III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
1963

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

А. МИШКЕЛЯВИЧУС

Рассмотрим ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}. \tag{A}$$

О рядах вида (А) имеется много исследований [2] в случае, когда λ_n — действительные числа. Вопросы абсолютной сходимости рядов (А) в случае комплексных λ_n, а также более общих рядов Тейлора-Дирихле рассматриваются в работах Т. Л. Лунца [3, 4], где указывается и более общая литература по этим вопросам.

Основная задача нашей работы состоит в установлении аналога известной теоремы Абеля о степенных рядах для рядов Дирихле (А). Кроме того, изучается характер сходимости этих рядов, доказывается, что в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$, область сходимости является полуплоскостью, и вычисляются абсциссы (простой и абсолютной) сходимости. Заметим, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \arg \lambda_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, то, как показал Väisälä, область сходимости для ряда (А) может быть несвязна (3).

К приводимому в работе аналогу теоремы Абеля приводит следующее формальное рассуждение (сравни с (1)).

На ряд Дирихле (А) можем смотреть, как на формальный предел последовательности рядов вида:

$$I_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n z} + e^{-\lambda_N z} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left[e^{-(\lambda_{N+1}-\lambda_N) z}\right]^{n-N}$$

при $N \to \infty$.

Но если ряд I_N, который по отношению $w = e^{-(\lambda_{N+1}-\lambda_N) z}$ является степенным рядом, сходится в точке $z = z_0$, то он будет сходиться в области:

$$\left| e^{-(\lambda_{N+1}-\lambda_N) z} \right| < \left| e^{-(\lambda_{N+1}-\lambda_N) z_0} \right|,$$

которая означает полуплоскость:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{N+1}-\lambda_N)(x-x_0) - \operatorname{Im}(\lambda_{N+1}-\lambda_N)(y-y_0) > 0.$$

Введём следующие обозначения:

$$Q_n(z_0) : \operatorname{Re}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(x-x_0) - \operatorname{Im}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(y-y_0) \geqslant 0,$$

$$R_n(z_0) : \operatorname{Re}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(x-x_0) - \operatorname{Im}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(y-y_0) \leqslant 0.$$

Обозначим через $Q(z_0)$ $(R(z_0))$ — множество точек z, которые принадлежат всем полуплоскостям $Q_n(z_0)$ $(R_n(z_0))$ с некоторого номера $N=N(z)$, т. е.

$$Q(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} Q_n(z_0),$$

$$R(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} R_n(z_0).$$

Естественно ожидать, что если ряд Дирихле (А) сходится (расходится) в точке $z=z_0$, то он будет сходиться (расходиться) во внутренних точках множества $Q(z_0)$ $(R(z_0))$.

§ 1. Области $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ и $\overset{\circ}{R}(z_0)$

Обозначим через $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ $(\overset{\circ}{R}(z_0))$ совокупность внутренних точек множества $Q(z_0)(R(z_0))$. Нетрудно видеть, что область $\overset{\circ}{Q}(z_0)(\overset{\circ}{R}(z_0))$, если только она не пустая, состоит из внутренних точек некоторого угла с вершиной в точке z_0 и с раствором, не превышающим π. В самом деле, множество $Q(z_0)$ представляется в виде суммы углов

$$A_n = \prod_{k=n}^{\infty} Q_k(z_0) \quad \text{и} \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots.$$

Чтобы определить угол $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ по величинам λ_n, заметим, что полуплоскость $Q_n(z_0)$ ограничена прямой, проходящей через точку z_0 и перпендикулярной к вектору $\overline{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}$ ($\bar{a}$ — означает число, сопряжённое с a). При этом $Q_n(z_0)$ означает ту из двух полуплоскостей, которая содержит достаточно удалённые точки луча, идущего по направлению вектора $\overline{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}$.

Обозначим через U наименьший угол, содержащий все предельные направления множества векторов $\{\overline{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\}$ (речь идёт о предельных значениях последовательности $\{\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\}$). Если раствор α_1 угла U больше или равен π, то область $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ пуста. В противном случае, если $\alpha_1<\pi$, то $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ представляет угол с вершиной в точке z_0 и с раствором $(\pi-\alpha_1)$, причём стороны этого угла перпендикулярны к сторонам угла U. Поворотом плоскости можем достичь в последнем случае $(0\leqslant\alpha_1<\pi)$, чтобы угол U лежал в правой полуплоскости. Тогда если обозначить:

$$\begin{aligned} &\varliminf_{n\to\infty} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\alpha, \\ &\varlimsup_{n\to\infty} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\beta<\frac{\pi}{2},$$

то область $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ определяется неравенством:

$$\overset{\circ}{Q}(z_0):\ -\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta, \tag{2}$$

а область $\overset{\circ}{R}(z_0)$ — неравенством:

$$\overset{\circ}{R}(z_0): -\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) < \arg(z_0 - z) < \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Углы эти имеют раствор $\pi - (\beta - \alpha)$. В частности, если $\alpha = \beta = \varphi$, то получаем полуплоскости:

$$\overset{\circ}{Q}(z_0): -\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) < \arg(z - z_0) < \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\overset{\circ}{R}(z_0): -\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) < \arg(z_0 - z) < \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Для дальнейшего полезно заметить, что если $z \in \overset{\circ}{Q}(z_0)$, то $z_0 \in \overset{\circ}{R}(z)$.

§ 2. Аналог теоремы Абеля для ряда Дирихле

Сначала заметим, что ряд (А) сходится или расходится одновременно с рядом:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_N) z} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_{N+1} - \lambda_N) z} \ldots e^{-(\lambda_n - \lambda_{n-1}) z}. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Если ряд* (3) *сходится абсолютно* (*не сходится абсолютно*) *в точке* z_0, *то он сходится абсолютно* (*не сходится абсолютно*) *на множестве* $Q(z_0)$ $(R(z_0))$.

Доказательство. Предположим, что ряд (3) сходится абсолютно в точке z_0 и $z \in Q(z_0)$. Тогда с некоторого номера $N = N(z)$ $z \in Q_n(z_0)$ и поэтому:

$$\left| e^{-(\lambda_n - \lambda_{n-1}) z} \right| \leqslant \left| e^{-(\lambda_n - \lambda_{n-1}) z_0} \right| \qquad \text{при} \quad n > N.$$

Следовательно, при $n > N$ имеем:

$$\left| a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_N) z} \right| = \left| a_n e^{-(\lambda_{N+1} - \lambda_N) z} \ldots e^{-(\lambda_n - \lambda_{n-1}) z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| a_n e^{-(\lambda_{N+1} - \lambda_N) z_0} \ldots e^{-(\lambda_n - \lambda_{n-1}) z_0} \right| = \left| a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_N) z_0} \right|,$$

и ряд (3) сходится абсолютно.

Случай, когда ряд (3) не сходится абсолютно в точке z_0, рассматривается вполне аналогично.

Теорема 2. *Если ряд Дирихле* (*A*) *сходится в точке* $z = z_0$, *то он сходится в области* $\overset{\circ}{Q}(z_0)$.

Доказательство. Пусть ряд (А) сходится в точке $z = z_0$ и $z \in Q(z_0)$. Обозначим через $2\delta = 2\delta(z)$ наименьшее расстояние точки z до сторон угла $\overset{\circ}{Q}(z_0)$. Тогда, как нетрудно убедиться, существует такое число $N = N(z)$, что окрестность точки z радиуса $\delta(z)$ принадлежит всем полуплоскостям $Q_n(z_0)$ при $n > N$.

Рассмотрим теперь сумму:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_N) z} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_N) z_0} e^{-(\lambda_k - \lambda_N)(z - z_0)}.$$

Обозначим:

$$A_m=\sum_{k=n+1}^{m} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_N)z_0},\quad m>n\geqslant N,\quad A_n=0,$$

$$B_m=e^{-(\lambda_m-\lambda_N)(z-z_0)}.$$

Применим преобразование Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_N)z}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k-A_{k-1})B_k\right|=\left|A_{n+p}B_{n+p}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}A_k(B_{k+1}-B_k)\right|\leqslant\left|A_{n+p}B_{n+p}\right|+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|A_k\right|\left|B_{k+1}-B_k\right|.$$

Из сходимости ряда (3) в точке z_0 следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдётся такой номер $n_0=n_0(\varepsilon)$, что при $n>n_0$ будет $|A_m|<\varepsilon$.

Оценим модуль $|B_{k+1}-B_k|$:

$$\left|B_{k+1}-B_k\right|=\left|e^{-(\lambda_{k+1}-\lambda_N)(z-z_0)}-e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|=|z-z_0|\left|\int_{\lambda_k-\lambda_N}^{\lambda_{k+1}-\lambda_N}e^{-\xi(z-z_0)}d\xi\right|.$$

В последнем интеграле за путь интегрирования берём отрезок:

$$\xi=\lambda_k-\lambda_N+te^{i\varphi_k},$$

где:

$$0\leqslant t\leqslant|\lambda_{k+1}-\lambda_k|,$$

$$\varphi_k=\arg(\lambda_{k+1}-\lambda_k).$$

Тогда:

$$\left|B_{k+1}-B_k\right|=|z-z_0|\left|\int_0^{|\lambda_{k+1}-\lambda_k|}e^{-(\lambda_k-\lambda_N+te^{i\varphi_k})(z-z_0)}e^{i\varphi_k}dt\right|\leqslant|z-z_0|\cdot$$

$$\cdot\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|\int_0^{|\lambda_{k+1}-\lambda_k|}\left|e^{-te^{i\varphi_k}(z-z_0)}\right|dt=|z-z_0|\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|\cdot$$

$$\cdot\int_0^{|\lambda_{k+1}-\lambda_k|}e^{-t[(x-x_0)\cos\varphi_k-(y-y_0)\sin\varphi_k]}dt=\frac{|z-z_0|\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|}{(x-x_0)\cos\varphi_k-(y-y_0)\sin\varphi_k}\times$$

$$\times\left(1-e^{-|\lambda_{k+1}-\lambda_k|[(x-x_0)\cos\varphi_k-(y-y_0)\sin\varphi_k]}\right)=$$

$$=\frac{|z-z_0|\left(\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{k+1}-\lambda_N)(z-z_0)}\right|\right)}{(x-x_0)\cos\varphi_k-(y-y_0)\sin\varphi_k}.$$

Выражение, стоящее в знаменателе последней дроби, будет больше δ, начиная с $k>N$, а разность, стоящая в скобках в числителе, будет положительна при тех же значениях k.

Таким образом получаем:

$$\left|B_{k+1}-B_k\right|<\frac{|z-z_0|}{\delta}\left(\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{k+1}-\lambda_N)(z-z_0)}\right|\right).$$

Поэтому при $n > n_0$ следует

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_N)z}\right| < \varepsilon\left|e^{-(\lambda_{n+p}-\lambda_N)(z-z_0)}\right| +$$

$$+\varepsilon|z-z_0|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{k+1}-\lambda_N)(z-z_0)}\right|}{(x-x_0)\cos\varphi_k-(y-y_0)\sin\varphi_k}. \qquad (4)$$

И окончательно:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_N)z}\right| < \varepsilon+\frac{\varepsilon|z-z_0|}{\delta}\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_N)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{k+1}-\lambda_N)(z-z_0)}\right|\right)=$$

$$=\varepsilon+\frac{\varepsilon|z-z_0|}{\delta}\left(\left|e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_N)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{n+p}-\lambda_N)(z-z_0)}\right|\right)<\varepsilon\left(1+\frac{2|z-z_0|}{\delta}\right).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если ряд Дирихле (А) расходится в точке z_0, то он расходится в области $\overset{\circ}{R}(z_0)$.*

Доказательство. Допустим, что ряд (А) расходится в точке z_0, но сходится в точке $z \in R(z_0)$. По доказанному ряд (А) будет сходиться в угле $\overset{\circ}{Q}(z)$, а, следовательно, и в точке $z_0 \in \overset{\circ}{Q}(z)$.

Следствие 2. *Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$, то область $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ является полуплоскостью $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0$.* Таким образом, из доказанной теоремы следует хорошо известный результат [2], что ряд Дирихле (А), сходящийся в точке z_0 и имеющий показатели $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$, сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$.

Заметим, что тот же результат верен и в более общем случае $\lim\limits_{n\to\infty}\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$. В самом деле, в последнем случае область $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ представляет полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_0$.

Следующий пример покажет, что в теореме 2 полученный результат в некотором смысле нельзя усилить.

Пример. Пусть дан ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}(a_{2n-1}e^{z}+a_{2n}e^{-z}), \qquad (5)$$

где действительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = +\infty; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = -\infty.$$

Имеем: $\lambda_{2n-1} = -1$; $\lambda_{2n} = 1$, поэтому область $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ пуста. Таким образом, пользуясь теоремой 2, можем только сделать заключение, что этот ряд сходится в точке $z=0$. Оказывается, что этот ряд и в самом деле области сходимости, содержащей внутренние точки, не имеет и сходится только в точках $z = k\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Чтобы убедиться в сказанном, обозначим:

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1};\quad \beta_n=\sum_{k=1}^{n} a_{2k},\ \text{где}\ \alpha_n\to+\infty;\ \beta_n\to-\infty,\ \text{и пусть}\ |e^z|=r\neq 1.$$

Если S_n – частичная сумма ряда Дирихле (5), то:

$$S_{2n}=\alpha_n e^z+\beta_n e^{-z}.$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}|S_{2n}|=\infty$. На самом деле:

$$|S_{2n}|\geqslant|\alpha_n e^z|-|\beta_n e^{-z}|=\alpha_n r+\frac{\beta_n}{r}.$$

Если A – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то:

$$\alpha_n+\beta_n=A+\varepsilon_n,\quad \text{где}\quad \varepsilon_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Поэтому:

$$|S_{2n}|\geqslant\alpha_n r+\frac{A+\varepsilon_n-\alpha_n}{r}=\alpha_n\left(r-\frac{1}{r}\right)+\frac{A+\varepsilon_n}{r},$$

и при $r>1$ следует, что $|S_{2n}|\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$.

Если же $r<1$, то:

$$|S_{2n}|\geqslant-\frac{\beta_n}{r}-\alpha_n r=-\beta_n\left(\frac{1}{r}-r\right)-(A+\varepsilon_n)\,r\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty.$$

Пусть теперь $z=ci$, c – действительное число. Тогда

$$|S_{2n}|=|\alpha_n e^{ci}+\beta_n e^{-ci}|=\sqrt{(\alpha_n+\beta_n)^2\cos^2 c+(\alpha_n-\beta_n)^2\sin^2 c}$$

имеет конечный предел лишь при $\sin c=0$, т. е. при $c=k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

§ 3. Равномерная сходимость ряда Дирихле

Предположим, что область $\mathring{Q}(z_0)$ не является пустой и определена неравенством (1, 2).

Теорема 3. *Если ряд Дирихле* (A) *сходится в точке* z_0, *то:*

1) *он сходится равномерно внутри угла* $\mathring{Q}(z_0)$ *(т. е. в любой ограниченной замкнутой области* F, *лежащей* b $\mathring{Q}(z_0)$*)*;

2) *для угла*

$$V:\ -\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\Theta\leqslant\arg(z-z_0)\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta-\Theta;\quad 0<\Theta<\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}$$

найдётся такое число $N=N(\Theta)$, *что ряд* (A), *умноженный на* $e^{\lambda_m z}$, *где* $m\geqslant N$, *сходится равномерно в угле* V;

3) *если дополнительно выполнено условие:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|=+\infty,\tag{6}$$

то ряд Дирихле (A) *равномерно сходится в угле* V.

Доказательство. 2. Нетрудно убедиться (сравни с доказательством теоремы 2) в существовании такого числа N, что угол:

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\frac{\Theta}{2}<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\Theta}{2}$$

принадлежит всем полуплоскостям $Q_n(z_0)$ при $n>N$.

Как и при доказательстве теоремы 2, получим неравенство (4), которое теперь можем переписать так:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_m)z}\right|<\varepsilon\left|e^{-(\lambda_{n+p}-\lambda_m)(z-z_0)}\right|+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{\left|e^{-(\lambda_k-\lambda_m)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{k+1}-\lambda_m)(z-z_0)}\right|}{\cos(\psi+\varphi_k)},$$

где

$$n\geqslant m \quad \text{и} \quad n>n_0(\varepsilon), \quad \psi=\arg(z-z_0),$$

а другие величины имеют тот же смысл, что и в теореме 2.

Как не трудно убедиться, для $\frac{\Theta}{2}$ найдётся такой номер $N_1=N_1\left(\frac{\Theta}{2}\right)$ что при $n>N_1$ будет:

$$\alpha-\frac{\Theta}{2}<\varphi_n<\beta+\frac{\Theta}{2}.$$

Но

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\Theta<\psi<\frac{\pi}{2}-\beta-\Theta.$$

Поэтому:

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\Theta}{2}<\psi+\varphi_n<\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta}{2}.$$

Значит,

$$\cos(\psi+\varphi_n)>\sin\frac{\Theta}{2}>0 \quad \text{при} \quad n>N_1.$$

Окончательно при $n>\max(N_1,\ n_0)$ имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e^{-(\lambda_k-\lambda_m)z}\right|<\varepsilon\left|e^{-(\lambda_{n+p}-\lambda_m)(z-z_0)}\right|+$$

$$+\varepsilon\frac{\left|e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_m)(z-z_0)}\right|-\left|e^{-(\lambda_{n+p}-\lambda_m)(z-z_0)}\right|}{\sin\frac{\Theta}{2}}<\frac{\varepsilon\left|e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_m)(z-z_0)}\right|}{\sin\frac{\Theta}{2}}<\frac{\varepsilon}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

Следовательно, ряд (А), умноженный на $e^{\lambda_m z}$ $(m\geqslant N)$, сходится равномерно в угле V. Вторая часть теоремы доказана.

1. Чтобы доказать первую часть теоремы, достаточно заметить, что любую ограниченную замкнутую область F, лежащую в $\overset{\circ}{Q}(z_0)$, можно заключить в угле вида V, а функция $e^{\lambda_m z}$ ограничена в F.

3. Что касается третьей части теоремы, то заметим, что в угле V:

$$\left|e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(z-z_0)}\right|<e^{-|\lambda_{n+1}-\lambda_n||z-z_0|\sin\frac{\Theta}{2}}$$

при $n>N$. Это следует из определения числа N.

Таким образом, если $m \geqslant N$, то:

$$\left|e^{-\lambda_n(z-z_0)}\right| = \left|e^{-\lambda_m(z-z_0)}\right| \left|e^{-(\lambda_{m+1}-\lambda_m)(z-z_0)}\right| \ldots \left|e^{-(\lambda_n-\lambda_{n-1})(z-z_0)}\right| <$$

$$< e^{-\left(\sum\limits_{k=m+1}^{n} |\lambda_k-\lambda_{k-1}| \sin\frac{\theta}{2} - |\lambda_m|\right)|z-z_0|}$$

и из условия (6) следует, что при достаточно большом n для всех $z \in V$ будет $\left|e^{-|\lambda_n(z-z_0)}\right| < 1$.

Пользуясь сказанным, третью часть теоремы доказываем так же, как и вторую.

§ 4. Абсциссы сходимости ряда Дирихле

Из следствия 2 (§ 2) следует, что область сходимости (абсолютной сходимости) ряда Дирихле представляет полуплоскость $\operatorname{Re} z > c$ $(\operatorname{Re} z > a)$. При этом случай $c = +\infty$ $(a = +\infty)$ следует понимать, что ряд (A) расходится всюду (не сходится абсолютно всюду), а в случае $c = -\infty$ $(a = -\infty)$ ряд (A) всюду сходится (абсолютно всюду сходится). Число c (a) называется абсциссой сходимости (абсолютной сходимости).

Теорема 5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, *то абсциссы сходимости ряда* (*A*) *вычисляются по формулам*:

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right|}{\operatorname{Re}\lambda_n}, \quad \text{если} \quad c > 0;$$

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k\right|}{\operatorname{Re}\lambda_n}, \quad \text{если} \quad c < 0;$$

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{\operatorname{Re}\lambda_n}, \quad \text{если} \quad a > 0;$$

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|}{\operatorname{Re}\lambda_n}, \quad \text{если} \quad a < 0.$$

Кроме того, отметим следующий результат:

Теорема 6. *Если показатели* λ_n *удовлетворяют дополнительному условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\operatorname{Re}\lambda_n} = L < \infty, \ \textit{то}:$$

$$0 \leqslant a - c \leqslant L.$$

Если же:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{Re}\lambda_n} = 0, \quad \textit{то}:$$

$$a = c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\operatorname{Re}\lambda_n}.$$

Все указанные формулы для вычисления абсцисс сходимости доказываются вполне аналогично, как для случая $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ (см. [2]) и поэтому подробное доказательство пропускаем.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию 7.III.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гандлер, Э. Голосова и А. Нафталевич. О сходимости факториальных рядов. Литовский математический сборник т. I, № 1—2, 1961, 41—57.
2. V. Bernstein. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.
3. Г. Л. Лунц. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. Математический сборник, т. 10(52), № 1—2, 1942, 33—491.
4. Г. Л. Лунц. О рядах типа Тейлора – Дирихле. Известия Академии наук Армянской ССР, т. XIV, № 2, 1961, 7—15.

DIRICHLE EILUČIŲ KONVERGENCIJOS KLAUSIMU

A. MIŠKELEVIČIUS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjamos Dirichle eilutės (A), kur a_n ir λ_n yra bet kokie kompleksiniai skaičiai, o z – kompleksinis kintamasis.

Įrodoma, kad jeigu eilutė (A) konverguoja (diverguoja) taške $z=z_0$, ji taip pat konverguoja (diverguoja) srityje $\mathring{Q}(z_0)$ $\left(\mathring{R}(z_0)\right)$, kuri yra apibrėžiama (2) $\left((2^a)\right)$ nelygybe.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE DIRICHLET

A. MICHKELEVITCHUS

(*Résumé*)

On concidère dans cet article une série de Dirichlet (A), où a_n et λ_n sont des nombres complexes quelconques et z – un variable complexe.

On démontre que, si la série (A) converge (diverge) en un point $z=z_0$, elle converge (diverge) aussi dans le domaine $\mathring{Q}(z_0)$ $\left(\mathring{R}(z_0)\right)$, qui est défini par l'inégalité (2) $\left((2^a)\right)$.