга найдётся такая точка ζ_0, что

$$\left|\frac{f(\zeta_0)-\zeta_0}{\zeta_0 f(\zeta_0)}\right|=1,\qquad |\zeta_0|<1. \tag{22}$$

Действительно, если бы такой точки не существовало, то мы согласно (21) имели бы неравенство

$$\left|\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)}\right|<1,\qquad |\zeta|<1, \tag{23}$$

которое можно записать и так

$$|f(\zeta)-\zeta|<|\zeta|\cdot|f(\zeta)|,$$

откуда

$$|f(\zeta)|-|\zeta|<|\zeta|\cdot|f(\zeta)|.$$

Решая последнее неравенство относительно $|f(\zeta)|$, получим

$$|f(\zeta)|<\frac{|\zeta|}{1-|\zeta|},\qquad |\zeta|<1,$$

что противоречит (19), т. е. равенство (22) доказано. Если же при некотором $r<1$ выполнено (20), то равенство (22) докажем, переписав неравенство (23) в несколько ином виде:

$$\left|\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{f(\zeta)}\right|<1, \qquad |\zeta|<1,$$

откуда

$$\frac{1}{|f(\zeta)|}<1+\frac{1}{|\zeta|}$$

и

$$|f(\zeta)|>\frac{|\zeta|}{1+|\zeta|},$$

что приводит к противоречию с (20).

И так, в обоих случаях равенство (22) справедливо. Чтобы закончить доказательство, остаётся воспользоваться леммой 1.

В работе [2] мы рассматривали множество нормированных функций $F_n(z)$

$$F_n(z)=z^{n-1}f_n(z)=z^n+a_2z^{n+1}+\dots$$

из класса $K_n(E)$. Обозначим множество всех этих функций через $K_n^*(E)$ и пусть

$$M_n(r)=\max_{F_n\in K_n^*(E)}\ \max_{|z|=r} F_n(z),$$

$$m_n(r)=\min_{F_n\in K_n^*(E)}\ \min_{|z|=r} F_n(z).$$

В работе [2] установлено, что

$$\frac{M_n(r)}{r^{n-1}}\geqslant\frac{M_{n+1}(r)}{r^n}$$

и

$$\frac{m_n(r)}{r^{n-1}}\leqslant\frac{m_{n+1}(r)}{r^n}.$$

Отсюда следует, что последовательности $\left\{\frac{M_n(r)}{r^{n-1}}\right\}$ и $\left\{\frac{m_n(r)}{r^{n-1}}\right\}$ сходятся при $n\to\infty$. В следующей теореме вычислим пределы этих последовательностей.

Теорема 4. *Имеют место равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n(r)}{r^{n-1}}=\frac{r}{1-r}, \tag{24}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n(r)}{r^{n-1}}=\frac{r}{1+r}. \tag{25}$$

Кроме того, если, хотя бы для одного r, $r<1$, *максимум (минимум) функций*

$$F_n(z)=z^{n-1}f_n(z)\in K_n^*(E) \tag{26}$$

$$\left(\Phi_n(z)=z^{n-1}\varphi_n(z)\in K_n^*(E)\right) \tag{27}$$

равен $M_n(r)$ $(m_n(r))$, *то имеется последовательность действительных чисел* $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^{i\Theta_n}f_n(e^{i\Theta_n}z)\right]=\frac{z}{1-z} \tag{28}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left[e^{i\sigma_n}\varphi_n(e^{i\sigma_n}z)\right]=\frac{z}{1-z}\right). \tag{29}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством равенств (24) и (28); равенства (25) и (29) доказываются вполне аналогично. Рассмотрим функции $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, определённые равенством (26). Эти функции однолистны в единичном круге E (см. [2]). Поэтому последовательность функций $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$ равномерно ограничена внутри круга E и из неё можно выделить подпоследовательность функций $f_{n_k}(z)$, $k=1, 2, \ldots$, которая равномерно сходится внутри единичного круга E к некоторой функции $f(z)$. Функция $f(z)$ будет принадлежать $P(E)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(r)}{r^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \max_{|z|=r} |f_n(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Из теоремы А следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(r)}{r^{n-1}} \leqslant \frac{r}{1-r}.$$

С другой стороны, функция $z^{n-1}(1-z)^{-1}$ принадлежит классу $K_n^*(E)$, $n=1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(r)}{r^{n-1}} \geqslant \frac{r}{1-r},$$

Значит

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(r)}{r^{n-1}} = \frac{r}{1-r}.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, напомним, что $f(z) \in P(E)$ и, по только что доказанному,

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \frac{r}{1-r}.$$

Отсюда по теореме 3

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{i\alpha} z}. \tag{30}$$

Из всех функций вида (30) только функция

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

принимает наибольшее по модулю значение в точке $z=r$. Выберем последовательность действительных чисел $\{\Theta_n\}$ таким образом, чтобы функции $e^{i\Theta_n} f_n(e^{i\Theta_n} z)$ принимали наибольшие по модулю значения на окружности $|z|=r$ в точке $z=r$. Тогда, по доказанному ранее, равномерно сходящаяся подпоследовательность функций $f_{n_k}(z)$ будет иметь своим пределом функцию $z(1-z)^{-1}$. Значит и сама последовательность функций $e^{i\Theta_n} f_n(e^{i\Theta_n} z)$ равномерно сходится к $z(1-z)^{-1}$.

Поступила в редакцию
2.IV.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирьяцкий. Литовский математический сборник № 1—2, 1961.
2. Кирьяцкий. Литовский математический сборник № 1, 1962.
3. Кирьяцкий. Литовский математический сборник № 2, 1962.

KAI KURIE EKSTREMALINIAI UŽDAVINIAI $K_n(E)$ IR $P(E)$ KLASĖSE

E. KIRJACKIS

(*Reziumė*)

Reguliari ir vienareikšmė srityje D funkcija priklauso $K_n(D)$ klasei, jei bet kuriems taškams $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$ tos funkcijos padalytas skirtumas nėra lygus nuliui. Funkcija $f(z)$ priklauso $P(E)$ klasei (E — vienetinis skritulys), jei

$$z^{n-1} f(z) \in K_n(E), \quad n=1, 2, \ldots .$$

$K_n(E)$ ir $P(E)$ klasės buvo nagrinėtos darbe [3]. Šitame darbe toliau nagrinėjame tas klases.

EINIGE EXTREMALE AUFGABEN FÜR DIE KLASSEN $K_n(E)$ UND $P(E)$

E. KIRJATSKY

(*Zusammenfassung*)

Eine im Bereich D reguläre und eindeutige Funktion $F(z)$ gehört der Klasse $K_n(D)$ an, sofern ihre dividierte Differenz n-ter Ordnung $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ für beliebige $z_0, z_1, \ldots, z_n \in D$ nicht gleich Null ist.

Mit $P(E)$ bezeichnen wir die Klasse derjenigen Funktionen $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, für welche

$$z^{n-1} f(z) \in K_n(E), \quad n=1, 2, \ldots .$$

Eine Betrachtung der Klassen $K_n(E)$ und $P(E)$ ist bereits in der Arbeit [3] gegeben. Dieser Beitrag stellt eine Fortsetzung der obigen Arbeit dar.