III LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1963

СЕКУЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ

А. МАТУЗЯВИЧЮС

1. Произведение расслоений. Пусть

$$\bar{E}_1(E_1,\ B,\ F_1,\ p_1) \quad \text{и} \quad \bar{E}_2(E_2,\ B,\ F_2,\ p_2) \text{ —}$$

два расслоения с одной и той же базой B. Произведением этих расслоений называется расслоение

$$\bar{E}_1 \times \bar{E}_2(E,\ B,\ F_1 \times F_2,\ p).$$

Точками пространства расслоения E являются пары $(e_1,\ e_2)$, где $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, удовлетворяющие условию $p_1(e_1) = p_2(e_2)$, таким образом, пространство E является подпространством прямого произведения $E_1 \times E_2$. Проекция $p: E \to B$ расслоения $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ определяется формулой

$$p(e_1,\ e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2).$$

Слоем произведения $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ является прямое произведение $F_1 \times F_2$.

2. Теорема 1. Пусть

$$\bar{E}_1(E_1,\ B,\ F_1,\ p_1) \quad \text{и} \quad \bar{E}_2(E_2,\ B,\ F_2,\ p_2) \text{ —}$$

два расслоения, базой которых служит один и тот же односвязный CW-полиэдр B, слои F_1, F_2 соответственно расслоений $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ являются гомотопически простыми в размерности r и асферичны в размерностях $< r$. Тогда произведение $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ расслоений $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ имеет над r-мерным остовом базы секущую поверхность. Если характеристический класс расслоения $\bar{E}_i\ (i = 1,\ 2)$ обозначим через

$$Z_i^{r+1} \in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F_i)\Big),$$

то характеристический класс

$$Z^{r+1} \in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F_1 \times F_2)\Big)$$

произведения $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ связан с характеристическими классами Z_1^{r+1}, Z_2^{r+1} соотношением

$$Z^{r+1} = \hat{j}_{1*} Z_1^{r+1} + \hat{j}_{2*} Z_2^{r+1},$$

где $\hat{j}_{i*}$ — гомоморфизм групп когомологий

$$H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F_i)\Big) \to H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r(F_1 \times F_2)\Big),$$

пораждаемый гомоморфизмом

$$j_{i*}: \pi_r(F_i) \to \pi_r(F_1 \times F_2).$$

Доказательство. В силу асферичности слоя F_1 во всех размерностях $<r$ мы можем над r-мерным остовом B^r базы B расслоения $\bar{E}_i$ построить секущую поверхность φ_i. Тогда и над r-мерным остовом B^r базы B произведения $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ определяется секущая поверхность φ формулой

$$\varphi(b) = \left(\varphi_1(b),\ \varphi_2(b)\right), \qquad b \in B^r.$$

Пусть τ^{r+1} — произвольная $(r+1)$-мерная ориентированная клетка CW-полиэдра B, а $\dot{\tau}^{r+1} = S^r$ — его когерентно ориентированная граница. Будем рассматривать секущую поверхность φ_i только на S^r. По определению секущей поверхности имеем $p_i \circ \varphi_i = e$, где e — тождественное отображение сферы S^r на себя. Пусть h_t — деформация, соединяющая тождественное отображение $h_0 = e : S^r \to S^r$ с отображением $h_1 : S^r \to b_0$ и построенная таким образом, что сначала сфера S^r стягивается по клетке в свою точку, а затем эта точка непрерывно перемещается в фиксированную точку b_0 базы B.

Применяя условия существования накрывающей гомотопии для расслоения $\bar{E}_i$, получаем такое семейство отображений $\varphi_i^t : S^r \to E_i$, что $p_i \circ \varphi_i^t = h_t$.

Но непрерывное отображение φ_i^1 ориентированной r-мерной сферы в слой $F_i = p_i^{-1}(b_0)$ определяет некоторый элемент гомотопической группы $\pi_r(F_i)$, который поставим в соответствие клетке τ^{r+1} и обозначим через $z_{\varphi_i}^{r+1}(\tau^{r+1})$. Без труда доказывается, что элемент $z_{\varphi_i}^{r+1}(\tau^{r+1})$ не зависит от выбора элементов построения, является значением коцикла $z_{\varphi_i}^{r+1}$ на клетке в области коэффициентов $_r(F_i)$. Этот коцикл $z_{\varphi_i}^{r+1}$ называется препятствием к распространению секущей поверхности φ_i на $(r+1)$-мерном остове B^{r+1} базы B.

По такой же схеме определяется и препятствие z_{φ}^{r+1} к распространению секущей поверхности φ на $(r+1)$-мерном остове B^{r+1} базы B произведения $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$. Это препятствие z_{φ}^{r+1} над произвольной $(r+1)$-мерной клеткой τ^{r+1} принимает значение $z_{\varphi}^{r+1}(\tau^{r+1})$ в области коэффициентов $\pi_r(F_1 \times F_2)$. Оно определяется таким отображением $\varphi^1 : S^r \to F_1 \times F_2$, которое удовлетворяет условию $p \circ \varphi^1 = h_1$, где h_1 всю сферу S^r переводит в точку $b_0 \in B$.

Пусть S_1^r, S_2^r — такие полиэдры, каждый из которых гомоморфен r-мерной сфере, что они имеют единственную общую точку a. Как известно, сумма таких полиэдров называется r-мерным букетом сфер второго порядка и обозначается через $B_2^r = S_1^r \cup S_2^r$. Удобно рассматривать клеточное разбиение букета B_2^r, состоящее из клеток

$$\tau^0 = a, \quad \tau_1^r = S_1^r \backslash a, \quad \tau_2^r = S_2^r \backslash a.$$

Обозначим через f отображение поляризованной сферы S^r в B_2^r, которое переводит полюс сферы S^r в точку a букета B_2^r и имеет степень $+1$ на клетках τ_1^r, τ_2^r.

Определим отображение ψ букета B_2^r в произведение $F_1 \times F_2$ формулой

$$\psi(b) = \begin{cases} \left(\varphi_1^1(b),\ b_0\right) & \text{при} \quad b \in S_1^r, \\ \left(b_0,\ \varphi_2^1(b)\right) & \text{при} \quad b \in S_2^r, \end{cases}$$

переводящее точку $a \in B_2^r$ в точку $(b_0, b_0) \in F_1 \times F_2$.

Тогда f есть сфероид букета B_2^r в точке a, причем его степень равна, очевидно, (1, 1). Поэтому сфероид f принадлежит классу $\alpha_1+\alpha_2$, где элементы α_1, $\alpha_2 \in \pi_r(B_2^r, a)$ определяются отображением сферы S^r в B_2^r соответственно в клетки τ_1^r, τ_2^r.

Применив гомоморфизм ψ группы $\pi_r(B_2^r, a)$ в $\pi_r(F_1 \times F_2)$, мы получим

$$\{\psi f\} = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2). \tag{1}$$

Но элементы $\psi(\alpha_1)$, $\psi(\alpha_2)$ определяются композицией отображения f сферы S^r в клетки τ_1^r, τ_2^r и отображения ψ клеток τ_1^r, τ_2^r соответственно в F_1, F_2. В свою очередь, очевидно, что отображение ψ на клетках τ_1^r, τ_2^r можно представить как соответственно композиции $j_1 \circ \varphi_1^1$, $j_2 \circ \varphi_2^1$ двух отображений φ_1^1 или φ_2^1 и j_1 или j_2, где j_1, j_2 — естественные отображения $F_1 \to F_1 \times F_2$, $F_2 \to F_1 \times F_2$, определяемые соответственно формулами

$$j_1(b_1) = (b_1, b_0), \quad j_2(b_2) = (b_0, b_2), \quad b_1 \in F_1, \quad b_2 \in F_2.$$

Так как отображение $\varphi_i^1 \circ f$ определяет элемент $z_{\varphi_i}^{r+1}(\tau^{r+1}) \in \pi_{r+1}(F_i)$, то отображение $j_i \circ \varphi_i^1 \circ f$ определяет элемент $j_{i*} z_{\varphi_i}^{r+1}(\tau^{r+1}) \in \pi_r(F_1 \times F_2)$. Таким образом, получаем

$$\psi(\alpha_i) = j_{i*} z_{\varphi_i}^{r+1}(\tau^{r+1}), \tag{2}$$

где j_{i*} — гомоморфизм гомотопических групп

$$\pi_r(F_i) \to \pi_r(F_1 \times F_2).$$

Очевидно, что отображение $\psi \circ f$ (ψ рассматриваемое на всем букете B_2^r) гомотопно отображению φ^1, которое, как видели раньше, определяет элемент $z_\varphi^{r+1}(\tau^{r+1}) \in \pi_r(F_1 \times F_2)$.

Поэтому имеем

$$\{\psi f\} = z_\varphi^{r+1}(\tau^{r+1}). \tag{3}$$

Наконец, из (1), (2) и (3) вытекает

$$z_\varphi^{r+1}(\tau^{r+1}) = j_{1*} z_{\varphi_1}^{r+1}(\tau^{r+1}) + j_{2*} z_{\varphi_2}^{r+1}(\tau^{r+1}). \tag{4}$$

Так как это соотношение имеет место для произвольной клетки τ^{r+1} CW-полиэдра B, то получаем

$$z_\varphi^{r+1} = j_{1*} z_{\varphi_1}^{r+1} + j_{2*} z_{\varphi_2}^{r+1}. \tag{5}$$

В свою очередь, из равенства (5) вытекает соотношение

$$Z^{r+1} = \hat{j}_{1*} Z_1^{r+1} + \hat{j}_{2*} Z_2^{r+1},$$

где z_φ^{r+1}, $z_{\varphi_i}^{r+1}$ ($i=1, 2$) — препятствия, принадлежащие соответственно классам когомологий

$$Z^{r+1} \in H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_1 \times F_2)\Big), \quad Z_i^{r+1} \in H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_i)\Big),$$

а $\hat{j}_{i*}$ — гомоморфизм групп когомологий

$$H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_i)\Big) \to H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_1 \times F_2)\Big)$$

пораждается гомоморфизмом

$$j_{i*} : \pi_r(F_i) \to \pi_r(F_1 \times F_2).$$

3. **Определение различающей.** Пусть $\bar{E}(E, B, F, p)$ — расслоение, база B которого является односвязным CW-полиэдром; φ, ψ — две секущие поверхности расслоения $\bar{E}$, заданные над r-мерным остовом B^r базы B и совпадающие

над $(r-1)$-мерным остовом B^{r-1}. Далее, пусть τ^r — произвольная ориентированная r-мерная клетка CW-полиэдра B. Возьмем два экземпляра τ^r_+ и τ^r_- этой клетки τ^r и „склеим" по их общей границе. Получим сферу $S^r=\tau^r_+ \cup \tau^r_-$, которую ориентируем согласованно с клеткой τ^r_+ (тогда клетка τ^r_- будет иметь ориентацию, противоположную ориентации сферы S^r).

Определим отображение $f_0: S^r \to E$ формулой

$$f_0(x)=\begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad x\in\tau^r_+, \\ \psi(x) & \text{при} \quad x\in\tau^r_- \end{cases}$$

и отображение $e: S^r \to \tau^r$, тождественно отображающее каждую клетку τ^r_+, τ^r_- на τ^r.

Тогда по определению секущих поверхностей φ, ψ и отображения f_0 имеем $p\circ f_0=e$. Пусть k'_t — деформация, соединяющая тождественное отображение k'_0 клетки τ^r в B с отображением k'_1, переводящим всю клетку τ^r в фиксированную точку b_0 базы B. (Как и раньше, мы можем считать, что деформация k'_t сначала стягивает клетку τ^r по себе в точку, а затем непрерывно переводит ее в фиксированную точку b_0.) Положим $k_t=k'_t\circ e$. Исходя из соотношения $p\circ f=k_0$ и применяя условие существования накрывающей гомотопии для расслоения $\bar{E}$, найдем такую деформацию f_t отображения f_0, что $p\circ f_t=k_t$.

Поставим в соответствие каждой r-мерной клетке τ^r базы B отображение $f(\tau^r): S^r \to F$, считая $f=f_1$, где $F=p^{-1}(b_0)$ — слой, лежащий над точкой b_0. Нетрудно проверить, что гомотопический класс отображения $f: S^r \to F$ не зависит от случайности построения. Обозначим этот класс через $d^r_{\varphi,\psi}(\tau^r)$ и назовем получающуюся коцепь различающей для совпадения секущих поверхностей φ, ψ на B^r. Различающая коцепь $d^r_{\varphi,\psi}$ принимает значения в области коэффициентов $\pi_r(F)$. Свойства так определенной различающей аналогичны тем, которые имеются в случае косого произведения.

Если секущие поверхности φ, ψ, заданные над $(r+1)$-мерным остовом B^{r+1} базы B, то различающая коцепь $d^r_{\varphi,\psi}$ является коциклом. Класс когомологий этого коцикла называется различающим классом и обозначается через D^r; этот класс является элементом группы когомологии $H^r\left(B, \pi^r(F)\right)$.

4. Теорема 2. Пусть

$$\bar{E}_1(E_1, B, F_1, p_1) \quad \text{и} \quad \bar{E}_2(E_2, B, F_2, p_2) \text{ —}$$

два расслоения, базой которых служит один и тот же односвязный CW-полиэдр B, слои F_1, F_2 соответственно расслоений $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, являются гомотопически простыми в размерности r и асферичны в размерностях $<r$. Тогда в произведении $\bar{E}_1\times\bar{E}_2$ расслоений $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ существуют две секущие поверхности над r-мерным остовом B^r базисного пространства B, которые совпадают над остовом B^{r-1}. Если в расслоениях $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ существуют две секущие поверхности и над $(r+1)$-мерным остовом B^{r+1}, тогда и в произведении $\bar{E}_1\times\bar{E}_2$ имеем две секущие поверхности над тем же остовом B^{r+1}. Обозначим через

$$D^r_1\in H^r\left(B, \pi_r(F_1)\right), \quad D^r_2\in H^r\left(B, \pi_r(F_2)\right)$$

различающий класс секущих поверхностей соответственно в расслоениях $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$. Тогда различающий класс

$$D^r \in H^r\left(B,\ \pi_r(F_1 \times F_2)\right)$$

секущих поверхностей произведения $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ связан с классами D_1^r, D_2^r соотношением

$$D^r = \hat{j}_{1*} D_1^r + \hat{j}_{2*} D_2^r,$$

где j_{i*} $(i=1,\ 2)$ — гомоморфизм групп когомологий

$$H^r\left(B,\ \pi_r(F_i)\right) \to H^r\left(B,\ \pi_r(F_1 \times F_2)\right),$$

пораждаемый гомоморфизмом

$$j_{i*} : \pi_r(F_i) \to \pi_r(F_1 \times F_2).$$

Доказательство. В силу асферичности слоя F_i во всех размерностях $<r$ мы можем построить две секущие поверхности φ_i, ψ_i над r-мерным остовом B^r базы B в расслоении $\bar{E}_i$. Для секущих поверхностей выше указанным образом определяется первая нетривиальная различающая $d^r_{\varphi_i,\, \psi_i}$, так как все различающие меньших размерностей в силу асферичности слоя F_i равны нулю и секущие поверхности φ_i, ψ_i совпадают над $(r-1)$-мерным остовом B^{r-1}.

Тогда и над B^r базы B в произведении $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ определяются две секущие поверхности φ, ψ формулами

$$\varphi(b) = \left(\varphi_1(b),\ \varphi_2(b)\right), \quad b \in B^r,$$

$$\psi(b) = \left(\psi_1(b),\ \psi_2(b)\right), \quad b \in B^r. \tag{6}$$

Эти секущие поверхности совпадают над B^{r-1} так как секущие поверхности φ_i, ψ_i совпадают над тем же остовом. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Если в расслоении $\bar{E}_i$ существуют секущие поверхности φ_i, ψ_i и над B^{r+1}, то в произведении $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ формулы (6) определяют секущие поверхности φ, ψ так же над B^{r+1}.

Тогда секущими поверхностями φ_i, ψ_i, φ, ψ определенные различающие коциклы $d^r_{\varphi_i,\, \psi_i}$, $d^r_{\varphi,\, \psi}$ над произвольной r-мерной клеткой τ^r базы B принимают значения $d^r_{\varphi_i,\, \psi_i}(\tau^r)$, $d^r_{\varphi,\, \psi}(\tau^r)$ соответственно в областях коэффициентов $\pi_r(F_i)$, $\pi_r(F_1 \times F_2)$ и определяют различающие классы когомологий

$$D_i^r \in H^r\left(B,\ \pi_r(F_i)\right), \quad D^r \in H^r\left(B,\ \pi_r(F_1 \times F_2)\right).$$

Таким образом, для доказательства теоремы, очевидно, нам достаточно показать, что имеет место соотношение

$$d^r_{\varphi,\, \psi}(\tau^r) = j_{1*} d^r_{\varphi_1,\, \psi_1}(\tau^r) + j_{2*} d^r_{\varphi_2,\, \psi_2}(\tau^r).$$

Доказательство последнего соотношения проводится по такой же схеме как и доказательство аналогичного соотношения (4) теоремы 1.

5. Обобщения. Легко видеть, что теоремы 1, 2 верны и для расслоений, базой которых служит неодносвязный CW-полиэдр. Для этого необходимо изменить определения препятствия и различающей, так чтобы они принимали значения в локальной системе коэффициентов.

Отметим, наконец, что легко определить произведение любого (конечного или бесконечного) множества расслоений с одним и тем же базисным пространством и перенести на этот случай теоремы 1 и 2.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
21.I.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 47 (1955).
2. А. Матузявичюс. Литовский матем. сб., I № 1–2, 117—129 (1961).
3. А. С. Шварц. Труды Московского матем. общества, 10, 217—272 (1961).

SLUOKSNIAVIMŲ SANDAUGOS KERTAMIEJI PAVIRŠIAI

A. MATUZEVIČIUS

(Reziumė)

Dviejų su ta pačia baze B sluoksniavimų

$$\bar{E}_1(E_1, B, F_1, p_1) \quad \text{ir} \quad \bar{E}_2(E_2, B, F_2, p_2)$$

sandauga vadinamas sluoksniavimas $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 (E, B, F_1 \times F_2, p_2)$. Sluoksniavimo $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ erdvė E apibrėžiama tiesioginės sandaugos $E_1 \times E_2$ poerdviu, susidedančiu iš tokių dvejetų (e_1, e_2), kur $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, kurie patenkina sąlygą $p(e_1) = p(e_2)$. Projekcija $p: E \to B$ apibrėžiama formule $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$.

Sakykime, kad $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ — du sluoksniavimai, kurių bendra bazė B yra vienkart susijęs CW-padalijimas, o sluoksniai F_1, F_2 — homotopiniai paprasti matavime r ir asferiniai matavimuose $< r$.

Tada sluoksniavime $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ ant r-matės bazės dalies egzistuoja kertamasis paviršius. Jeigu

$$Z_i^{r+1} \in H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_i)\Big) \quad (i = 1, 2) \; -$$

sluoksniavimo $\bar{E}_i$ charakteringoji klasė, tai sluoksniavimo $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ charakteringoji klasė

$$Z^{r+1} \in H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_1 \times F_2)\Big)$$

surišta su klasėmis Z_1^{r+1}, Z_2^{r+1} formule

$$Z^{r+1} = \hat{j}_{1*} Z_1^{r+1} + \hat{j}_{2*} Z_2^{r+1},$$

kur $\hat{j}_{i*}$ — kohomologijos grupių

$$H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_i)\Big) \to H^{r+1}\Big(B, \pi_r(F_1 \times F_2)\Big)$$

homomorfizmas, indukuotas natūralaus homomorfizmo

$$j_{i*}: \pi_r(F_i) \to \pi_r(F_1 \times F_2).$$

Analoginis tvirtinimas teisingas ir dėl dviejų kertamųjų paviršių skiriamosiomis apibrėžtų kohomologijos klasių.

ÜBER DIE SCHNITTFLÄCHEN IM PRODUKT DER FASERUNGEN

A. MATUZEVIČIUS

(Zusammenfassung)

Es sei

$$\bar{E}_i\,(E_i,\ B,\ F_i,\ p_i)\quad (i=1,\ 2)$$

eine Faserung mit homotopisch einfacher Fiber F_i in der Dimension r und $\pi_s\,(F_i)=0$, wo $s<r$; dann ist die Schnittfläche auf B' im Produkt $\bar{E}_1\times\bar{E}_2\,(E,\ B,\ F_1\times F_2,\ p)$ konstruierbar. Bezeichnet man die charakteristischen Kohomologieklassen der Faserungen $\bar{E}_i$, $\bar{E}_1\times\bar{E}_2$ bzw. mit

$$Z_i^{r+1}\in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r\,(F_i)\Big),\quad Z^{r+1}\in H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r\,(F_1\times F_2)\Big).$$

Im vorliegenden Artikel wird die Formel

$$Z^{r+1}=\hat{j}_{1*}\,Z_1^{r+1}+\hat{j}_{2*}\,Z_2^{r+1}$$

bewiesen, wo

$$\hat{j}_{i*}:H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r\,(F_i)\Big)\to H^{r+1}\Big(B,\ \pi_r\,(F_1\times F_2)\Big)$$

ein Homomorphismus ist.

Analogische Formel gilt für Kohomologieklassen der Unterscheidungen von zwei zusammenfallenden (auf B^{r-1}) Schnittflächen.